Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Lage im Koordinatensystem

25. Liegen die Punkte P_a auf einer Gerade ? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Gerade auf.

a) $P_a(1+2a \mid 2-7a \mid -1-2a)$ **b)** $P_a(3a-2 \mid 4 \mid -6a)$

c) $P_a(a \mid 1 \mid 0)$ **d)** $P_a(1+a \mid 1-a \mid a+1)$

e) $P_a(a^2 \mid a \mid a+1)$ **f)** $P_a(\frac{2}{a} \mid 0 \mid \frac{1}{a})$

2. Lage im Koordinatensystem

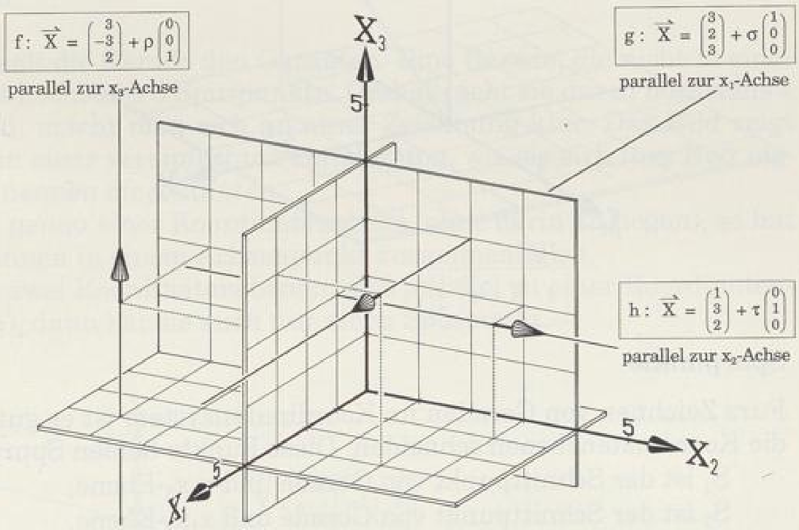
Parallel zu einer Koordinatenachse

Sind zwei Koordinaten im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.

So ist die Gerade f :

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel zur x_3-Achse.



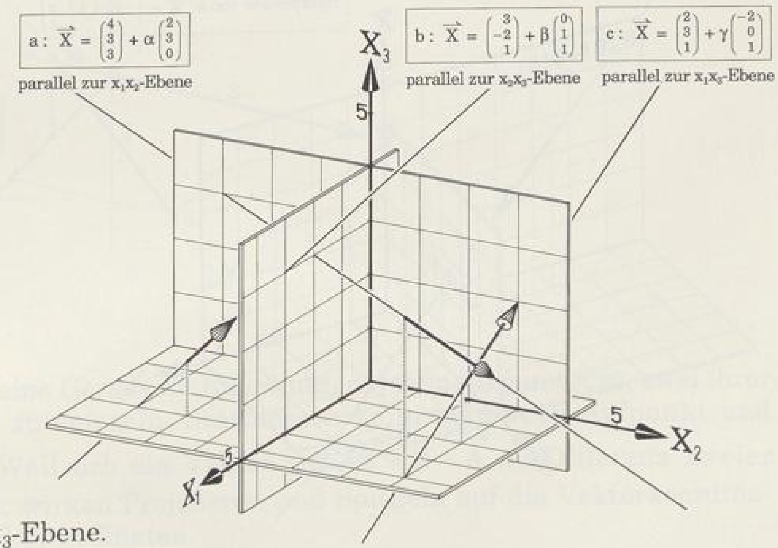
Parallel zu einer Koordinatenebene

Ist eine Koordinate im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.

Die Gerade c :

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_1x_3-Ebene.



