Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Geradengleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

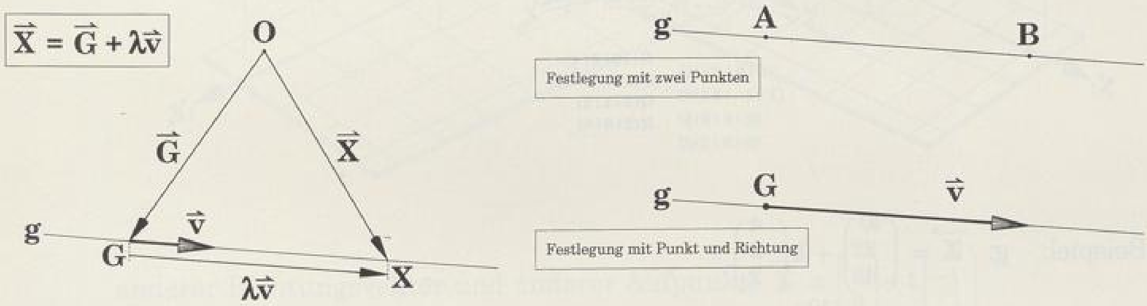
1. Geradengleichung

In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Deshalb muß man die geometrischen Figuren wie Geraden und Ebenen mit Gleichungen beschreiben. Zur Aufstellung einer Geradengleichung braucht man die **Bestimmungsstücke** der Gerade:

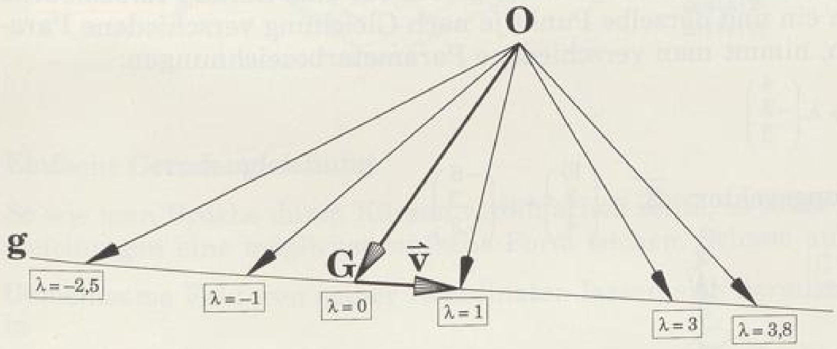
– zwei Punkte A und B

oder

– einen Punkt G und einen Vektor $\vec{v}$ in Richtung der Gerade.



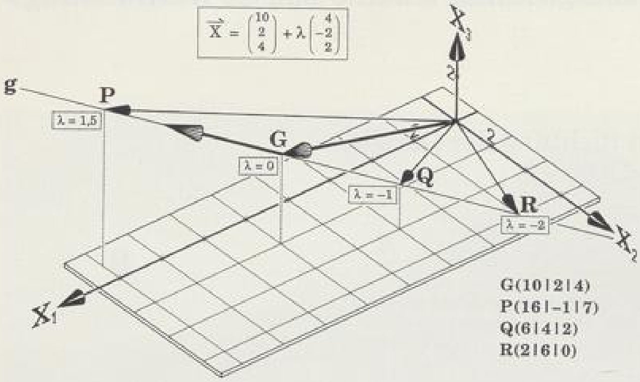
Eine Geradengleichung beschreibt die Ortsvektoren $\vec{X}$ aller Geradenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch Punkt und Richtung am besten: Man wählt einen Punkt G der Gerade g als **Aufpunkt** und einen Vektor $\vec{v}$ in Richtung von g als **Richtungsvektor**. Der Ortsvektor $\vec{X}$ eines beliebigen Geradenpunkts X läßt sich dann darstellen als Summe von $\vec{G}$ und einem Vielfachen von $\vec{v}$: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{v}$. Der Faktor λ heißt **Parameter** des Punkts X. Durchläuft der Parameter λ alle reellen Zahlen, so beschreibt die Gleichung alle Punkte der Gerade; bildlich gesehen tastet dann die Spitze des Ortsvektors $\vec{X}$ alle Geradenpunkte ab.



