Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Lage im Koordinatensystem

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

21. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die

a) durch $P(1\,|\,2\,|\,-2)$ geht und parallel ist zur x_1x_3-Ebene

b) die Gerade $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthält und parallel ist zur x_3-Achse

c) durch den II.Oktanten geht und den (rechten) Schnittwinkel der x_1x_3-Ebene und x_2x_3-Ebene halbiert.

Zeichnung im Koordinatensystem !

22. Gib Parametergleichungen an von:

a) $E\colon\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ b) $F\colon\ x_1 = x_2$ c) $F\colon\ x_3 = 5$

•23. $f_a\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 157)

a) Zeige, daß die Geradenschar eine Ebene E bildet.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene E an.

:24. $g_a\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 158)

a) Zeige, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.

c) Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor ?

25. $j_a\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 159)

Zeige, daß die Geraden der Schar nicht in einer Ebene liegen.

2. Lage im Koordinatensystem

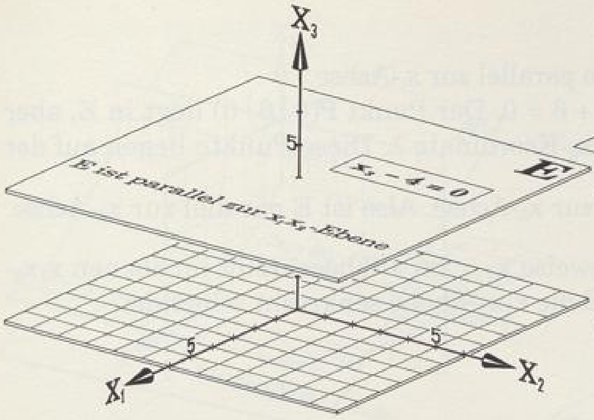
Ursprungsebene

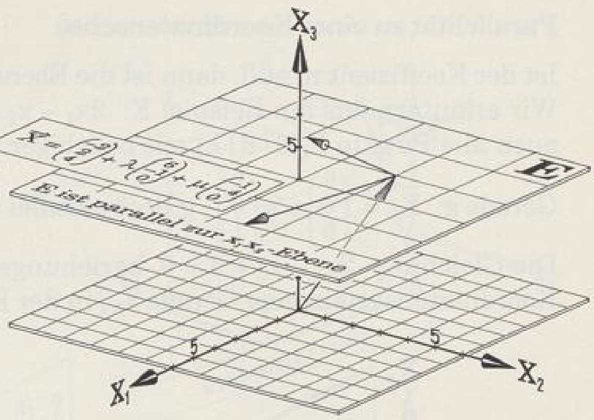
Der Ursprung $O(0\,|\,0\,|\,0)$ liegt genau dann in der Ebene
$E\colon\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$, wenn $n_0 = 0$ ist.
Zum Beispiel geht die Ebene $U\colon\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ durch den Ursprung.

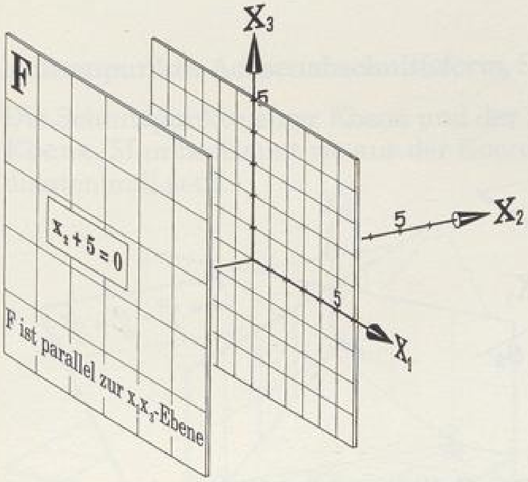
Der Parametergleichung sieht man das nicht so ohne weiteres an,
außer der Ursprung ist Aufpunkt, $U : \overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