Die Gerade f :

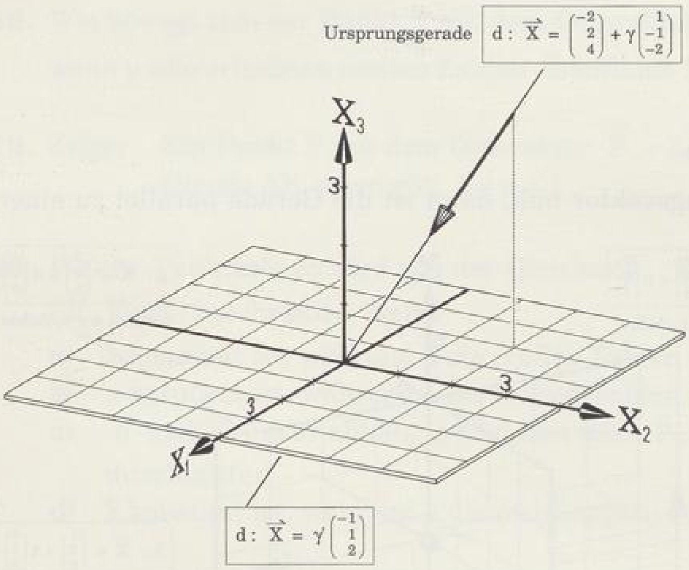
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_2x_3- und x_1x_3-Ebene.

Ursprungsgerade

Ist der Ortsvektor des Aufpunkts ein Vielfaches des Richtungsvektors, dann geht die Gerade durch den Ursprung, zum Beispiel

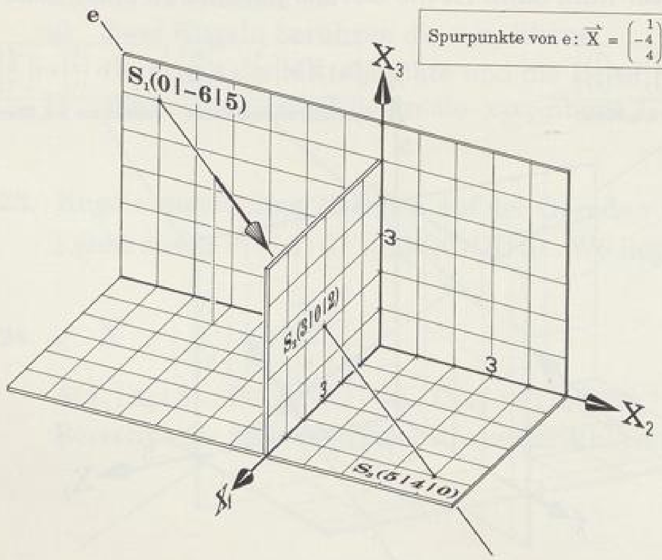
$$d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ einfachere Gleichung } d: \overrightarrow{X} = \gamma' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Spurpunkte

Fürs Zeichnen von Geraden im Koordinatensystem ist es gut zu wissen, wo die Geraden die Koordinatenebenen schneiden. Diese Punkte heißen Spurpunkte S_i:

S_1 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_2x_3-Ebene,
S_2 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_1x_3-Ebene,
S_3 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_1x_2-Ebene,



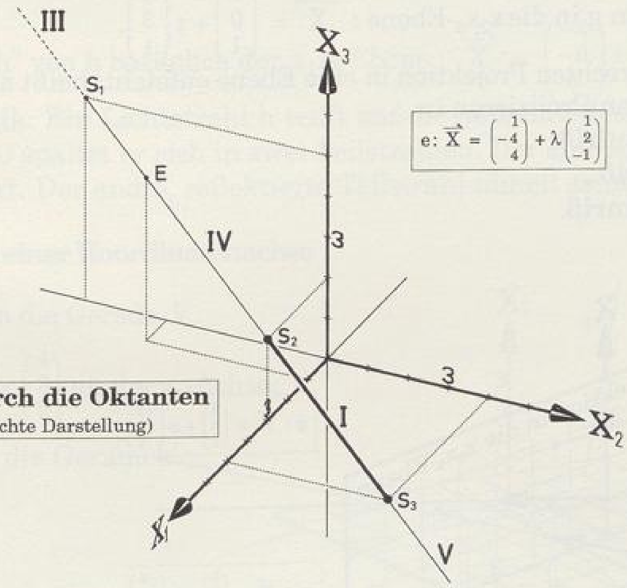
Die Berechnung der Spurpunkte S_i ist recht einfach:
Setze die i-te Koordinate im allgemeinen Geradenpunkt gleich null und berechne den zugehörigen Parameterwert. Beispiel