Zusammenfassung

> Ist G ein beliebiger Punkt der Gerade g und $\vec{v}$ ein Vektor in Richtung g,
> dann nennt man **g:** $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Gleichung von g.
> G heißt Aufpunkt, $\vec{v}$ Richtungsvektor und λ Parameter der Geradengleichung.

Man nennt eine solche Geradengleichung auch Parameterform oder Punkt-Richtungs-Form. Sie ist freilich nur sinnvoll, solange $\overrightarrow{v}$ nicht der Nullvektor ist. Die Bedingung $\lambda \in \mathbb{R}$ läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, G(10 | 2 | 4) liegt auf g (klar!)

$\lambda = 1{,}5: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, P(16 | −1 | 7) liegt auf g

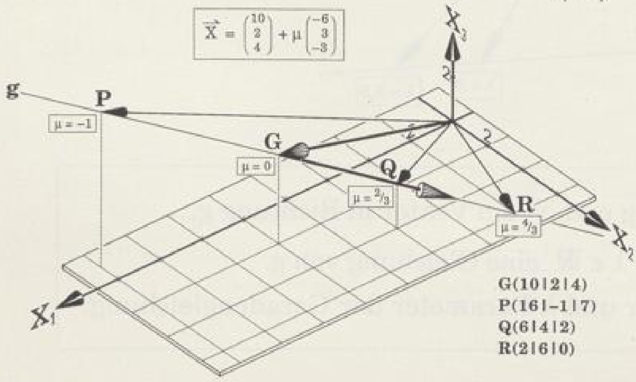
$\lambda = -1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, Q(6 | 4 | 2) liegt auf g

$\lambda = -2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, R(2 | 6 | 0) liegt auf g.

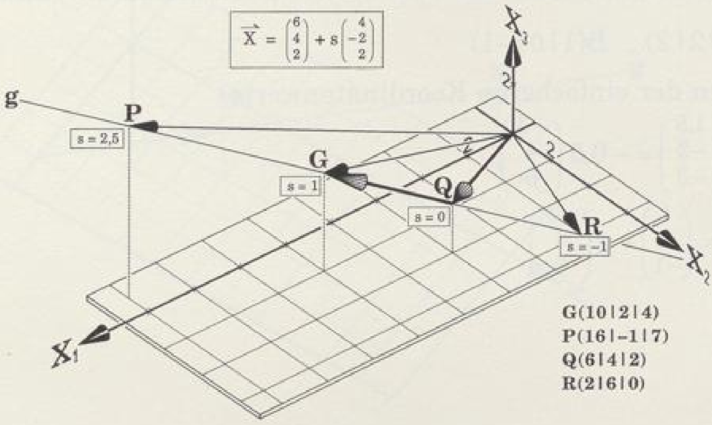
Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektor gibt es für eine Gerade verschiedene Gleichungen. Weil dann ein und derselbe Punkt je nach Gleichung verschiedene Parameterwerte haben kann, nimmt man verschiedene Parameterbezeichnungen:

Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

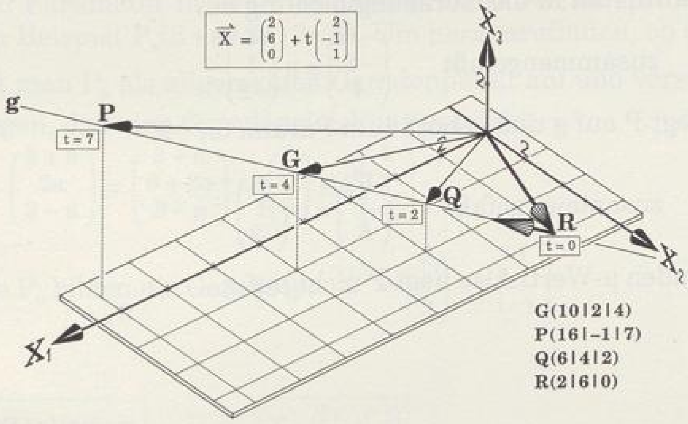
anderer Richtungsvektor: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$



anderer Aufpunkt: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$



anderer Richtungsvektor und anderer Aufpunkt: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$



Einfache Geradengleichung

So wie man Brüche durch Kürzen vereinfachen sollte, so sollte man auch bei Geradengleichungen eine möglichst einfache Form suchen. Schaue auf den Richtungsvektor!

