Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

Geradenscharen

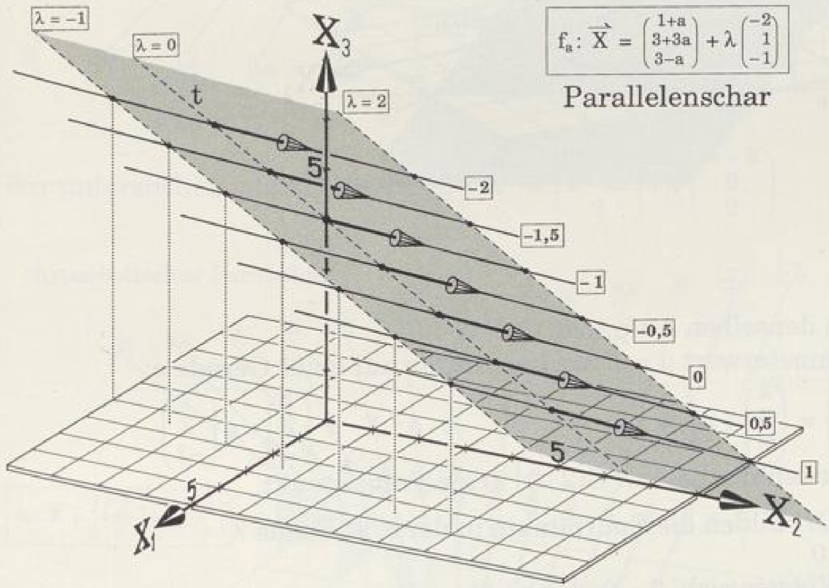
urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

Geradenscharen

Kommt in einer Geradengleichung außer dem Geradenparameter (zum Beispiel λ) noch ein Parameter (zum Beispiel a) vor, dann beschreibt die Gleichung eine Geradenschar. Zu jedem **Scharparameter a** gehört eine Gerade der Schar. Man kann nun bei einer Schar Wünsche äußern, sich zum Beispiel Geraden mit bestimmten Eigenschaften herauspicken oder den Ort von Punkten mit bestimmten Eigenschaften bestimmen. Wir behandeln die einfachen Fälle: a tritt nur linear auf.

- Scharparameter nur im Aufpunkt

$$f_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$f_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Parallelenschar

Alle Schargeraden haben denselben Richtungsvektor: f_a ist eine Parallelenschar.

Die Aufpunkte F_a liegen auf der Gerade: $t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Schargerade schneidet die x_3-Achse ?
Für sie gilt: Ein Punkt $Z(0 \mid 0 \mid z)$ der x_3-Achse ist auch Punkt einer Schargerade f_a.
Das führt zu den drei Gleichungen:

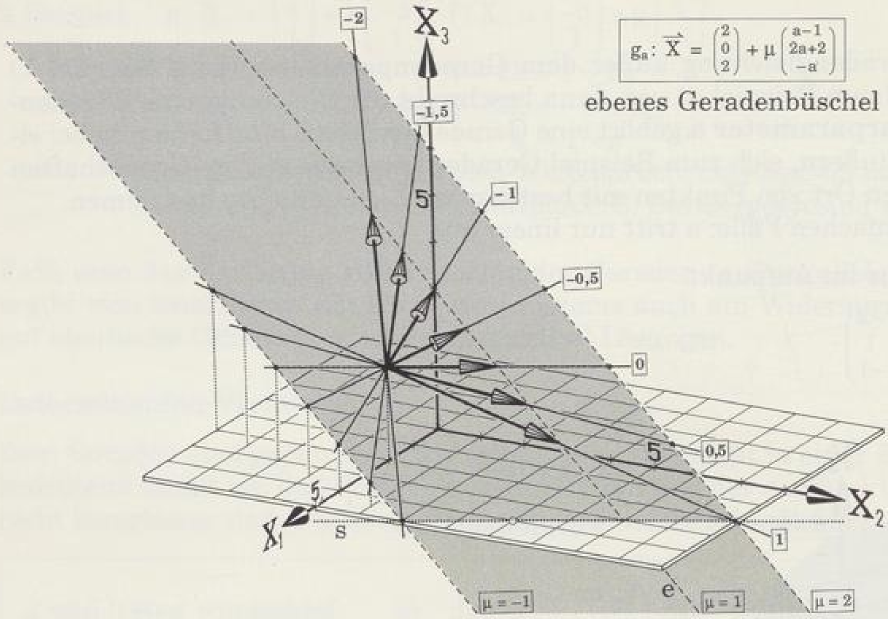
$$\begin{aligned} 1 + a - 2\lambda &= 0 \\ 3 + 3a + \lambda &= 0 \\ 3 - a - \lambda &= z \end{aligned} \qquad \text{mit der Lösung } a = -1,\ \lambda = 0,\ z = 4,$$