$$e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ allgemeiner Geradenpunkt } \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+\mu \\ -4+2\mu \\ 4-\mu \end{pmatrix}$$

$S_1(0 \mid ? \mid ?)$	**$S_2(? \mid 0 \mid ?)$**	**$S_3(? \mid ? \mid 0)$**
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$
$1 + \mu = 0$	$-4 + 2\mu = 0$	$4 - \mu = 0$
$\mu = -1$	$\mu = 2$	$\mu = 4$
$S_1(0 \mid -6 \mid 5)$	$S_2(3 \mid 0 \mid 2)$	$S_3(5 \mid 4 \mid 0)$

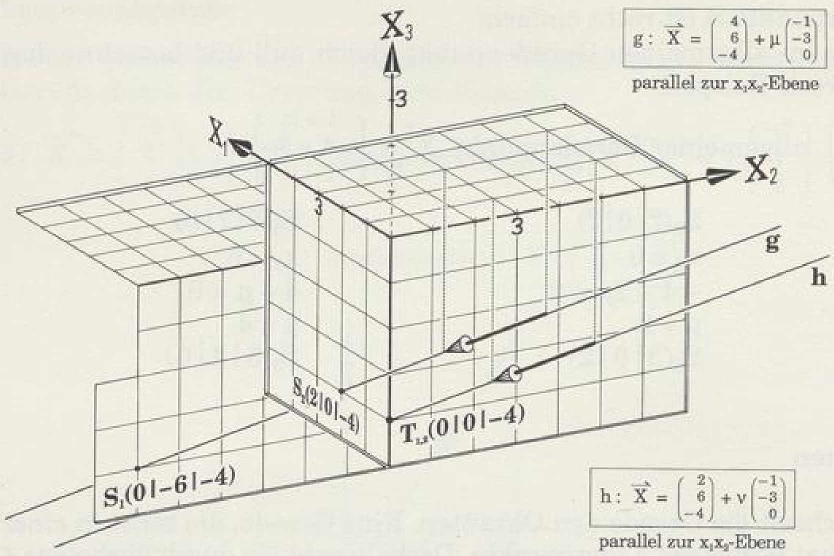
Verlauf durch die Oktanten

An jedem Spurpunkt wechselt die Gerade den Oktanten. Eine Gerade, die nicht in einer Koordinatenebene liegt, hat höchstens 3 Spurpunkte. Deshalb geht sie durch höchstens 4 Oktanten. Welche das sind, macht man sich an einer Zeichnung klar. Das Bild zeigt wieder die Gerade e, aber in einer vereinfachten Darstellung, wie sie sich fürs Heft eignet. Die römischen Ziffern nennen die Oktanten.
Ist eine Gerade parallel zu genau einer Koordinatenebene (ohne darin zu liegen), so hat sie 2 Spurpunkte. Diese können in einem Achsenpunkt zusammenfallen.
Ist eine Gerade parallel zu zwei Koordinatenebenen, also parallel zu einer Koordinatenachse (ohne darin zu liegen), dann hat sie auch nur einen Spurpunkt.



