Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

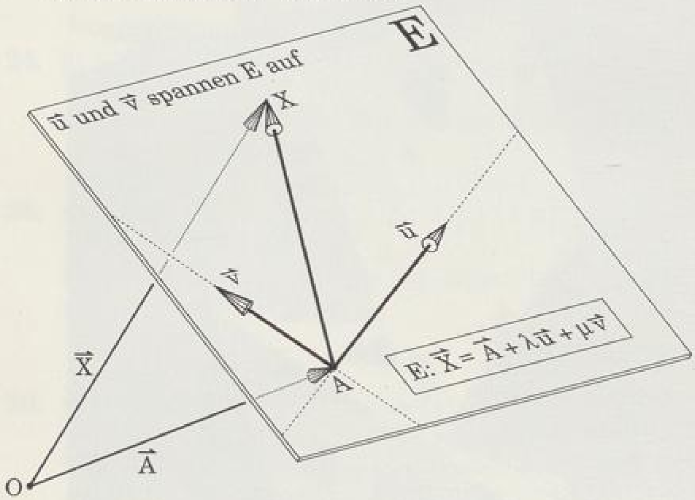
1. Ebenengleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

1. Ebenengleichungen

Eine Ebene im Raum ist eindeutig bestimmt durch

- drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt
- zwei echt parallele Geraden
- zwei sich schneidende Geraden
- einen Punkt und zwei verschiedenene Richtungen (nicht kollineare Vektoren)



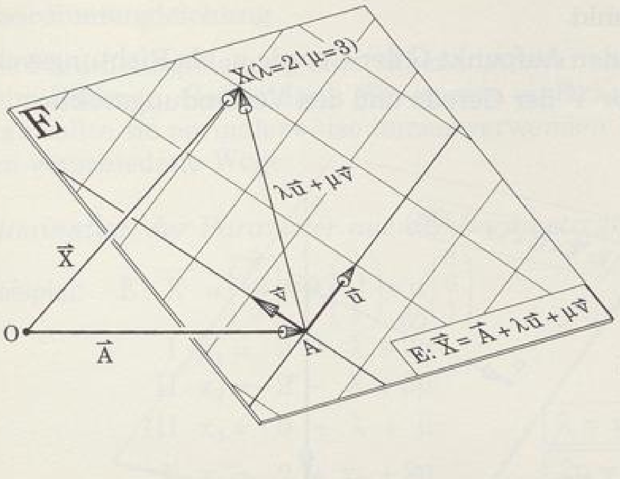
Eine Gleichung einer Ebene beschreibt die Ortsvektoren $\vec{X}$ aller Ebenenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch einen Punkt und zwei Richtungen am besten. Man wählt einen Punkt A der Ebene E als **Aufpunkt** und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als **Richtungsvektoren**, die parallel zur Ebene liegen. Der Ortsvektor $\vec{X}$ eines beliebigen Ebenenpunkts läßt sich dann darstellen als Summe von $\vec{A}$ und einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. λ, μ heißen **Parameter** des Punkts X. Die Gleichung heißt **Parametergleichung** oder Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene.

Jeder Punkt der Ebene ist eindeutig durch das Parameterpaar $(\lambda|\mu)$ festgelegt. $\vec{A}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bestimmen in der Ebene also ein (meist) schiefwinkliges Koordinatensystem mit A als Ursprung und $(\lambda|\mu)$ als Punktkoordinaten.

Zusammenfassung

Ist A irgendein Punkt der Ebene E und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei zu E parallele, nicht kollineare Vektoren, dann nennt man $\mathbf{E:}\ \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{A}} + \lambda\vec{\mathbf{u}} + \mu\vec{\mathbf{v}}$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
eine Parametergleichung von E.
A heißt Aufpunkt, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Richtungsvektoren,
λ und μ heißen Parameter der Ebenengleichung.

Die Bedingung $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel: $\quad E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

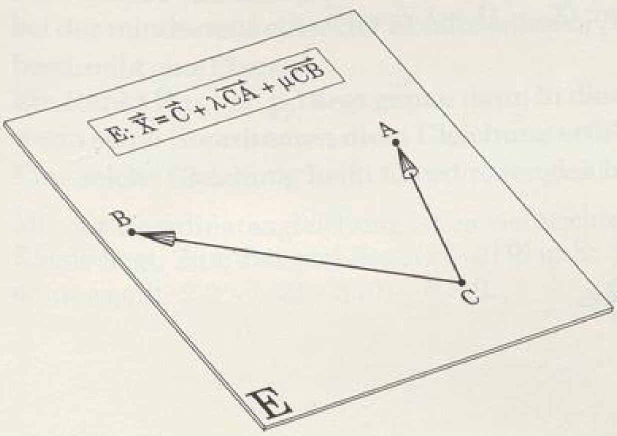
zu $\lambda = -1$, $\mu = 2$ gehört $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P(5|7|2)$ liegt in E.

Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektoren gibt es für eine Ebene (wie bei einer Gerade) verschiedene Parametergleichungen. Bei zwei Parametergleichungen, die ein und dieselbe Ebene beschreiben, müssen die Richtungsvektoren komplanar sein. Komplanarität sieht man gewöhnlich nicht auf den ersten Blick: Bei Ebenen erkennt man Parallelität oder Identität erst nach Rechnung (im Gegensatz zur Gerade). Die Ebene E (oben) kann zum Beispiel auch die Gleichung haben

$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, es gilt nämlich: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

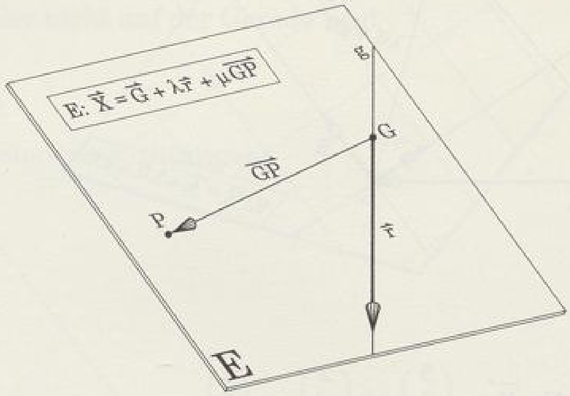
Ebene durch drei Punkte

Als Aufpunkt wählt man einen der drei Punkte. Als Richtungsvektoren wählt man zwei linear unabhängige der 6 möglichen Verbindungsvektoren,
zum Beispiel: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C} + \lambda\,\overrightarrow{CA} + \mu\,\overrightarrow{CB}$.



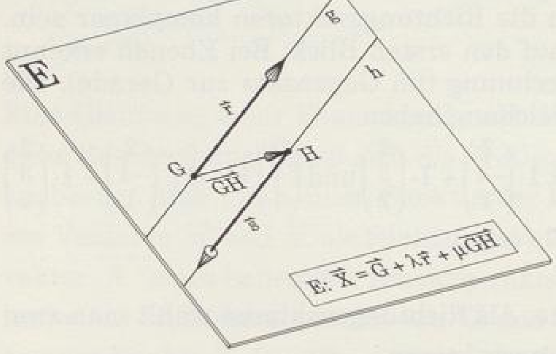
Ebene durch eine Gerade und einen Punkt

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{GP}$: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{r} + \mu\,\overrightarrow{GP}$.



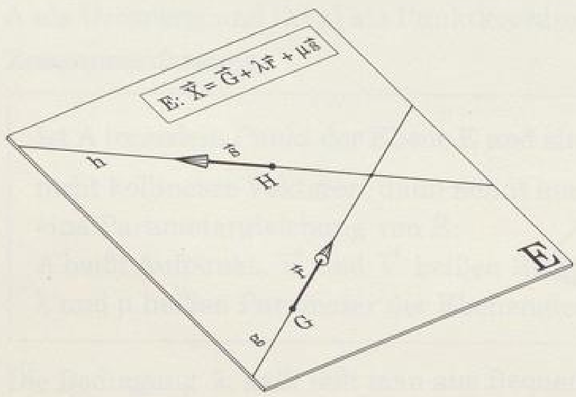
Ebene durch zwei Parallelen

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade g und den Vektor $\overrightarrow{GH}$, der die Aufpunkte der Geraden g und h verbindet: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{r} + \mu\,\overrightarrow{GH}$.



Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren am besten gleich die der Geraden: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$.