Gemeinsame Faktoren seiner Koordinaten lassen sich herausziehen, zum Beispiel -3 in

$$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{einfacher} \qquad g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Geometrisch bedeutet das den Übergang zu einem kollinearen Richtungsvektor. Beim Ortsvektor des Aufpunkts ist dieses Verfahren im allgemeinen verboten! Man würde dadurch die Gerade ja parallel verschieben.

Gerade durch zwei Punkte

Sind von der Gerade h zwei Punkte A und B bekannt, so wählt man einen davon als Aufpunkt. Als Richtungsvektor nimmt man $\overrightarrow{AB}$ oder einen dazu kollinearen Vektor:

Gegeben: $A(-0{,}5|2|2)$, $B(1|0|-1)$

Aufpunkt: B (wegen der einfacheren Koordinatenwerte)

Richtung: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -0{,}5 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gleichung: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punkt auf Gerade ?

Liegen die Punkte $P(-6|-5|5)$ und $Q(14|0|7)$ auf der Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Wir setzen die Punktkoordinaten in die Geradengleichung ein

$P: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mu = -2$, paßt! Also liegt P auf g und gehört zum Parameter -2.

$Q: \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

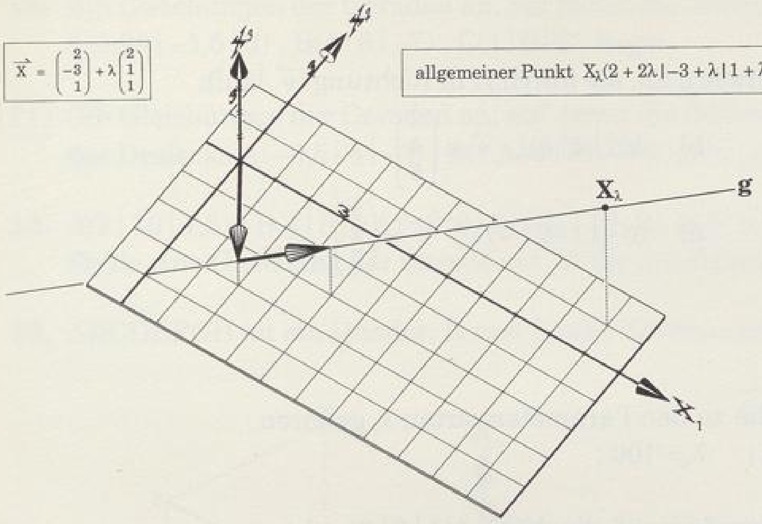
Es gibt keinen passenden μ-Wert. Also liegt P nicht auf g.

Allgemeiner Geradenpunkt

Manchmal ist es nützlich, mit dem »**allgemeinen Geradenpunkt**« zu arbeiten. Sein Ortsvektor ergibt sich, wenn man die rechte Seite der Geradengleichung zusammenfaßt. So hat von

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt X_λ den Ortsvektor $\overrightarrow{X_\lambda} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ -3+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$

Mit dem allgemeinen Punkt findet man zum Beispiel bequem den Punkt P auf g, der 5 Einheiten über der x_1x_2-Ebene liegt. Für ihn gilt $x_3 = 5$, also $1 + \lambda = 5$. Der Punkt hat den Parameterwert $\lambda = 4$; eingesetzt in $\overrightarrow{X_\lambda}$ ergibt sich $\overrightarrow{X_4} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ergebnis: $P(10|1|5)$