Verlauf durch die Oktanten
(vereinfachte Darstellung)

Projiziert oder spiegelt man eine Gerade im Koordinatensystem, so genügt es, zwei ihrer Punkte zu projizieren oder zu spiegeln. Stattdessen kann man auch Aufpunkt und Richtungsvektor nehmen. Weil sich ein Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AE} = \vec{E} - \vec{A}$ als Differenz zweier Ortsvektoren schreiben läßt, wirken Projizieren und Spiegeln auf die Vektorkoordinaten genau so wie auf die Punktkoordinaten.



Senkrechte Projektion in eine Koordinatenebene

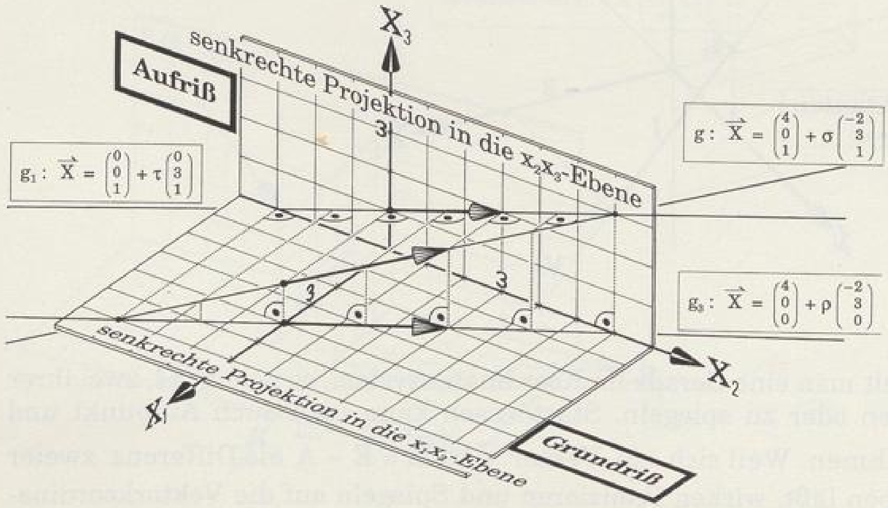
Projiziert man die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ senkrecht in die x_2x_3-Ebene,

so entsteht die Gerade g_1; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach: Setze die 1. Koordinate im Aufpunkt und im Richtungvektor gleich null.

Senkrechte Projektion g_1 von g in die x_2x_3-Ebene : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

Das Bild, das bei einer senkrechten Projektion in eine Ebene entsteht, heißt auch **Riß**. So entsteht beim senkrechten Projizieren in

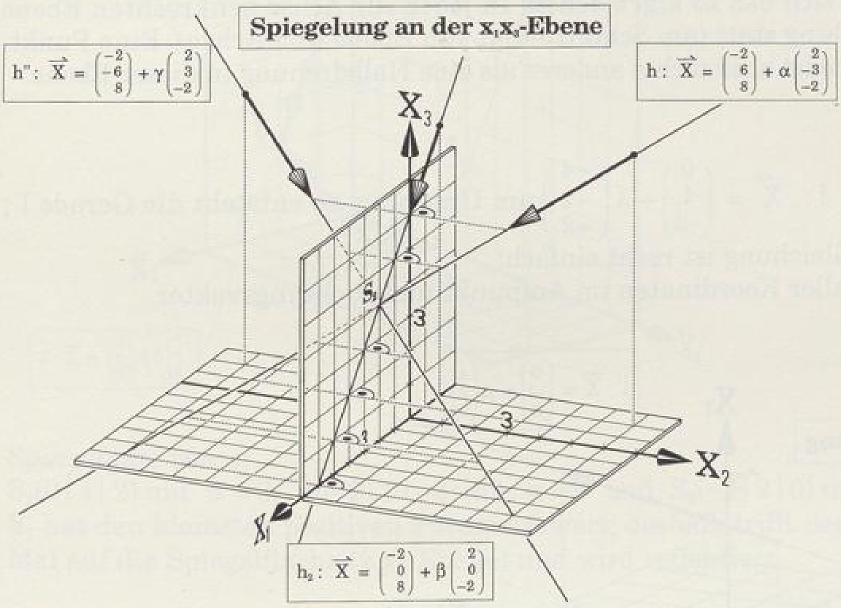
die x_1x_2-Ebene der **Grundriß**,
die x_2x_3-Ebene der **Aufriß** ,
die x_1x_3-Ebene der **Seitenriß**.