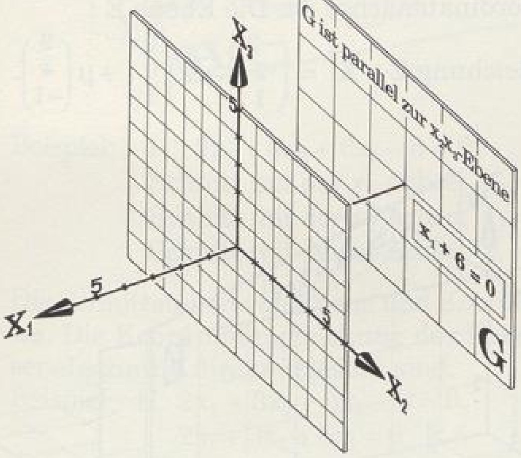
Parallelität zu einer Koordinatenebene

Liegt E im Abstand 4 über der x_1x_2-Ebene, so erfüllen ihre Punkte die Gleichung $x_3 = 4$.
Ihre Koordinatengleichung lautet $x_3 - 4 = 0$, oder ausführlicher $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 - 4 = 0$.
Allgemein gilt: Sind die Koeffizienten n_i und n_j gleich null,
so ist die Ebene parallel zur x_ix_j-Ebene.









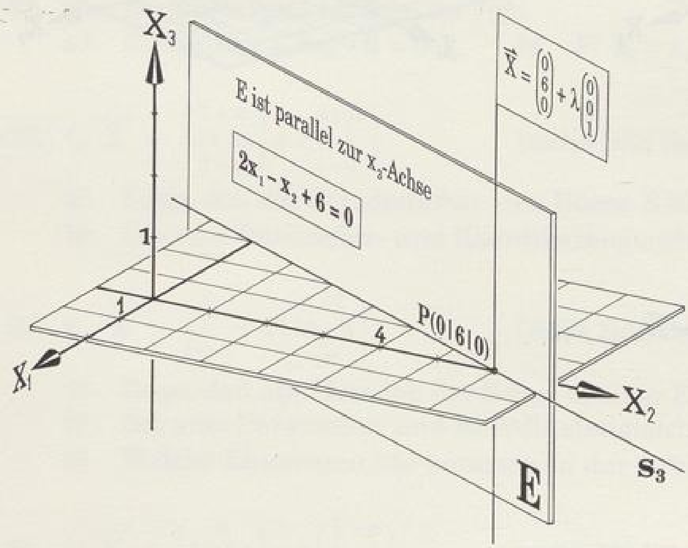
In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität daran, daß in beiden Richtungsvektoren dieselbe Koordinate null ist. Die Ebene E: $x_3 - 4 = 0$ hat zum Beispiel die

Parametergleichung $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Parallelität zu einer Koordinatenachse

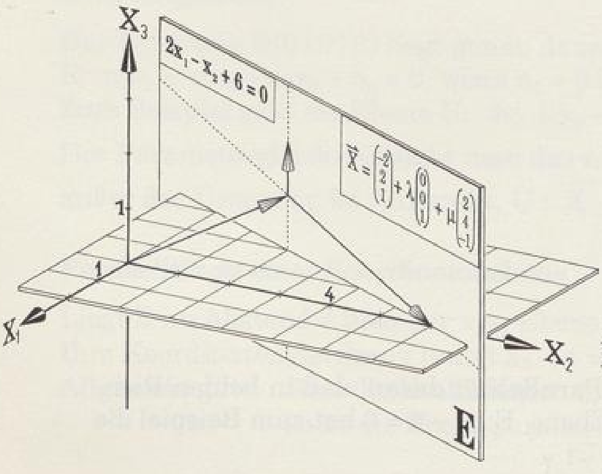
Ist der Koeffizient n_i null, dann ist die Ebene parallel zur x_i-Achse.
Wir erläutern das am Beispiel E: $2x_1 - x_2 + 6 = 0$. Der Punkt $P(0 \mid 6 \mid 0)$ liegt in E, aber auch alle Punkte $P_\lambda(0 \mid 6 \mid \lambda)$ mit beliebiger x_3-Koordinate λ. Diese Punkte liegen auf der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, g liegt parallel zur x_3-Achse. Also ist E parallel zur x_3-Achse.