das heißt $f_{-1} : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die gesuchte Gerade,

f_{-1} schneidet die x_3-Achse im Punkt $Z(0 \mid 0 \mid 4)$ mit dem Parameterwert $\lambda = 0$.

- Scharparameter nur im Richtungsvektor

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$$



Alle Schargeraden haben denselben Aufpunkt G(2 | 0 | 2).
Die Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 1$ gehören, liegen auf einer Gerade e:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

g_a ist also ein ebenes Geradenbüschel mit G(2 | 0 | 2) als Trägerpunkt.

Welchen geometrischen Ort bilden die Spurpunkte in der x_1x_2-Ebene ?
Aus $x_3 = 0$ folgt $2 - \mu a = 0$

a = 0: es ergibt sich der Widerspruch $2 = 0$, das heißt,
g_0 hat keinen Spurpunkt in der x_1x_2-Ebene,
g_0 ist also echt parallel zur x_1x_2-Ebene.

$a \neq 0$: $\mu = \frac{2}{a}$ eingesetzt in g_a liefert den geometrischen Ort der

Spurpunkte $\overrightarrow{S_{3_a}} = \begin{pmatrix}4-2/a\\4+4/a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$, $a \neq 0$

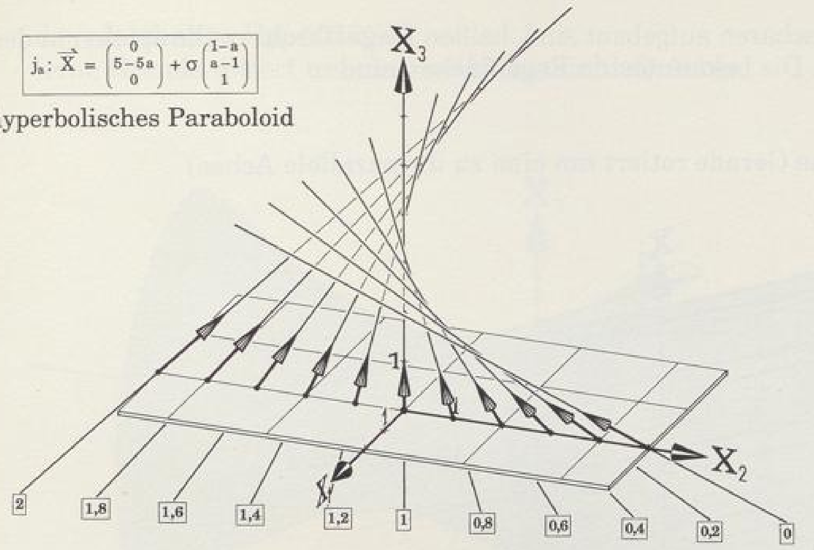
Der geometrische Ort ist die »Gerade« s mit der Gleichung

$s: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ohne den Aufpunkt (4 | 4 | 0), weil $\alpha = \frac{1}{a}$ nicht null sein kann.