Spiegeln an einer Koordinatenebene

Spiegelt man die Gerade $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ an der x_1x_3-Ebene,

so entsteht die Gerade h'' ; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach: Ändere das Vorzeichen der 2. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.



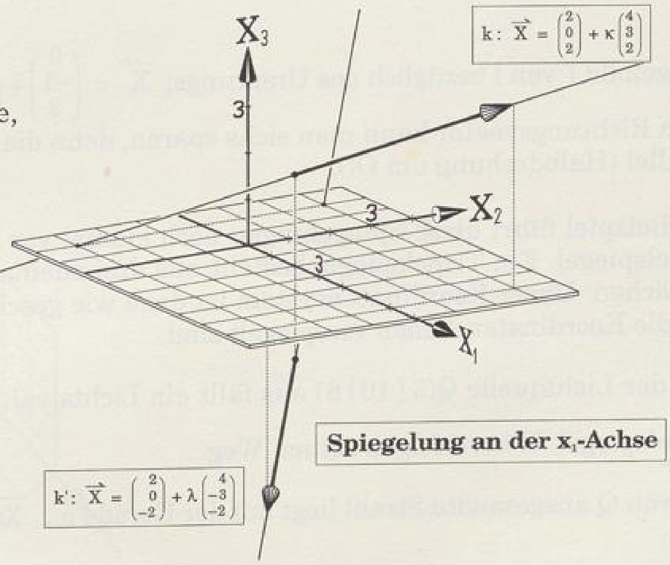
Spiegelbild h'' von h bezüglich der x_1x_3-Ebene : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Das erinnert an die Strahlenoptik: Ein Lichtstrahl h trifft auf die halbdurchlässige Fläche der x_1x_3-Ebene. In $S_2(2 \mid 0 \mid 4)$ spaltet er sich in zwei Teilstrahlen. Der eine setzt seinen Weg in der alten Richtung fort. Der andre, reflektierte Teilstrahl nimmt seinen Weg auf h''.

Spiegeln an einer Koordinatenachse

Spiegelt man die Gerade k :

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ an der x_1-Achse,

so entsteht die Gerade k' ;



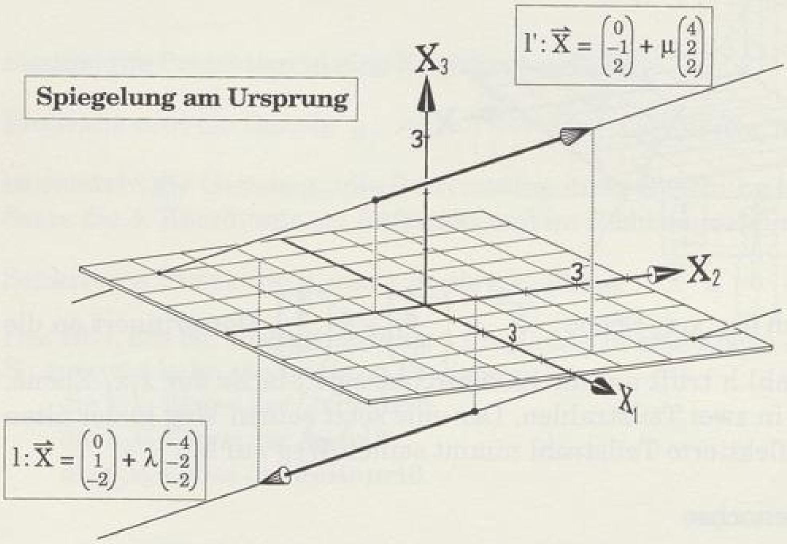
die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Ändere die Vorzeichen der 2. und 3. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.

