Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

3. Ebene und Gerade

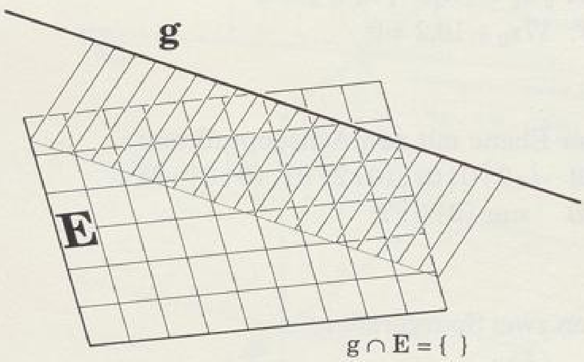
10. Eine Ebene sei so festgelegt, daß ihre drei Achsenpunkte vom Ursprung die Entfernung e (>0) haben.

a) Wieviel solcher Ebenen sind möglich ?
Beschreibe sie mit Koordinatengleichungen.

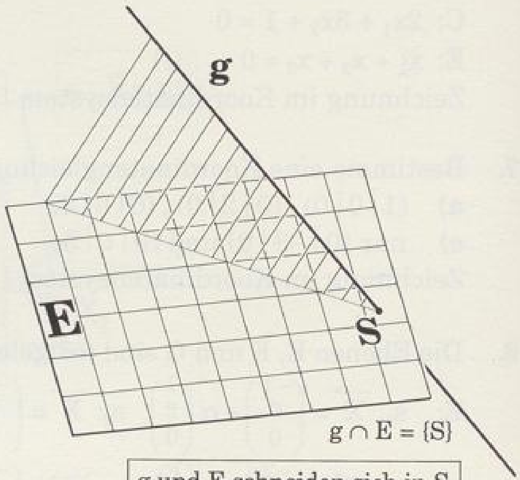
b) Welchen Körper begrenzen diese Ebenen ?
Berechne sein Volumen V und seine Oberfläche F.

3. Ebene und Gerade

Eine Gerade g kann eine Ebene E in einem Punkt schneiden, echt parallel zu E sein oder in E liegen.

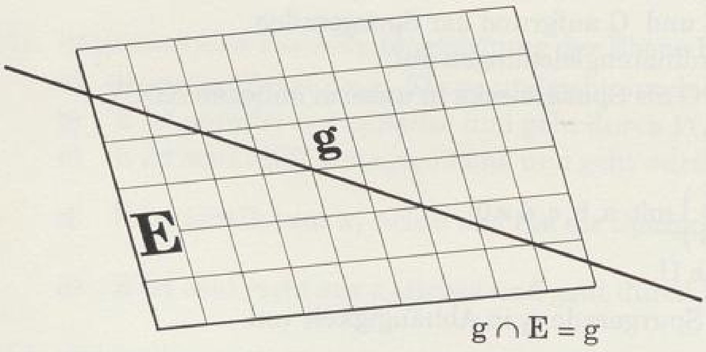


g und E sind echt parallel



g und E schneiden sich in S

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich Gerade und Ebene schneiden, und suchen den Schnittpunkt.



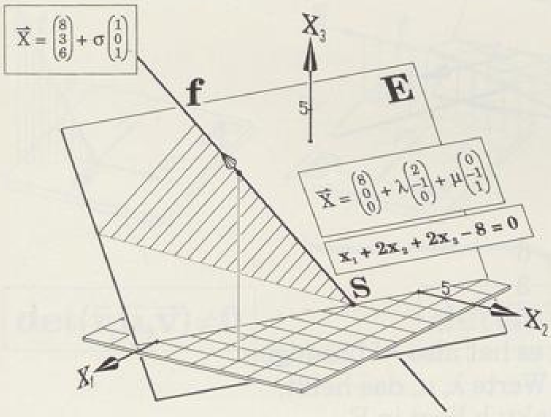
g liegt in E

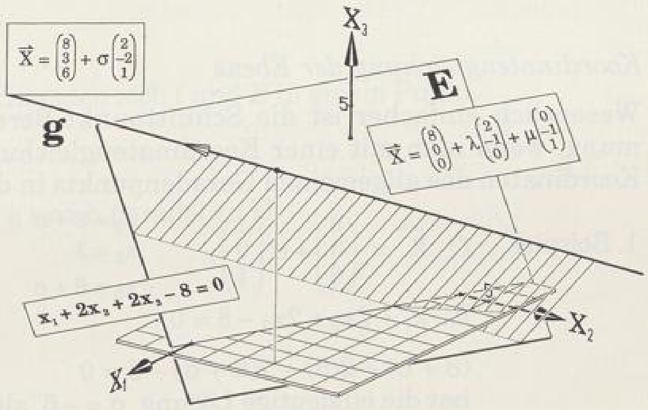
Parametergleichung der Ebene

Für die Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Ortsvektoren der allgemeinen Punkte von Gerade und Ebene gleich. Es ergibt sich ein 3,3-Gleichungssystem für die drei Parameter.

1. Beispiel:
$$\left.\begin{array}{l} f:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\[2ex] E:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \text{» Gleichsetzen «}$$

Das System
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2\lambda \quad - \sigma & = & 0 \\ \text{II} & -\lambda - \mu \quad & = & 3 \\ \text{III} & \mu - \sigma & = & 6 \end{array}$$
hat die eindeutige Lösung $\sigma = -6,\ \mu = 0,\ \lambda = -3$.
Durch Einsetzen, zum Beispiel von σ in die Geradengleichung bekommt man den Schnittpunkt $S(2\,|\,3\,|\,0)$.