Koordinatengleichung

Die Parametergleichung einer Ebene ist zwar recht anschaulich, aber sehr unhandlich beim Rechnen. Gottseidank gibt es eine einfachere Beschreibung mit einer Gleichung, man sollte sie normalerweise immer verwenden: die Koordinatengleichung. Zu ihr führen verschiedene Wege:

Elimination der Parameter aus der Parametergleichung

Beispiel: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rl} \text{I} & x_1 = 2 + \lambda + 3\mu \\ \text{II} & x_2 = -2 - \lambda + 3\mu \\ \text{III} & x_3 = 0 + \lambda + \mu \qquad \boxed{\lambda = x_3 - \mu} \\ \text{I'} & x_1 = 2 + x_3 + 2\mu \qquad \boxed{2\mu = x_1 - 2 - x_3} \\ \text{II'} & x_2 = -2 - x_3 + 4\mu \\ \text{II''} & x_2 = -6 - 3x_3 + 2x_1 \end{array}$$

II'' ist die Beziehung zwischen den Koordinaten des allgemeinen Ebenenpunkts $X(x_1 | x_2 | x_3)$. Wir ordnen um und bekommen die Koordinatengleichung: E: $2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$

Man kann zeigen, daß jede solche lineare Koordinatengleichung (bei der nicht alle Koeffizienten zugleich null sind) eine Ebene beschreibt. Zum Beweis braucht man nur zwei der Koordinaten als freie Parameter zu nehmen. Wir führen es an unserm Beispiel vor:

$$\begin{array}{ll} E: & 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0, \\ & x_1 = \sigma, \\ & x_3 = \tau, \\ & x_2 = -6 + 2\sigma - 3\tau \quad \text{oder vektoriell geschrieben:} \end{array}$$

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ -6 + 2\sigma - 3\tau \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das ist eine der unendlich vielen Parametergleichungen von E.

Satz

Jede lineare Gleichung der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$,
bei der mindestens einer der Koeffizienten n_1, n_2, n_3 ungleich null ist,
beschreibt eine Ebene.
Ein Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ liegt genau dann in dieser Ebene,
wenn seine Koordinaten diese Gleichung erfüllen: $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_0 = 0$.
Eine solche Gleichung heißt Koordinatengleichung der Ebene.

Mit der Koordinatengleichung ist es viel leichter zu entscheiden, ob ein Punkt in einer Ebene liegt. Zum Beispiel liegt $(2 | -2 | 0)$ in E: $2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$, denn es gilt $2 \cdot 2 - (-2) - 3 \cdot (0) - 6 = 0$.

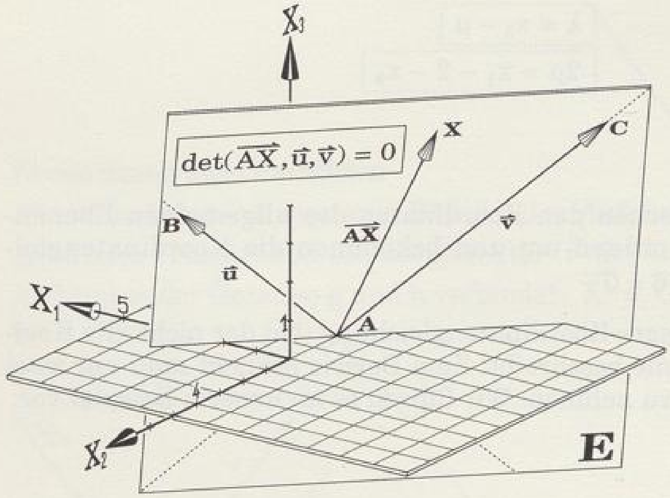
Multipliziert man eine Koordinatengleichung mit einer Zahl ($\neq 0$), so ändert sich die Lösungsmenge nicht, die beiden Gleichungen beschreiben dieselbe Ebene. Man vereinfacht eine Koordinatengleichung so, daß die Koeffizienten teilerfremde, ganze Zahlen sind,

Beispiel: E: $6x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \;\|\; :3$ F: $-\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 - 3x_3 + 9 = 0 \;\|\; \cdot(-\frac{4}{3})$

E: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ F: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ (E = F !)

**Determinantenmethode*

Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ komplanar sind, das heißt $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Rechnet man diese Determinante aus, dann steht die Koordinatengleichung da.