Spiegelbild k' von k bezüglich der x_1-Achse : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an einer Achse im Raum ist gleichbedeutend mit einer Halbdrehung um diese Achse. Man kann sich das so klarmachen: In jeder zur Achse senkrechten Ebene findet eine Punktspiegelung statt (am Schnittpunkt von Ebene und Achse). Eine Punktspiegelung in einer Ebene ist aber nichts anderes als eine Halbdrehung in dieser Ebene.

Spiegeln am Ursprung

Spiegelt man die Gerade $l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ am Ursprung, so entsteht die Gerade l' ;
die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Ändere die Vorzeichen aller Koordinaten im Aufpunkt und Richtungsvektor.



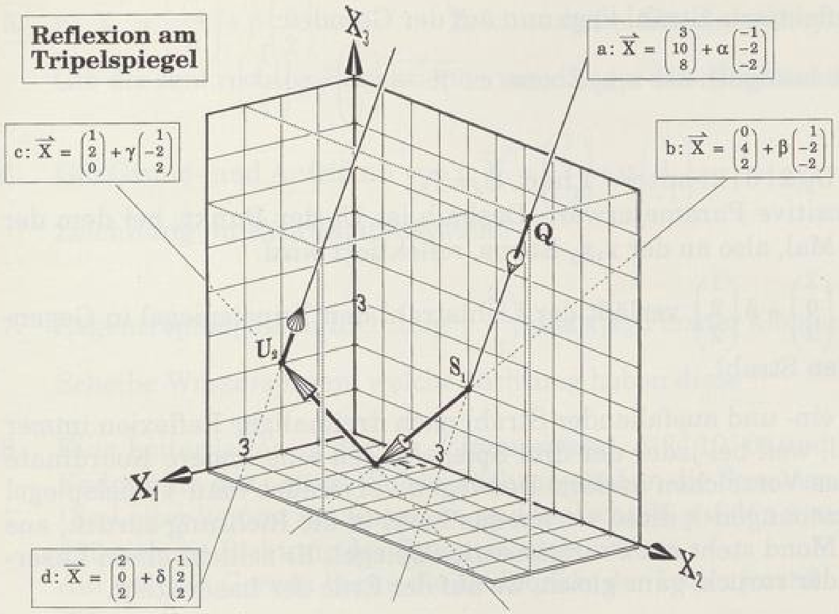
Spiegelbild l' von l bezüglich des Ursprungs: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beim Richtungsvektor kann man sichs sparen, denn die Gerade und ihr Spiegelbild sind parallel (Halbdrehung um O!).

Ein Beispiel führt diese Spiegelungen noch einmal vor Augen: Reflexion des Lichts am Tripelspiegel. Ein Tripelspiegel besteht aus drei zueinander senkrechten, ebenen Spiegelflächen. Unser Koordinatensystem ist dazu wie geschaffen, wenn wir uns vorstellen, daß die Koordinatenebenen verspiegelt sind.

Von der Lichtquelle Q(3 | 10 | 8) aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Tripelspiegel. Wir verfolgen seinen Weg.