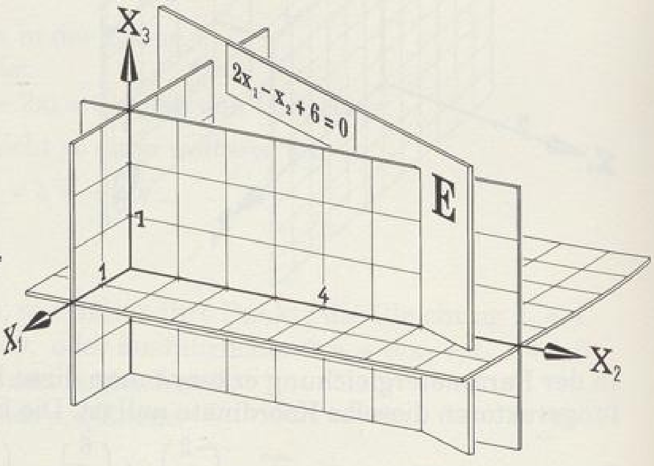
Die Gleichung $2x_1 - x_2 + 6 = 0$ beziehungsweise $x_2 = 2x_1 + 6$ beschreibt im ebenen x_1x_2-Koordinatensystem eine Gerade s_3, in der E die x_1x_2-Ebene senkrecht schneidet.

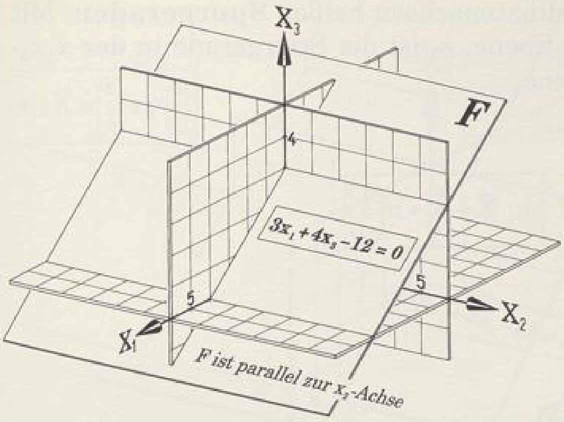


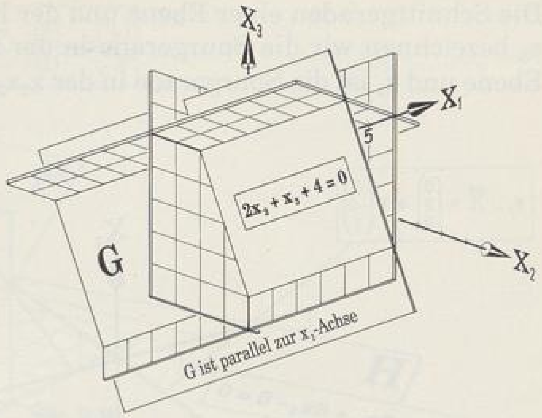
In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität auf Anhieb nur dann, wenn einer der Richtungsvektoren parallel zu einer Koordinatenachse ist. Die Ebene E :

$2x_1 - x_2 + 6 = 0$ hat zum Beispiel die Parametergleichung E : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.



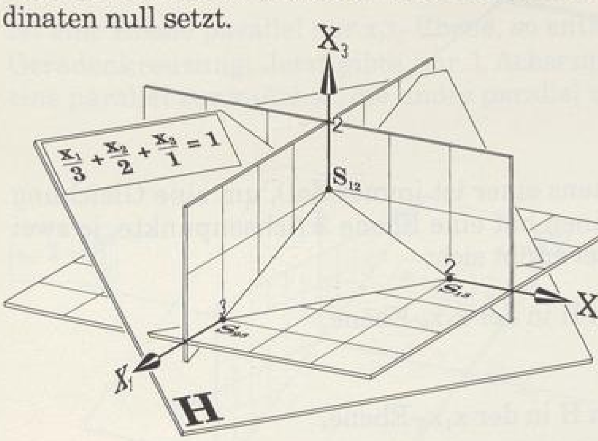






Achsenpunkte, Achsenabschnittsform, Spurgeraden

Die Schnittpunkte einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Achsenpunkte der Ebene**. Man bestimmt sie aus der Koordinatengleichung, indem man jeweils zwei Koordinaten null setzt.