- Scharparameter im Aufpunkt und im Richtungsvektor

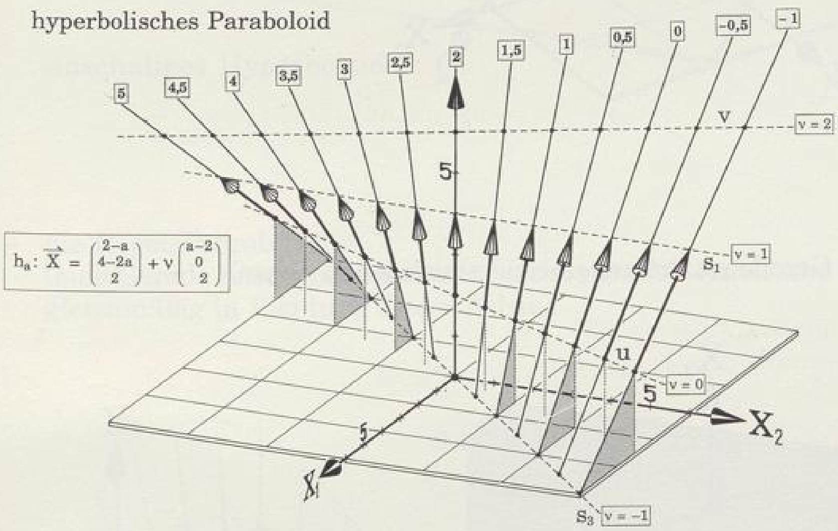
Auch solche Scharen bilden meist eine Fläche im Raum. Sie sind allerdings nicht mehr eben, sondern wie ein Sattel in zwei Richtungen gekrümmt, zum Beispiel die Schar j_a (siehe Bild, Aufgabe **23.**). Die Mathematiker haben solchen Flächen den exotischen Namen *hyperbolisches Paraboloid* gegeben.

hyperbolisches Paraboloid



Wir untersuchen jetzt die Schar $h_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

hyperbolisches Paraboloid



Alle Schargeraden h_a sind parallel zur x_1x_3-Ebene, denn bei allen Richtungsvektoren ist die 2. Koordinate gleich null (graue Steigungsdreiecke im Bild!). Das Bild erweckt den Eindruck, als ob die Punkte mit gleichem Parameterwert v auf anderen Geraden lägen, die selber wieder eine Schar bildeten. Um diese zu finden, halten wir v als Scharparameter fest und lassen a als Geradenparameter laufen. Wir nehmen den allgemeinen Geradenpunkt und sortieren um

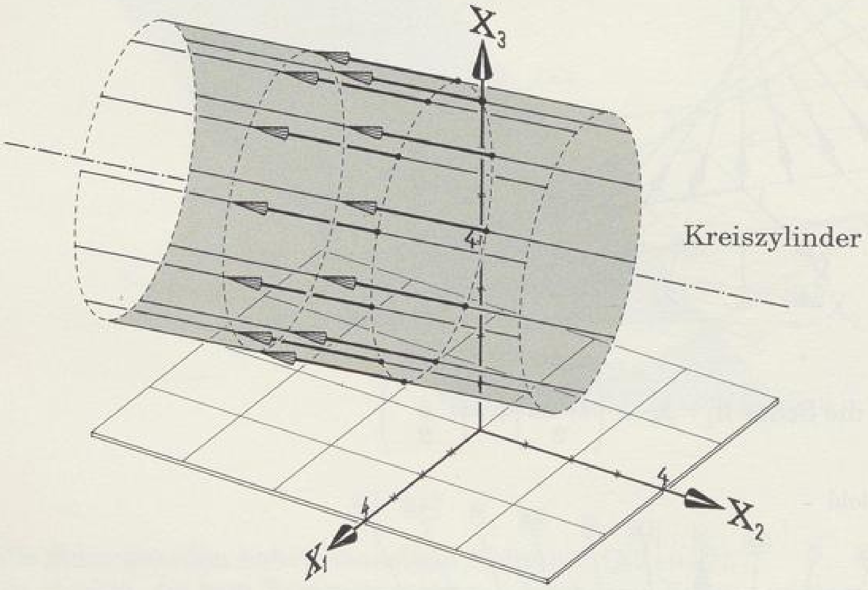
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a+av-2v \\ 4-2a \\ 2+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2v \\ 4 \\ 2+2v \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} v-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen die Schar $q_v : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2-2v \\ 4 \\ 2+2v \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} v-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