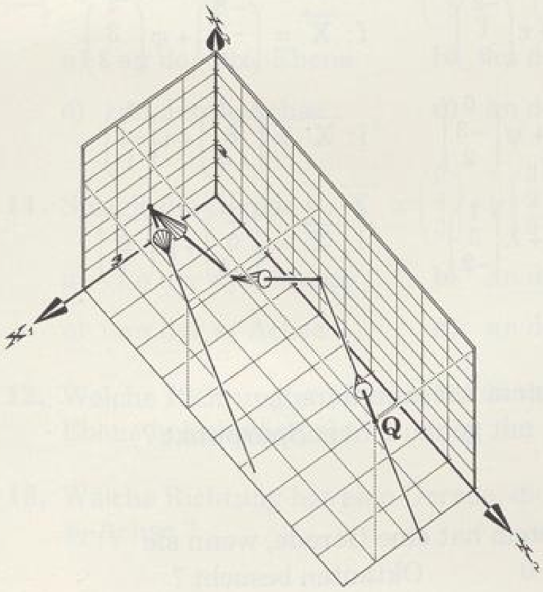
Der von Q ausgesandte Strahl liegt auf der Gerade a : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Spurpunkte von a:
$S_1(0\,|\,4\,|\,2)$ mit $\alpha = 3$, $S_2(-2\,|\,0\,|\,-2)$ mit $\alpha = 5$ und $S_3(-1\,|\,2\,|\,0)$ mit $\alpha = 4$.
S_1 hat den kleinsten positiven Parameterwert; deshalb trifft der Strahl dort zum ersten Mal auf die Spiegelfläche (x_2x_3-Ebene) und wird reflektiert.

Der reflektierte Strahl liegt auf der Gerade b. b ist das Spiegelbild von a bezüglich der x_2x_3-Ebene. Als Aufpunkt von b nehmen wir S_1, b: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Spurpunkte von b:
$T_1(0\,|\,4\,|\,2)$ mit $\beta = 0$, $T_2(2\,|\,0\,|\,-2)$ mit $\beta = 2$ und $T_3(1\,|\,2\,|\,0)$ mit $\beta = 1$. T_3 liegt T_1 am nächsten, deshalb wird der Strahl bei T_3 gespiegelt (jetzt an der x_1x_2-Ebene).



Der zum zweiten Mal reflektierte Strahl liegt nun auf der Gerade c.

c ist das Spiegelbild von b bezüglich der x_1x_2-Ebene. c : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Spurpunkte von c:

$U_1(0\,|\,4\,|\,-2)$ mit $\gamma = -1$, $U_2(2\,|\,0\,|\,2)$ mit $\gamma = 1$ und $U_3 = T_3$.
$\gamma = 1$ ist der kleinste positive Parameterwert. Deshalb ist U_2 der Punkt, bei dem der Lichtstrahl zum dritten Mal, also an der x_1x_3-Ebene, reflektiert wird.

Auf der Gerade d : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ verläßt der Lichtstrahl den Tripelspiegel in Gegenrichtung zum einfallenden Strahl.

Beim Tripelspiegel sind ein- und ausfallender Strahl nach dreimaliger Reflexion immer entgegengesetzt parallel, weil bei jeder der drei Spiegelungen eine andere Koordinate des Richtungsvektors das Vorzeichen ändert. Deswegen verwendet man Tripelspiegel bei Rückstrahlern (»Katzenaugen«); diese werfen das Licht in die Richtung zurück, aus der es kommt. Auf dem Mond steht ein Präzisionstripelspiegel. Er schickt einen Laserblitz jedem seiner Absender zurück, ganz gleich, wo auf der Erde der Laser steht.

Aufgaben

1. Gib eine Gleichung der Gerade g durch $P(1\,|\,-2\,|\,3)$ an, für die gilt:

a) g ist parallel zur x_2-Achse **b)** g ist parallel zur x_1x_2-Ebene
c) g ist parallel zur x_2x_3-Ebene **d)** g geht durch den Ursprung.

Zeichnung im Koordinatensystem !

2. Bestimme die Spurpunkte und den Oktantenverlauf der Geraden a bis l:

a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ b: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ c: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

d: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\-7\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\3\\9\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-8\\-3\\9\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$

g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\-6\\8\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ i: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} + \iota\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

j: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ k: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\-21\\14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ l: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade

a) mit genau zwei Spurpunkten ? **b)** mit genau einem Spurpunkt ?
c) mit keinem Spurpunkt ?

4. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade, wenn sie

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 Oktanten besucht ?

