Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

3. Lage zweier Geraden

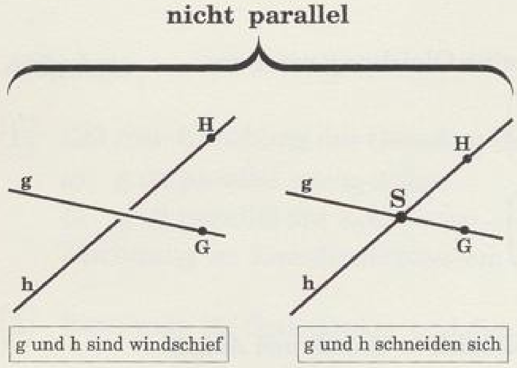
urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

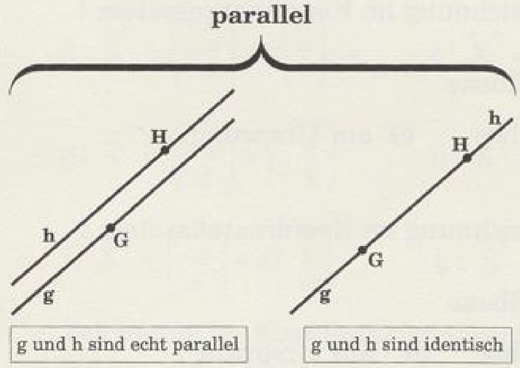
• **14.** Die x_1x_3-Ebene und die x_2x_3-Ebene seien Spiegelebenen, die x_1x_2-Ebene sei durchsichtig, also keine Spiegelebene. Auf welcher Gerade verläßt ein Lichtstrahl diesen Winkelspiegel, wenn er von Q(9 | 4 | 3) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ einfällt?

⁝ **15.** Das Koordinatensystem sei ein Tripelspiegel.
Von Q(4 | 5 | 2) fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.
Berechne eine Gleichung der Gerade, auf der er den Spiegel verläßt.
Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Lage zweier Geraden

Für die Lage zweier Geraden im Raum gibt es vier typische Fälle:





Welcher Fall vorliegt, kann man anhand der Geradengleichungen entscheiden. Zuerst schaut man auf die Richtungsvektoren.

$$g\colon \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u} \qquad h\colon \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$$

Parallel

Sind die Richtungsvektoren kollinear, dann sind die Geraden parallel oder sogar identisch. Liegt G auf h (beziehungsweise H auf g), so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

Man kann auch den Verbindungsvektor $\overrightarrow{GH}$ der Aufpunkte berechnen und mit den Richtungsvektoren der Geraden vergleichen. Ist er dazu kollinear, so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

Nicht parallel

Sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, dann schneiden sich die Geraden oder sie sind windschief. Für den Schnittpunkt S gilt

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{S} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$$

also $\quad \overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$, »Gleichsetzen der Geraden«

λ_s und μ_s sind die Lösungen des 3,2-Gleichungssystems

$$\overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{v}$$

(den Index s lassen wir einfachheitshalber weg)

Sind g und h windschief, so ergibt sich ein Widerspruch beim Lösen des Gleichungssystems.

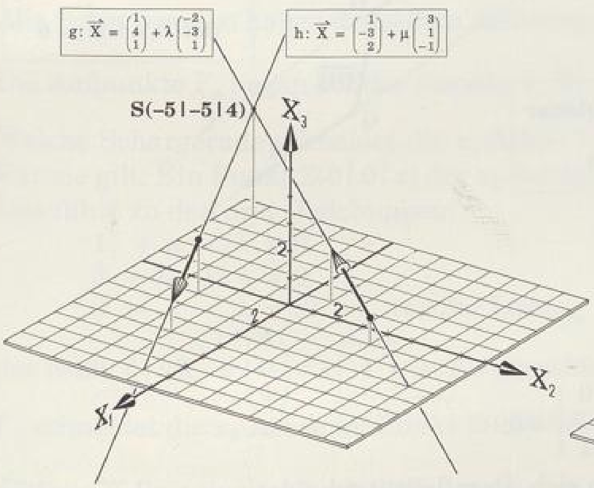
1. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