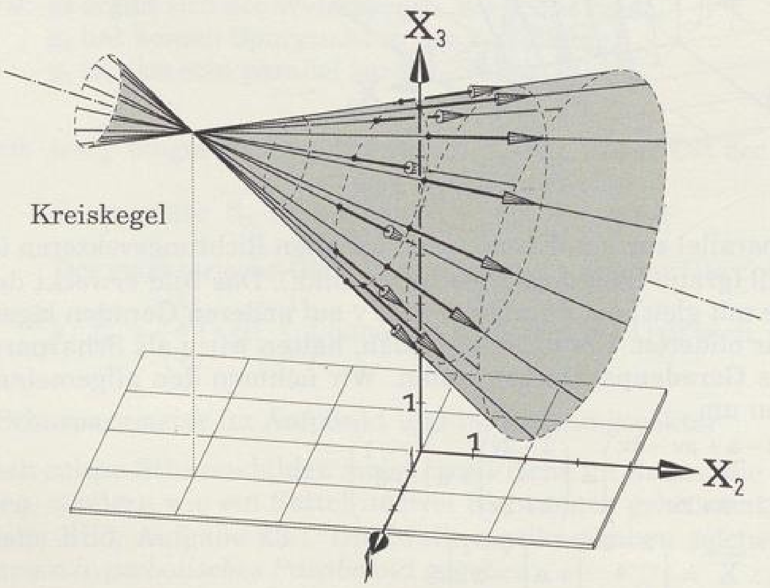
Flächen, die aus Geradenscharen aufgebaut sind, heißen **Regelflächen**. Sie spielen in der Technik eine große Rolle. Die bekanntesten Regelflächen sind

– die Ebene

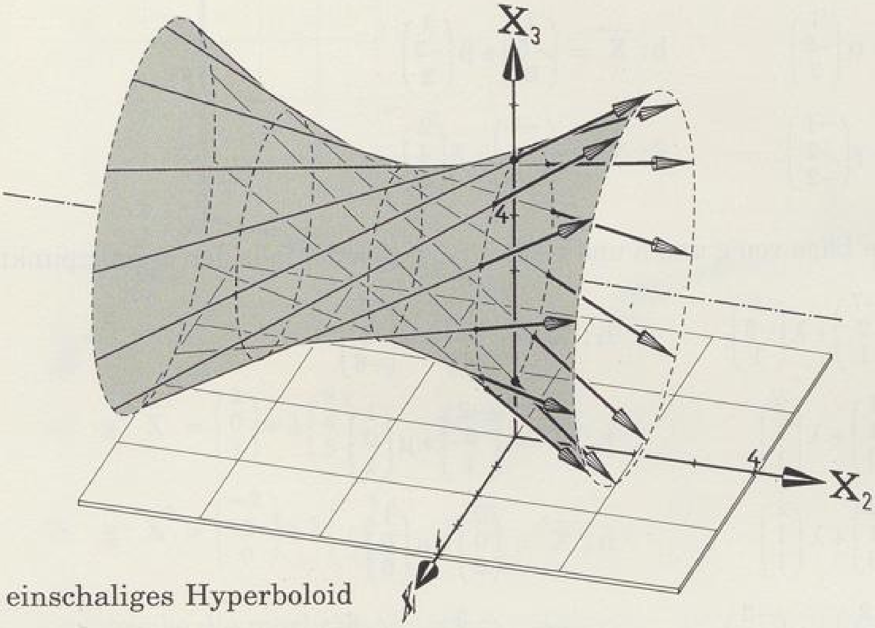
– der Kreiszylinder (eine Gerade rotiert um eine zu ihr parallele Achse)



– der Kreiskegel (eine Gerade rotiert um eine sie schneidende Achse)

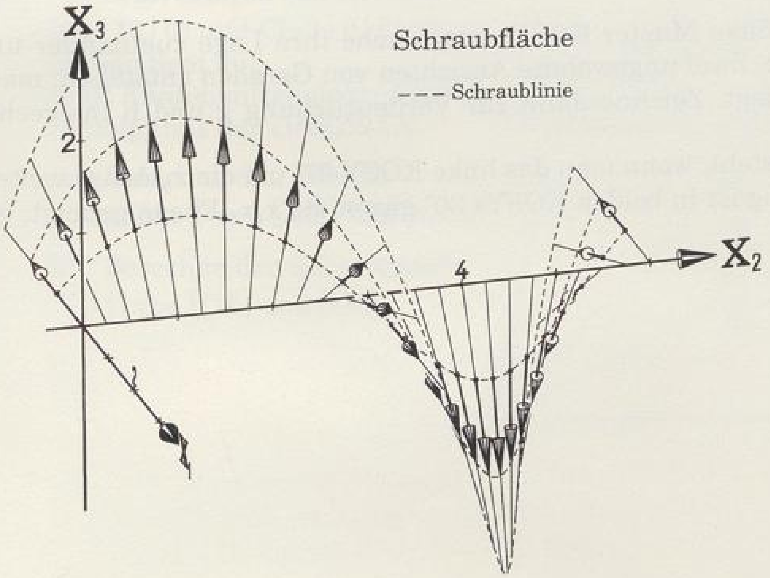


– das einschalige Hyperboloid
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr windschiefe Achse)



einschaliges Hyperboloid

– die Regelschraubfläche
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr nicht parallele Achse und verschiebt sich dabei gleichmäßig in Richtung dieser Achse).