Beispiel (von oben): $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AX} = \vec{X} - \vec{A} = \begin{pmatrix}x_1-2\\x_2+2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1-2 & 1 & 3 \\ x_2+2 & -1 & 3 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1-2)\cdot(-4) - (x_2+2)\cdot(-2) + x_3\cdot 6 = 0$$
$$-4x_1 + 8 + 2x_2 + 4 + 6x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 12 = 0 \;\|\; :(-2) \qquad E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

Sind von einer Ebene drei Punkte bekannt, so findet man die Koordinatengleichung direkt mit der Determinantenmethode (ohne Umweg über die Parametergleichung),

Beispiel: A(0 | −2 | 0) , B(2 | 2 | 4) , C(−6 | −5 | 6)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix}x_1\\x_2+2\\x_3\end{matrix}}_{\overrightarrow{AX}} & \begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix} & \begin{matrix}2\\1\\-2\end{matrix} \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1)\cdot(-6) - (x_2+2)\cdot(-6) + x_3\cdot(-3) = 0$$
$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4 = 0$$

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, den einen oder andern Punkt einzusetzen.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die den Punkt P(–2 | 1 | 7) enthält und von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$\boxed{2.}$ Gib die Punkte A, B, C und D an, die in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegen und die Parameterwerte haben
$A(\lambda = 0 \mid \mu = 0)$, $B(\lambda = 0 \mid \mu = 1)$, $C(\lambda = 1 \mid \mu = 0)$, $D(\lambda = 1 \mid \mu = 1)$.

$\boxed{3.}$ Untersuche, ob die Punkte A(1 | 4 | 6), B(5 | –7 | 0) und C(14 | 2 | 7) in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen, und nenne gegebenenfalls die zugehörigen Parameterwerte. Zeichnung im Koordinatensystem!

$\boxed{4.}$ Stelle eine Parametergleichung der Ebene E(ABC) auf mit den Punkten
a) A(2 | 1 | 3), B(–1 | 0 | 5), C(2 | –7 | 3)
b) A(2 | 1 | –3), B(7 | –1 | 5), C(–3 | 3 | –11) (!)

5. Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch
a) U(1 | 0 | –1), V(0 | 0 | 0), W(–2 | –4 | 1)
b) P(1 | 2 | –1), g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
d) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, k: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$, f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$
Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, die g enthält und parallel ist zu f.

7. A(7 | –1 | 5), a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, b: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die A enthält und parallel ist zu a und b.

• **8.** Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, wenn gilt: $-\infty < \lambda < +\infty$ und $-1 \leq \mu < 1$?

9. Welche Punktmengen beschreiben die Parametergleichungen ($\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$)

a) $\vec{X} = \vec{P} + \frac{1}{\mu}\vec{u}, \quad \mu \neq 0$ b) $\vec{X} = \frac{\mu}{\mu-1}\vec{u}, \quad \mu \neq 1$

c) $\vec{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda + \mu = 1$ d) $\vec{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda + \mu < 1$

• **10.** $A(3|0|2)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Bestimme eine Parametergleichung der Halbebene H, die den Punkt A enthält und von der Gerade g begrenzt ist? Zeichnung im Koordinatensystem!

11. Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ d) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{X} = \begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-5\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\15\\6\end{pmatrix}$ f) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\0\\7\end{pmatrix}$

12. Prüfe, welche der Punkte $A(1|2|-2)$, $B(0|0|0)$ und $C(2|0|1)$ in der Ebene liegen

a) $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ b) $F: 3x_1 - x_3 = 5$ c) $G: x_2 = 0$

13. Bestimme den Parameter so, daß $P(1|2|-5)$ in der Ebene liegt

a) $E: x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0$ b) $F: ax_1 + x_2 = 0$

c) $G: 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a$

14. Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.

15. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$ b) $P(-1|3|3)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $A(1|1|-4)$, $B(0|2|1)$, $C(-3|-1|-2)$

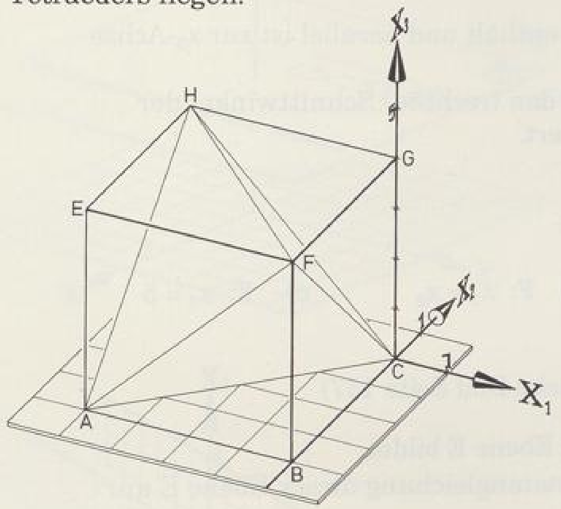
d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