Beispiel: H: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$
Schnitt mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 3$, $S_{23}(3|0|0)$
Schnitt mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $S_{13}(0|2|0)$
Schnitt mit der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $S_{12}(0|0|1)$

Die Schnittstellen von Ebene und Koordinatenachsen heißen **Achsenabschnitte der Ebene**. Die Koordinatengleichung der Ebene läßt sich schnell so umformen, daß diese Achsenabschnitte direkt ablesbar sind.

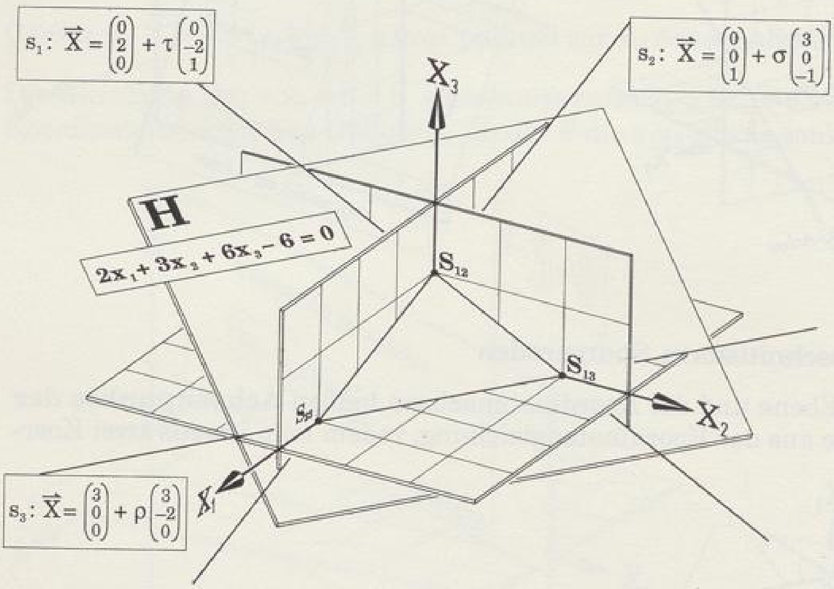
Beispiel: H: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \quad \|:6$

Achsenabschnittsform von H: $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1} = 1$,
H hat die Achsenabschnitte $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 1$.

Allgemein:

Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$
die Achsenpunkte sind $(a_1|0|0)$, $(0|a_2|0)$ und $(0|0|a_3)$.

Die Schnittgeraden einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Spurgeraden**. Mit s_3 bezeichnen wir die Spurgerade in der x_1x_2-Ebene, s_2 ist die Spurgerade in der x_1x_3-Ebene und s_1 ist die Spurgerade in der x_2x_3-Ebene.



Wir verwenden die Achsenpunkte (mindestens einer ist immer da!), um eine Gleichung einer Spurgerade aufzustellen. Im allgemeinen hat eine Ebene 3 Achsenpunkte, je zwei davon legen eine Spurgerade fest. Im Beispiel ergibt sich:

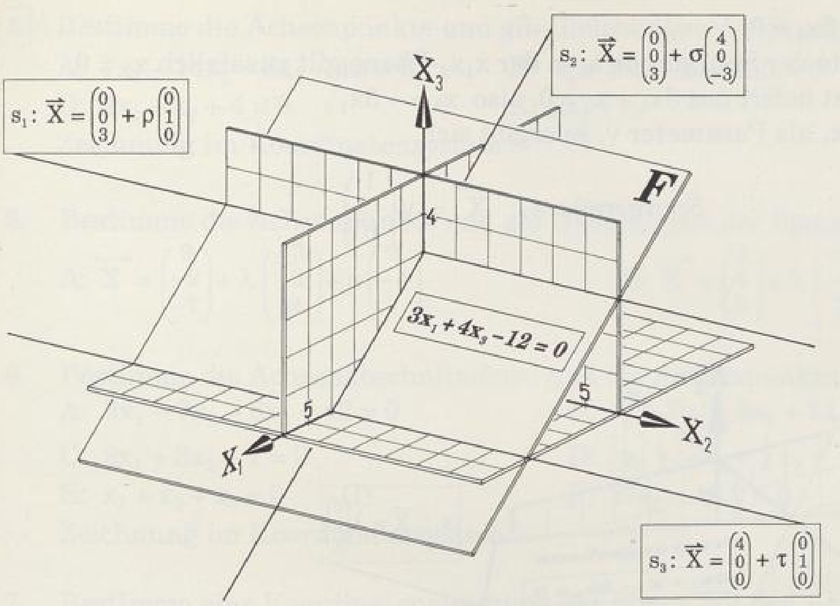
$s_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_1x_2-Ebene,

$s_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_1x_3-Ebene,

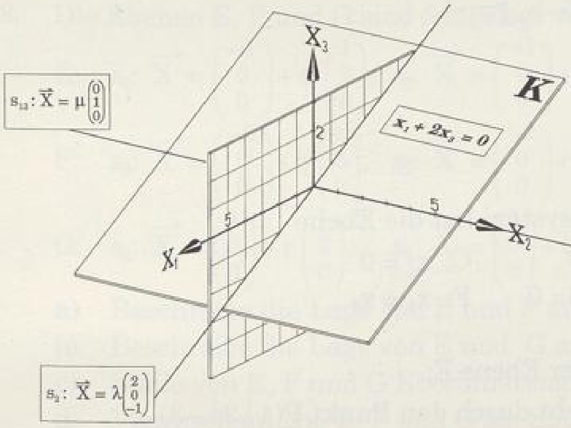
$s_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_2x_3-Ebene.

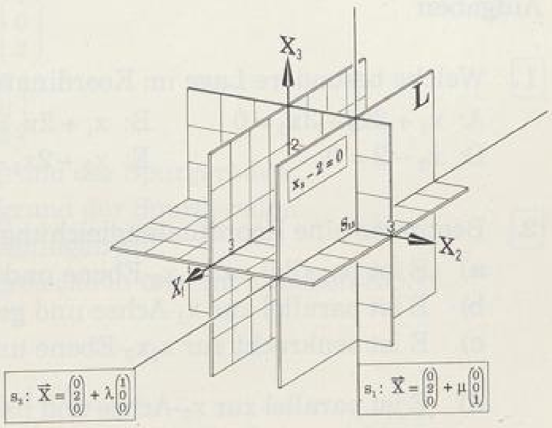
Im allgemeinen bilden die Spurgeraden ein Dreieck mit den Achsenpunkten als Ecken. Dieses Dreieck heißt **Spurdreieck**. Mit ihm läßt sich die Lage einer Ebene im Koordinatensystem besonders gut veranschaulichen.

Ist eine Ebene echt parallel zur x_i-Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar: Jetzt gibts nur 2 Achsenpunkte, 2 Spurgeraden sind parallel zur x_i-Achse und stehen senkrecht auf der 3. Spurgerade. Enthält eine Ebene die x_i-Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: die eine Spurgerade ist die x_i-Achse, die andre liegt in der x_jx_k-Ebene. Zum Beispiel enthält die Ebene K: $x_1 + 2x_3 = 0$ die x_2-Achse.



Ist eine Ebene parallel zur x_ix_j-Ebene, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: Jetzt gibts nur 1 Achsenpunkt, von den beiden Spurgeraden ist die eine parallel zur x_i-Achse, die andre parallel zur x_j-Achse.