Aufgaben

$\boxed{1.}$ $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Welche Lage hat g zu

$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ Untersuche die Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

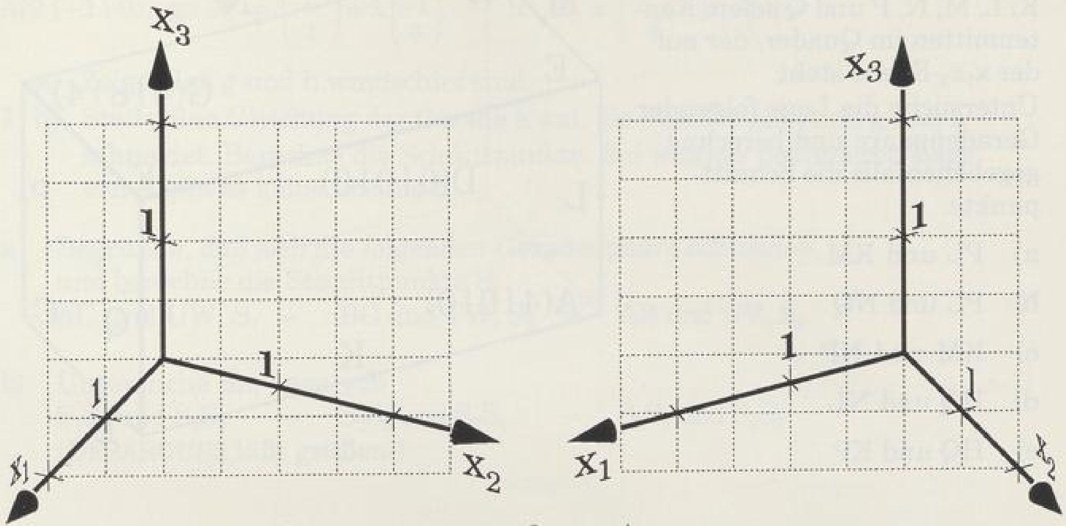
c) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\boxed{3.}$ $A(-5\,|\,4\,|\,-2)$, $B(6\,|\,-3\,|\,4)$, $C(10\,|\,-6\,|\,18)$, $D(0\,|\,0\,|\,22)$. Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, daß ABCD ein ebenes Viereck ist.

4. Zeichne g und h ins linke Muster-KOSY, untersuche ihre Lage zueinander und ihre Lage zur x_3-Achse. Zwei ungewohnte Ansichten von Geraden entstehen; mach dir klar, woran das liegt. Zeichne dann zur Verdeutlichung g und h ins rechte KOSY.
(Das rechte KOSY entsteht, wenn man das linke KOSY 37° um die x_3-Achse weiterdreht, die Blickrichtung ist in beiden KOSYs 30° gegen die x_1x_2-Ebene geneigt, geneigter Leser!)



a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\4\\5\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$

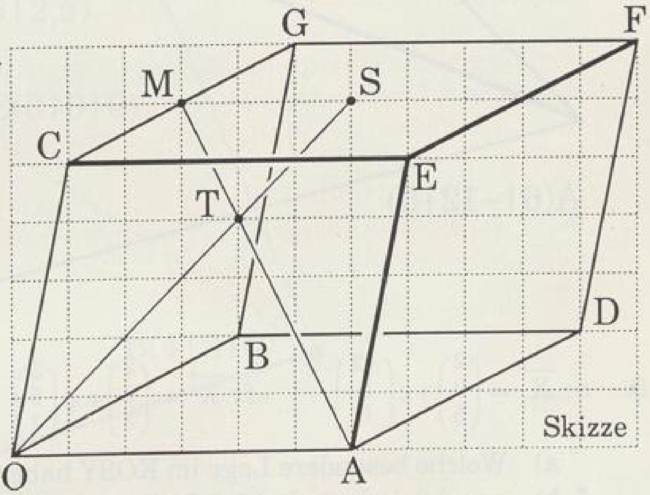
b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

5. Beschreibe die möglichen Lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:

6. Die Ortsvektoren von A(6 | 0 | 3), B(6 | 12 | 0) und C(–3 | 0 | 6) spannen ein Spat auf.
M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Berechne den Schnittpunkt T von [AM] und [OS].

b) Berechne den Schnittpunkt U von [CT] und [OD].