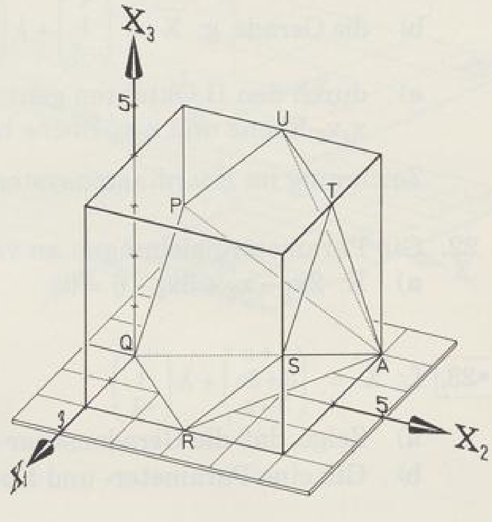
e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $k: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

16. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}14\\-8\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$

Zeige, daß sich g und h schneiden, und gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der g und h liegen.

17. Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Tetraeders liegen.



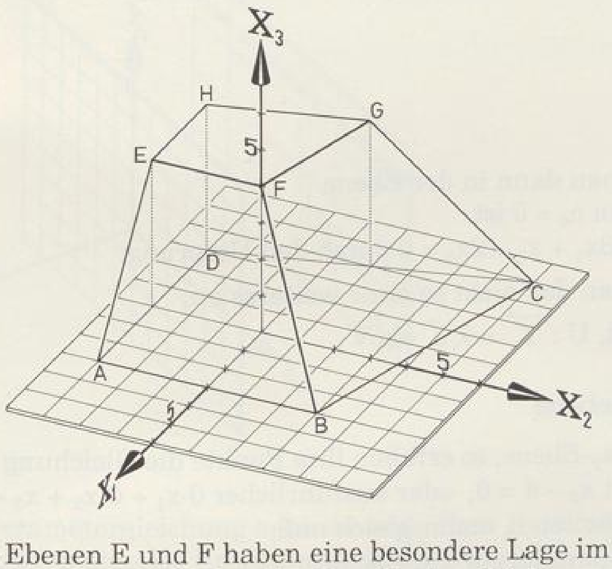


• **18.** In einem Würfel liegt eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Die Ecken ihrer Grundseite P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten des Würfels. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Grundfläche und die Seitenflächen der Pyramide liegen.

• **19.** Die oberen vier Ecken des Sechsflachs liegen gleich weit über der x_1x_2-Ebene.

a) Begründe, daß das Sechsflach ein Pyramidenstumpf ist, und berechne die Pyramidenspitze S.

b) Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Sechsflachs liegen.



20. Die Ebenen E und F haben eine besondere Lage im Koordinatensystem. Beschreibe diese und stelle Koordinatengleichungen der Ebenen auf.

E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, F: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{21.}$ Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die

a) durch $P(1|2|-2)$ geht und parallel ist zur x_1x_3-Ebene

b) die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthält und parallel ist zur x_3-Achse

c) durch den II.Oktanten geht und den (rechten) Schnittwinkel der x_1x_3-Ebene und x_2x_3-Ebene halbiert.

Zeichnung im Koordinatensystem !

22. Gib Parametergleichungen an von:

a) E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ b) F: $x_1 = x_2$ c) F: $x_3 = 5$

$\boxed{\bullet 23.}$ f_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 157)

a) Zeige, daß die Geradenschar eine Ebene E bildet.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene E an.

: 24. g_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 158)

a) Zeige, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.

c) Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor ?

25. j_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 159)

Zeige, daß die Geraden der Schar nicht in einer Ebene liegen.

2. Lage im Koordinatensystem

Ursprungsebene

Der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt genau dann in der Ebene
E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$, wenn $n_0 = 0$ ist.
Zum Beispiel geht die Ebene U: $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ durch den Ursprung.

Der Parametergleichung sieht man das nicht so ohne weiteres an,
außer der Ursprung ist Aufpunkt, U : $\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Parallelität zu einer Koordinatenebene

Liegt E im Abstand 4 über der x_1x_2-Ebene, so erfüllen ihre Punkte die Gleichung $x_3 = 4$.
Ihre Koordinatengleichung lautet $x_3 - 4 = 0$, oder ausführlicher $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 - 4 = 0$.
Allgemein gilt: Sind die Koeffizienten n_i und n_j gleich null,
so ist die Ebene parallel zur x_ix_j-Ebene.