Am schwierigsten zu veranschaulichen und im Bild wiederzuerkennen sind Ebenen, die durch den Ursprung, aber nicht durch eine Koordinatenachse gehen: Die drei Achsenpunkte fallen im Ursprung zusammen, das Spurdreieck entartet zum Ursprung. Auch die Spurgeraden gehen durch den Ursprung; ihre Gleichungen findet man durch Lösen eines Gleichungssystems.

Beispiel: U: $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

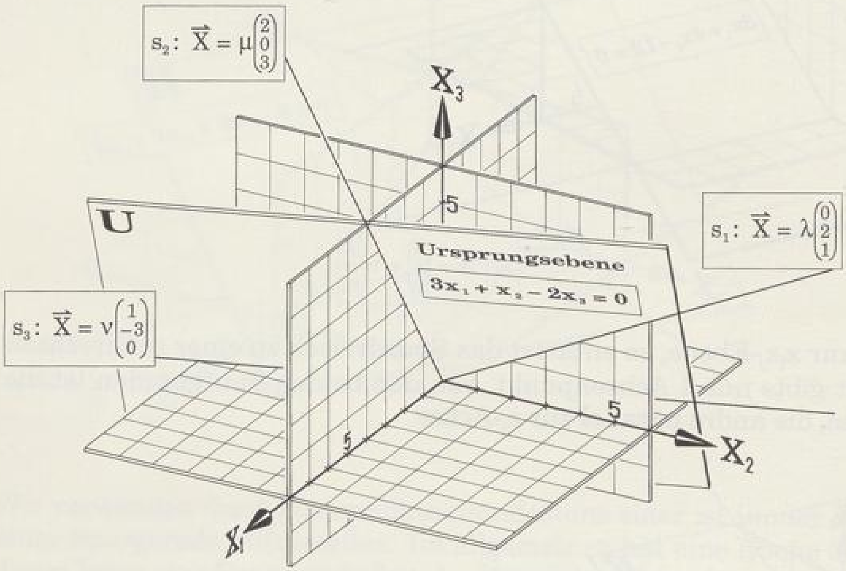
Für die Punkte der Spurgerade s_3 in der x_1x_2-Ebene gilt zusätzlich $x_3 = 0$, in U eingesetzt liefert das $3x_1 + x_2 = 0$, also $x_2 = -3x_1$.

Nimmt man x_1 als Parameter ν, so ergibt sich

$x_1 = \nu$

$x_2 = -3\nu$ Spurgerade s_3: $\overrightarrow{X} = \nu\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$

$x_3 = 0$



Aufgaben

1. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ B: $x_1 + 2x_2 = 0$ C: $x_1 = 0$

D: $x_2 - 2 = 0$ E: $x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ F: $x_1 = x_2$

2. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E:

a) E ist parallel zur x_1x_2-Ebene und geht durch den Punkt $P(1\,|\,2\,|\,-3)$.

b) E ist parallel zur x_2-Achse und geht durch $P(1\,|\,0\,|\,0)$ und $Q(0\,|\,0\,|\,1)$.

c) E ist senkrecht zur x_2x_3-Ebene und geht durch O und $P(0\,|\,1\,|\,1)$.

d) E ist parallel zur x_2-Achse und hat die Spurgerade s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

e) E ist senkrecht zur x_3-Achse und geht durch $P(\pi\,|\,\sqrt{17}\,|\,4)$.

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ B: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

C: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ D: $\overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{4.}$ Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A: $7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$ C: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

D: $2x_1 - x_2 + 4 = 0$ E: $2x_1 = x_2$ F: $x_2 + 2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

5. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ B: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Bestimme die Achsenabschnittsform und die Achsenpunkte

A: $3x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

C: $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$ D: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5} = 0$

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (!) F: $17x_2 + 10{,}2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

7. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenpunkten:

a) $(1|0|0), (0|2|0), (0|0|3)$ **b)** $(-2|0|0), (0|2|0), (0|0|-2)$

c) nur $(0|-3|0)$ und $(0|0|5)$ **d)** nur $(0|0|7)$

Zeichnung im Koordinatensystem !