7. K, L, M, N, P und Q seien Kantenmitten im Quader, der auf der x_1x_2-Ebene steht. Untersuche die Lage folgender Geradenpaare und berechne gegebenenfalls die Schnittpunkte.

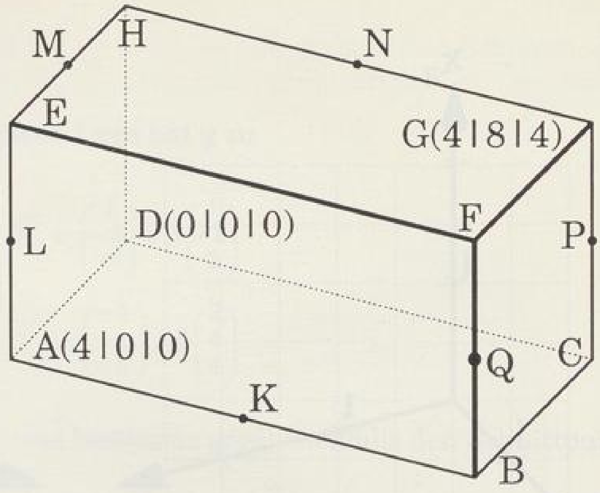
a) PL und KM

b) PL und NQ

c) KM und NP

d) HQ und NL

e) HQ und KP

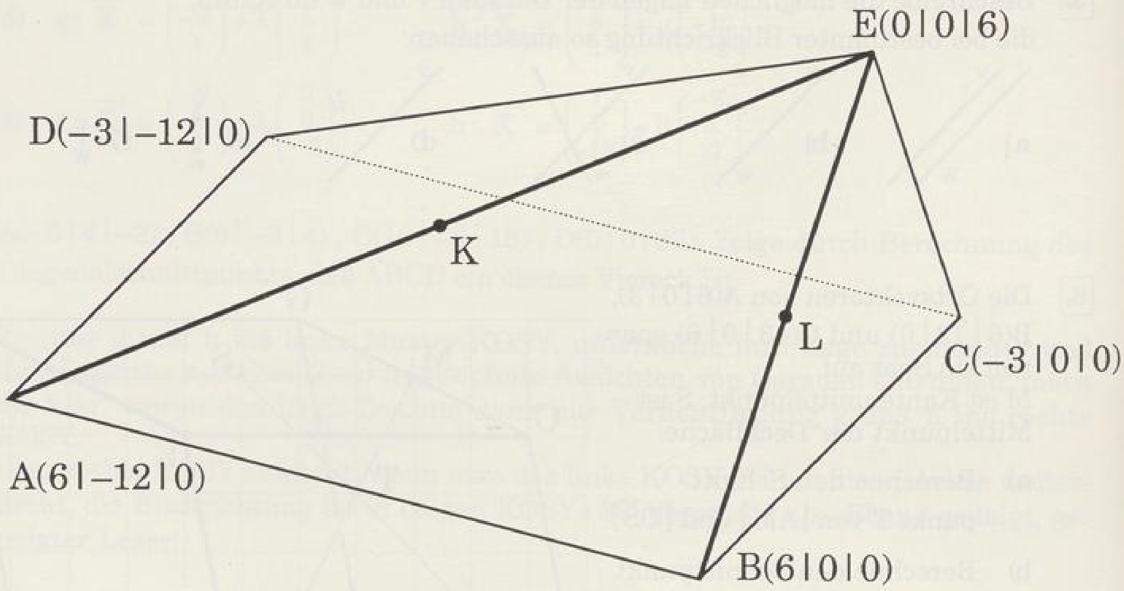


8. K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide ABCDE.

a) Zeige, daß sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.

b) Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T ?

c) Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U ?



9. e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ g: $\overrightarrow{X} = \gamma \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Welche besondere Lage im KOSY haben e und g ?

: b) e und f sind windschief. Stelle eine Gleichung der Gerade h auf, die parallel zu g ist und e und f schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von g gibt es keine Lösung ?