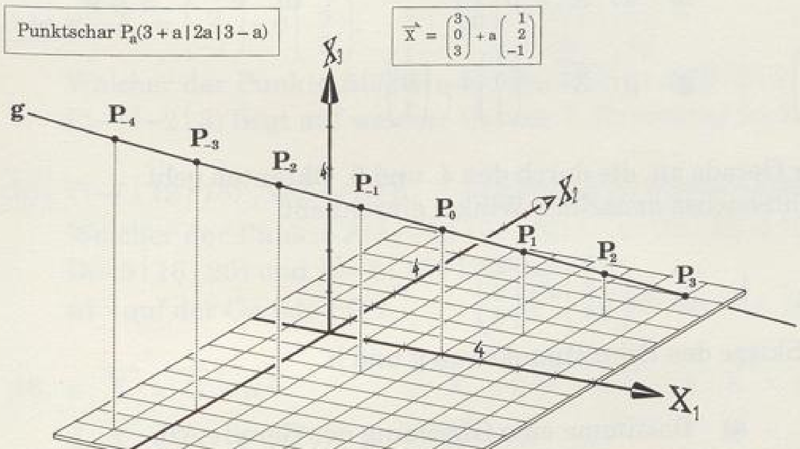


Punktschar

Kommt ein Parameter in den Punktkoordinaten vor, so spricht man von einer Punktschar, zum Beispiel $P_a(3+a\,|\,2a\,|\,3-a)$. Um herauszufinden, ob die Schar P_a eine Gerade bildet, faßt man P_a als allgemeinen Geradenpunkt auf und versucht, den Ortsvektor $\overrightarrow{P_a}$ so zu zerlegen, daß eine Geradengleichung entsteht:

$$\overrightarrow{P_a} = \begin{pmatrix}3+a\\2a\\3-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+a\\0+2a\\3-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Die Punkte P_a bilden die Gerade g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$



Aufgaben

1. Gib eine Gleichung der Gerade g an, die durch A in Richtung $\vec{v}$ läuft:

a) $A(0|3|1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A(2|4|6)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $A(0|0|0)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **d)** $A(-1|-2|-7)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne die Punkte P_i, die zu den Parameterwerten λ_i gehören
$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -1{,}5$; $\lambda_4 = 100$;

3. Stelle die Gleichung der Gerade g auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur

a) x_1-Achse **b)** x_3-Achse **c)** Gerade h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

4. Gib Gleichungen der drei Koordinatenachsen an.

5. Gib Gleichungen der Geraden an, die die Winkel zwischen x_1-Achse und x_3-Achse halbieren.

6. Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem.
Zeichnung im Koordinatensystem für **a)** bis **d)** !

a) a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** b: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) c: $\vec{X} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** d: $\vec{X} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e)** e: $\vec{X} = \sigma \vec{W}$

f) f: $\vec{X} = \vec{F} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **g)** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Gib eine Gleichung der Gerade an, die durch den 4. und 6. Oktanten geht und mit jeder Koordinatenachse denselben Winkel einschließt.

8. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Überlege dir an einer Skizze den Schnittpunkt von g und h.

9. $A(1|2|3)$, $B(5|6|7)$

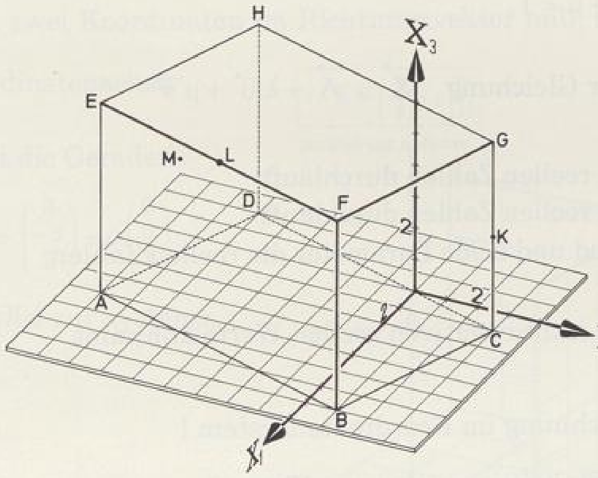
a) Bestimme eine Gleichung der Gerade AB.
b) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade [AB.
c) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade AB].
d) Bestimme eine Gleichung der Strecke [AB].

10. Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seiten des Dreiecks A(0,25 | −1,5 | 3) , B(4 | 6 | −7) , C(1 | 0 | 2) liegen.

11. Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seitenhalbierenden s_a , s_b und s_c des Dreiecks A(−5,5 | 4 | −3) , B(7,5 | 0 | 9) , C(11,5 | 2 | 9) liegen.

12. A(2 | 10 | 1,5) , B(4 | 8 | 0,5) , C(6 | 6 | −2) , D(−8 | 4 | 0) ist ein Tetraeder. Stelle eine Gleichung der Gerade auf, in der die Schwerlinie liegt, die durch D geht.

13. ABCDEFGH ist ein Quader; K und L sind Kantenmitten, M ist Flächenmitte.



Lies die Koordinaten aus dem Bild ab und gib Gleichungen der Geraden an:

a) EF und FG **b)** BE und BG **c)** DF und AG
d) CM und BM **e)** KL und LM

14. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$
Welcher der Punkte A(3 | 2 | −5) , B(−1 | 2 | 3) , C(2 | 0 | 5) , D(1 | 1 | 1) und E(−1 | −2 | 3) liegt auf welcher Gerade ? Zeichnung im Koordinatensystem !

15. P(−7 | 12 | 18) , Q(3 | −8 | 8) Zeichnung im Koordinatensystem !
Welcher der Punkte A(4 | −10 | 7) , B(1 | −4 | 10) , C(−1 | 0 | −12) , D(−9 | 16 | 20) und E(−6 | 10 | 17) liegt
a) auf der Gerade PQ ? **b)** auf der Strecke [PQ] ?

• **16.** a: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ b: $\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ c: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu\cdot 2\overrightarrow{v}$
d: $\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu\cdot 2\overrightarrow{v}$ e: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ f: $\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$
g: $\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ Welche Geraden sind identisch im Fall
a) $G \neq O$, $\overrightarrow{G}, \overrightarrow{v}$ nicht parallel **b)** $G \neq O$, $\overrightarrow{G}$ parallel $\overrightarrow{v}$

17. $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben dieselbe Gerade.

a) Welchen μ-Wert hat der Punkt für $\lambda = 1$?

b) Welchen λ-Wert hat der Punkt für $\mu = -2$?

c) Welche Beziehung besteht zwischen λ und μ eines Geradenpunkts ?

• 18. Wie bewegt sich der Punkt X mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{X} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \mu \overrightarrow{B}}{1 + \mu}$, wenn μ alle erlaubten reellen Zahlen durchläuft ?

19. Zeige: Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{P} = \lambda \overrightarrow{A} + \mu \overrightarrow{B}$ liegt genau dann auf der Gerade AB, wenn gilt: $\lambda + \mu = 1$.

• 20. Welche Punktmenge wird von der Gleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{o}$) beschrieben, wenn

a) λ konstant ist, während μ die reellen Zahlen durchläuft

b) μ konstant ist, während λ die reellen Zahlen durchläuft

c) $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ linear abhängig sind und beide Parameter die reellen Zahlen durchlaufen

d) λ konstant ist, während μ die nicht negativen reellen Werte annimmt.

21. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Welcher Punkt von g liegt 2 Einheiten vor der x_2x_3-Ebene ?

b) Welche Punkte von g haben von der x_1x_3-Ebene den Abstand 8 ?

c) Welche Punkte von g liegen 1 Einheit unter der x_1x_2-Ebene ?

22. Auf der Gerade durch A(12 | 24 | 36) und B(12 | 42 | 63) liegen die Mittelpunkte von Kugeln mit Radius 12.

a) Zwei Kugeln berühren die x_1x_3-Ebene.
Berechne die Mittelpunkte und die Berührpunkte.

b) Wo berühren die Kugeln die x_2x_3-Ebene ?

23. Kugeln mit Radius 23 rollen auf der Gerade r auf der x_2x_3-Ebene; r geht durch P(0 | 5 | 6) und Q(0 | 6 | 5) . Wo liegen die Kugelmittelpunkte ?

24. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

A(a_1 | a_2 | 8) , B(−12 | k | −k) , C(c | 1 | 1) , D(2k | −3k | k) , E(4k−3 | 1 | 2k)
Berechne die fehlenden Koordinaten in A bis E so, daß diese Punkte auf g liegen.

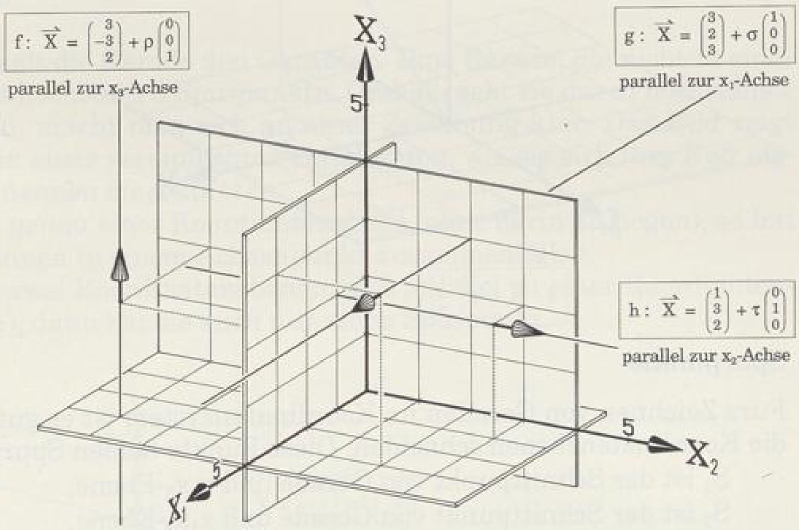
25. Liegen die Punkte P_a auf einer Gerade ? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Gerade auf.

a) $P_a(1+2a \mid 2-7a \mid -1-2a)$ **b)** $P_a(3a-2 \mid 4 \mid -6a)$
c) $P_a(a \mid 1 \mid 0)$ **d)** $P_a(1+a \mid 1-a \mid a+1)$
e) $P_a(a^2 \mid a \mid a+1)$ **f)** $P_a(\frac{2}{a} \mid 0 \mid \frac{1}{a})$

2. Lage im Koordinatensystem

Parallel zu einer Koordinatenachse

Sind zwei Koordinaten im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.



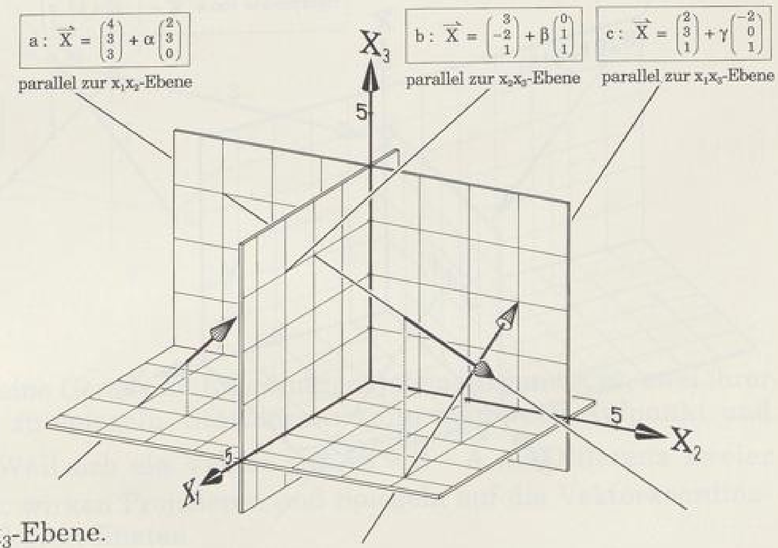
So ist die Gerade f :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

parallel zur x_3-Achse.

Parallel zu einer Koordinatenebene

Ist eine Koordinate im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.



Die Gerade c :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_1x_3-Ebene.

Die Gerade f :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_2x_3- und x_1x_3-Ebene.