• **8.** Die Ebenen E, F und G sind festgelegt von zwei Spurgeraden:

E: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

F: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

G: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Lage von E und F aufgrund der Spurgeraden.

b) Beschreibe die Lage von E und G aufgrund der Spurgeraden.

c) Stelle von E, F und G Koordinatengleichungen auf.

d) Veranschauliche E, F und G als Spurdreiecke in unserm üblichen KOSY.

• **9.** s_3: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und s_2: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \neq 0$

seien Spurgeraden einer Ebene U.

Bestimme eine Gleichung der Spurgerade s_1 in Abhängigkeit von a, b, c und d.

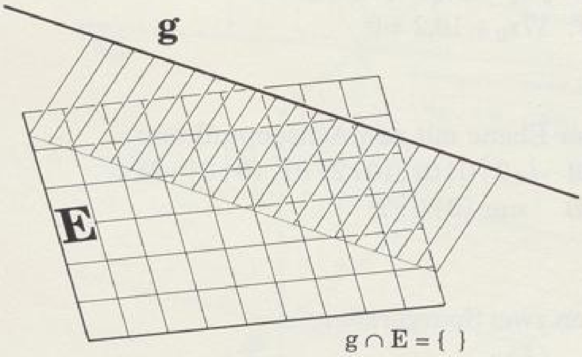
10. Eine Ebene sei so festgelegt, daß ihre drei Achsenpunkte vom Ursprung die Entfernung e (>0) haben.

a) Wieviel solcher Ebenen sind möglich ?
Beschreibe sie mit Koordinatengleichungen.

b) Welchen Körper begrenzen diese Ebenen ?
Berechne sein Volumen V und seine Oberfläche F.

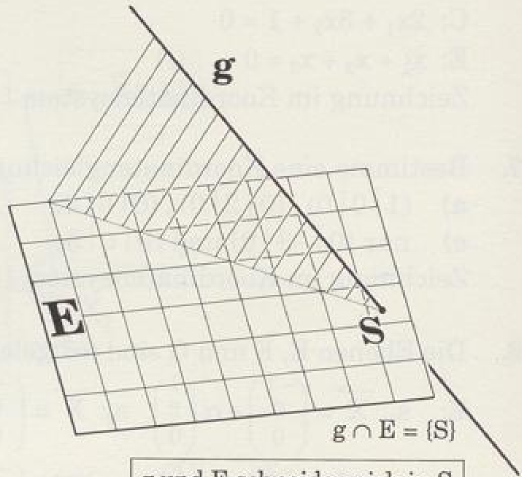
3. Ebene und Gerade

Eine Gerade g kann eine Ebene E in einem Punkt schneiden, echt parallel zu E sein oder in E liegen.



$g \cap E = \{\ \}$

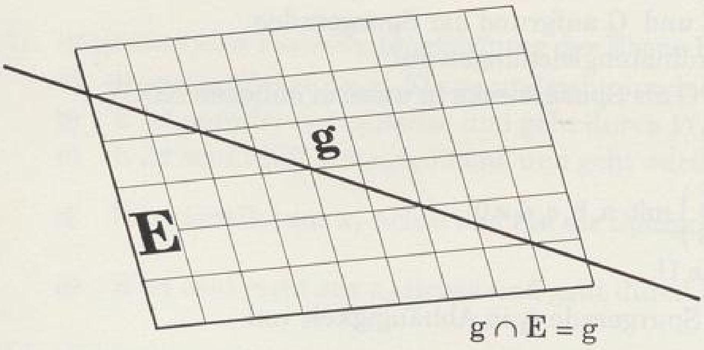
g und E sind echt parallel



$g \cap E = \{S\}$

g und E schneiden sich in S

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich Gerade und Ebene schneiden, und suchen den Schnittpunkt.



$g \cap E = g$

g liegt in E

Parametergleichung der Ebene

Für die Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Ortsvektoren der allgemeinen Punkte von Gerade und Ebene gleich. Es ergibt sich ein 3,3-Gleichungssystem für die drei Parameter.