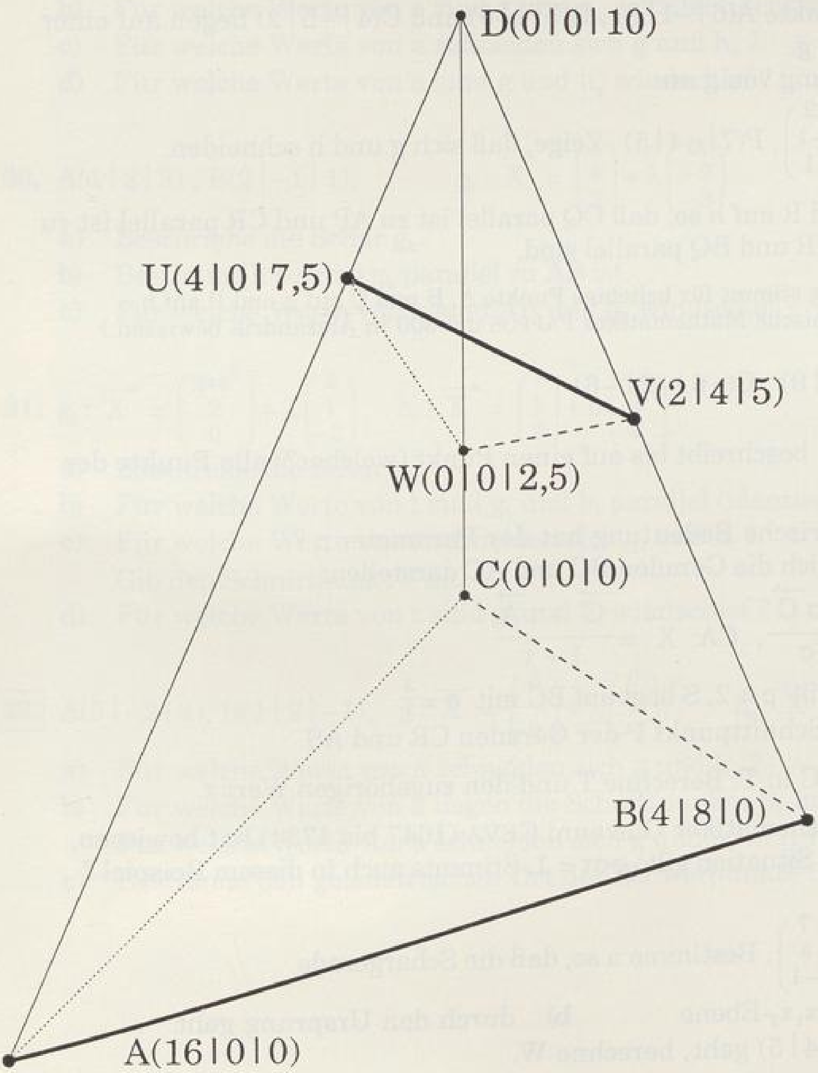
10. A(2 | −1 | 0), $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Zeige, daß g und h windschief sind.

: b) Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von A gibt es keine Lösung?

11. a) Begründe, daß sich die folgenden Geradenpaare schneiden, und berechne die Schnittpunkte S_i:
AC und UW, S_1 – BC und VW, S_2 – AB und UV, S_3

b) Untersuche die Lage von
S_1S_2 und S_2S_3 – S_2S_3 und S_3S_1 – S_3S_1 und S_1S_2
(DESARGUES läßt grüßen!)



12. A(1 | −3 | 3), B(3 | 1 | −3), C(1 | −1 | 3) und D(1 | 3 | 3) bilden ein Tetraeder.
Zeige durch Rechnung: Die Strecken, die die Mitten zweier windschiefer Kanten verbinden, schneiden sich alle in einem Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt S diese Verbindungsstrecken?
(Diese Eigenschaften hat jedes Tetraeder!)

• **13.** $a: \vec{X} = \begin{pmatrix}11\\17\\-9\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-7\\-4\\3\end{pmatrix}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix}31\\7\\-9\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}$

a) Untersuche die Lage von a und b.

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von a und b.

c) a' entsteht, wenn a eine Halbdrehung um b macht.
Bestimme eine Gleichung von a'.

d) b' entsteht, wenn man b an a spiegelt.
Bestimme eine Gleichung von b'.