$\boxed{5.}$ $r: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

Gib die senkrechten Projektionen von r in die drei Koordinatenebenen an.

6. Gib Grund- und Aufriß an von s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zeichnung im Koordinatensystem!

7. Regentropfen, die in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ans x_1x_3-Fenster klopfen, hinterlassen auf der Scheibe Wasserspuren; welche Richtung haben diese ?

8. Eine Leiter lehnt an der x_2x_3-Zimmerwand, $A(2\,|\,10\,|\,0)$ und $B(0\,|\,10\,|\,10)$ sind die Endpunkte der Leiter. Welche Richtung haben die Sprossen ?
Die Leiter kommt ins Rutschen und klatscht so auf den x_1x_2-Fußboden, daß sich die Richtung der Sprossen nicht ändert.
Auf welcher Gerade liegen die Endpunkte der Leiter jetzt ?

9. t_3 ist Grundriß, t_1 ist Aufriß der Gerade t. Gib eine Gleichung von t an:

a) $t_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• **b)** $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeichnung im Koordinatensystem !

In der Darstellenden Geometrie sind Geraden gewöhnlich in Grund- und Aufriß (als Zeichnung) gegeben.

$\boxed{10.}$ Spiegle die Gerade $u: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) an der x_1x_3-Ebene **b)** an der x_1x_2-Ebene

c) an der x_3-Achse **d)** an der x_1-Achse **e)** am Ursprung.

11. Spiegle die Gerade $v: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) an der x_1x_3-Ebene **b)** an der x_1x_2-Ebene

c) an der x_3-Achse **d)** an der x_1-Achse **e)** am Ursprung.

12. Welche Richtung(en) kann eine Gerade haben, wenn sie bei Spiegelung an der x_1x_2-Ebene in sich übergeht ?

13. Welche Richtung hat eine Gerade, die parallel ist zu ihrem Spiegelbild bezüglich der x_2-Achse ?

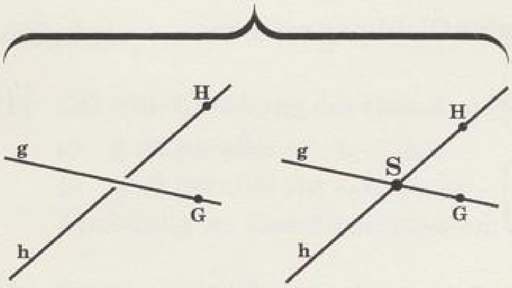
• **14.** Die x_1x_3-Ebene und die x_2x_3-Ebene seien Spiegelebenen, die x_1x_2-Ebene sei durchsichtig, also keine Spiegelebene. Auf welcher Gerade verläßt ein Lichtstrahl diesen Winkelspiegel, wenn er von Q(9 | 4 | 3) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ einfällt?

: **15.** Das Koordinatensystem sei ein Tripelspiegel.
Von Q(4 | 5 | 2) fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.
Berechne eine Gleichung der Gerade, auf der er den Spiegel verläßt.
Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Lage zweier Geraden

Für die Lage zweier Geraden im Raum gibt es vier typische Fälle:

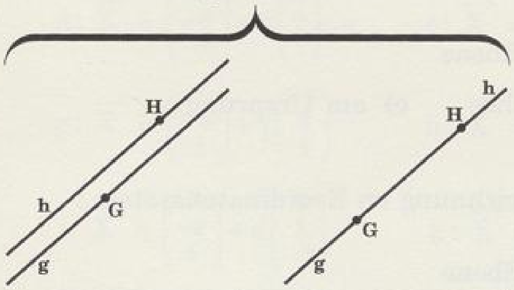
nicht parallel



g und h sind windschief

g und h schneiden sich

parallel



g und h sind echt parallel

g und h sind identisch

Welcher Fall vorliegt, kann man anhand der Geradengleichungen entscheiden. Zuerst schaut man auf die Richtungsvektoren.

$$g: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u} \qquad h: \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$$