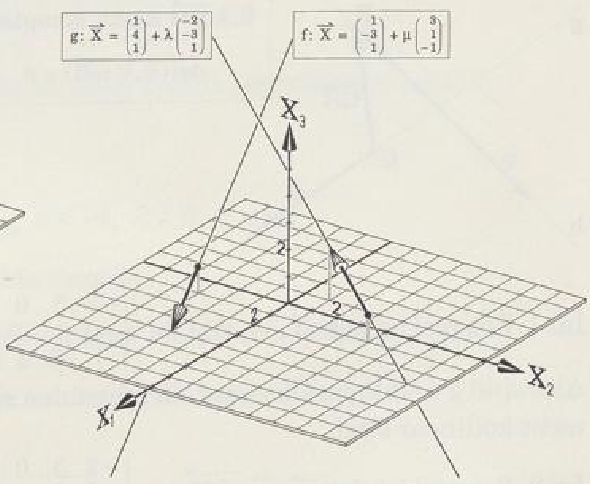
Gleichsetzen

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 1 - 2\lambda = 1 + 3\mu \\ \text{II} & 4 - 3\lambda = -3 + \mu \\ \text{III} & 1 + \lambda = 2 - \mu \end{array}$$

und Auflösen ergibt $\lambda = 3$, $\mu = -2$.

S berechnet man, indem man λ in die Gleichung für g oder μ in die Gleichung für h einsetzt: $S(-5 \mid -5 \mid 4)$





2. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

Gleichsetzen
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 - 2\lambda = 1 + 3\mu \\ \text{II} & 4 - 3\lambda = -3 + \mu \\ \text{III} & 1 + \lambda = 1 - \mu \end{array}$$

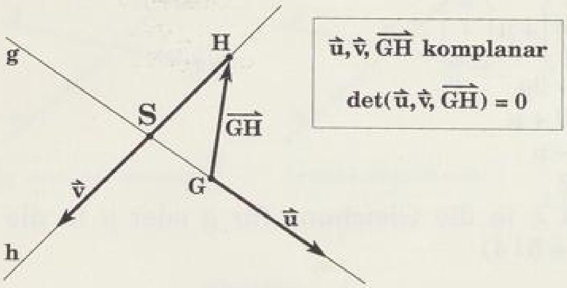
und Auflösen ergibt einen Widerspruch. Das System hat keine Lösung, das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt S: Die Geraden sind windschief.

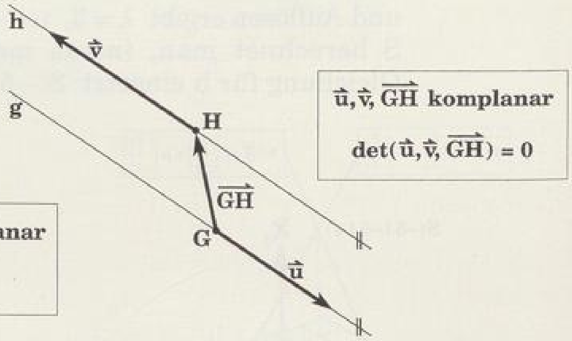
Falls man das Verfahren »Gleichsetzen der Geraden« auf parallele Geraden anwendet, ergibt sich beim Lösen des Gleichungssystems auch ein Widerspruch. Wendet man es auf identische Geraden an, so ergeben sich ∞^1 Lösungen.

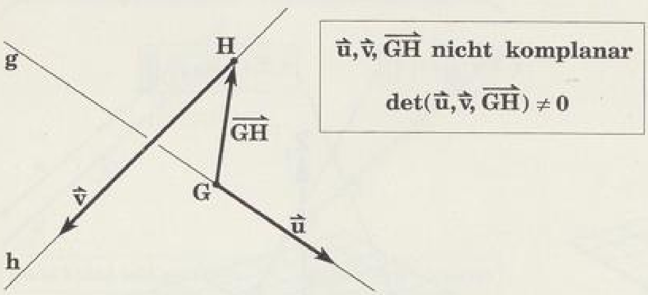
Determinanten-Verfahren

Zwei Geraden sind genau dann windschief, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Gleichbedeutend damit ist, daß ihre Richtungsvektoren und der Aufpunkt-Verbindungsvektor nicht komplanar sind. Darüber gibt die Determinante schnell Auskunft:

g und h sind windschief	$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) \neq 0$
g und h schneiden sich g und h sind echt parallel g und h sind identisch	$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = 0$







Im 1. Beispiel ist $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Also sind g und h parallel oder sie schneiden sich. Parallelität scheidet aus, weil $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ nicht kollinear sind.

Im 2. Beispiel ist $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. g und h sind windschief!