• **14. a)** Zeige: Die Punkte A(6 | −1 | 6), B(7 | 1 | 8) und C(4 | −5 | 2) liegen auf einer Gerade g.
Gib eine Gleichung von g an.

b) $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, P(7 | −4 | 5). Zeige, daß sich g und h schneiden.

c) Bestimme Q und R auf h so, daß CQ parallel ist zu AP und CR parallel ist zu BP. Zeige, daß AR und BQ parallel sind.

(Diese Behauptung stimmt für beliebige Punkte A, B und C auf g und P auf h. Das hat der griechische Mathematiker PAPPOS um 300 in Alexandria bewiesen.)

• **15.** A(6 | −2 | 0), B(6 | 4 | 9), C(−6 | −2 | −6)

a) $\vec{X} = \dfrac{\vec{A} + \rho\vec{B}}{1+\rho}$ beschreibt bis auf einen Punkt (welcher?) alle Punkte der Gerade AB.
Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter ρ?
Ebenso lassen sich die Geraden BC und AC darstellen:
BC: $\vec{X} = \dfrac{\vec{B} + \sigma\vec{C}}{1+\sigma}$, CA: $\vec{X} = \dfrac{\vec{C} + \tau\vec{A}}{1+\tau}$

b) R liegt auf AB mit $\rho = 2$, S liegt auf BC mit $\sigma = \frac{3}{2}$.
Bestimme den Schnittpunkt P der Geraden CR und AS.

c) BP schneidet AC in T. Berechne T und den zugehörigen Wert τ.

Der italienische Mathematiker Giovanni CEVA (1647 bis 1734) hat bewiesen, daß in einer solchen Situation gilt: $\rho\sigma\tau = 1$. Stimmts auch in diesem Beispiel?

$\boxed{\textbf{16.}}$ $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix}-14\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}7\\a\\-1\end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

a) parallel ist zur x_1x_3-Ebene **b)** durch den Ursprung geht

c) durch W(w_1 | −4 | 5) geht, berechne W.

17. $h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}16\\4\\11\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4a\\4\\13-6a\end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

a) parallel ist zur x_1x_2-Ebene **b)** die x_2x_3-Ebene nicht schneidet

c) durch den Ursprung geht

d) die x_3-Achse schneidet, berechne den Schnittpunkt.

18. $A(a\,|\,-2\,|\,3)$ und $B(a+4\,|\,0\,|\,5)$ legen die Schar k_a fest. Welche Schargeraden schneiden die Koordinatenachsen ? Berechne die Schnittpunkte.

*Für die Aufgaben **19.** bis **22.** empfiehlt sich das Determinantenverfahren.*

$\boxed{\textbf{19.}}$ $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2a\\-a\end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar h_a.

b) Für welche Werte von a sind g und h_a parallel (identisch) ?

c) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a ?

d) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief ?

20. $A(1\,|\,2\,|\,2)$, $B(2\,|\,-1\,|\,1)$ $\quad g_k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2k\\-9\\-3\end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar g_k.

b) Bestimme k so, daß g_k parallel zu AB ist.

c) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief ?

21. $g_t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2+t^2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad h_t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\t\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\t\\2\end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar g_t.

b) Für welche Werte von t sind g_t und h_t parallel (identisch) ?

c) Für welche Werte von t schneiden sich g_t und h_t ?
Gib den Schnittpunkt S an.

d) Für welche Werte von t sind g_t und h_t windschief ?

$\boxed{\textbf{22.}}$ $A(3\,|\,-2\,|\,2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-1)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2-a\\1+a\end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a ?

b) Für welche Werte von a liegen die Schnittpunkte S_a im IV.Oktanten ?
Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a in A ?

c) Bestimme den geometrischen Ort der Schwerpunkte der Dreiecke ABS_a.

• 23. $j_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Welche Schargerade geht durch $P(-45 \mid 0 \mid 5)$?

b) Welche Schargeraden sind parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

c) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 2$ gehören.

d) Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der x_1x_3-Ebene.

e) Zeige, daß je zwei Schargeraden windschief sind.

• 24. $k_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5a \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1+a \\ 2-3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, auf denen die Punkte mit jeweils gleichem Parameterwert τ liegen.

: 25. $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die g und h treffen und zur x_1x_3-Ebene parallel sind.

:: 26. $a: \overrightarrow{X} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die a, b und c schneiden.