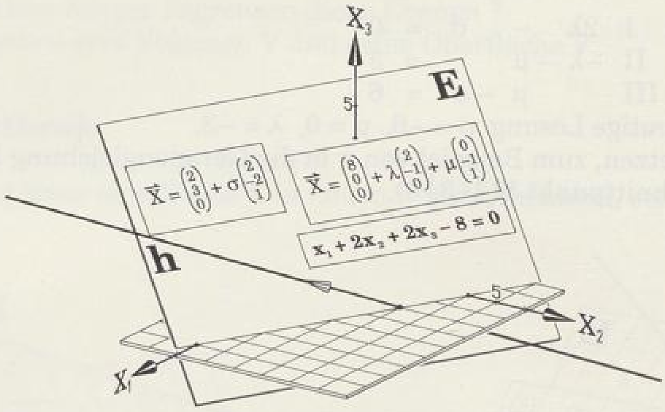


2. Beispiel:
$$g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$
$$E:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Das System
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2\lambda \quad - \quad 2\sigma & = & 0 \qquad \boxed{\lambda = \sigma} \\ \text{II} & -\lambda - \mu + 2\sigma & = & 3 \\ \text{III} & \mu - \sigma & = & 6 \end{array}$$
führt zu dem Widerspruch:
$$\begin{array}{lrcl} \text{II}' & \mu - \sigma & = & -3 \\ \text{III}' & \mu - \sigma & = & 6 \end{array}$$
Es gibt also keinen Schnittpunkt: g und E sind echt parallel.

3. Beispiel: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Das System
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2\lambda \quad - 2\sigma & = & -6 \\ \text{II} & -\lambda - \mu + 2\sigma & = & 3 \\ \text{III} & \mu - \sigma & = & 0 \end{array}$$
wird gelöst von $\mu = \sigma$, $\lambda = -3 + \sigma$; es hat also ∞^1 Lösungen:
zu jedem Wert σ gibt es passende Werte λ, μ, das heißt,
jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt: h liegt in E.

Koordinatengleichung der Ebene

Wesentlich einfacher ist die Schnittpunkt-Berechnung, und damit die Lagebestimmung, wenn man mit einer Koordinatengleichung der Ebene arbeitet. Man setzt die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunkts in die Koordinatengleichung ein.

1. Beispiel: $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad x_1 = 8 + \sigma$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6 + \sigma$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$(8 + \sigma) + 2(3) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0$
hat die eindeutige Lösung $\sigma = -6$, also schneiden sich f und E in $S(2 \mid 3 \mid 0)$.

2. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$8 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 18 = 0$. Wegen des Widerspruchs gibt es keinen Schnittpunkt: g und E sind echt parallel.

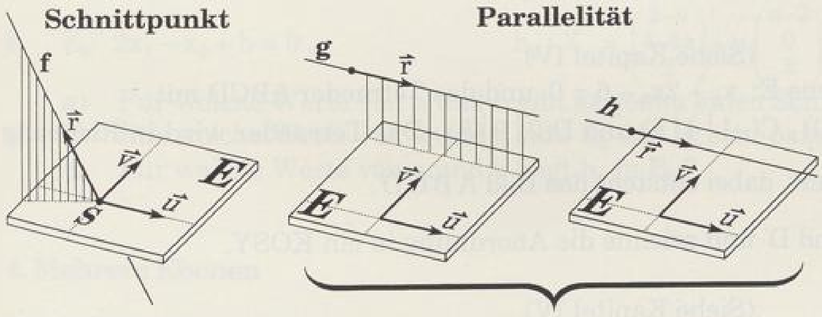
3. Beispiel: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$2 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(\sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 0\cdot\sigma = 0$

Für σ ist alles erlaubt, jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt: h liegt in E.

Wenn man bloß wissen will, ob sich eine Gerade und eine Ebene (Parametergleichung!) in einem Punkt schneiden oder parallel sind, dann empfiehlt sich der Determinantentest:



$\boxed{\det(\vec{r},\vec{u},\vec{v}) \neq 0}$ $\boxed{\det(\vec{r},\vec{u},\vec{v}) = 0}$

In den drei Beispielen sieht das so aus:

1. Beispiel: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & -1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$, also schneiden sich f und E in einem Punkt.

2. Beispiel ;
3. Beispiel $\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\-2 & -1 & -1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$, also sind g und h parallel zu E.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $j: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von Ebene und Gerade.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

2. Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

E: $x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$, F: $2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$

$a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c: \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

• **3. Parallelprojektion** (Siehe Kapitel IV)
Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + 2x_3 - 6 = 0$ und das Tetraeder ABCD mit $A(2|0|5)$, $B(-1|2|0)$, $C(-1|4|8)$ und $D(2|0|8)$. Das Tetraeder wird in Richtung $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

• **4. Zentralprojektion** (Siehe Kapitel IV)
Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - 6 = 0$, das Projektionszentrum $Z(11|8|0)$ und das Tetraeder ABCD mit $A(9|6|0)$, $B(5{,}5|7|3)$, $C(6|6|1)$ und $D(8|6|2)$. Das Tetraeder wird zentral in die Ebene E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

5. Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe **17.** auf Seite 177)

a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?

b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von [GC] und [AE] das Tetraeder ?

• **6.** $A(2\,|-1\,|\,0)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet.
Berechne die Schnittpunkte.
Ein möglicher Lösungsweg führt über eine Hilfsebene H zum Ergebnis.
(Tip: H geht durch A und eine der beiden Geraden, Skizze hilft!).

7. $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad g_a: \overrightarrow{X} = \sigma\begin{pmatrix}1+a\\1-a\\1\end{pmatrix}$

Welche Schargerade ist parallel zu E ? Ist sie echt parallel ?

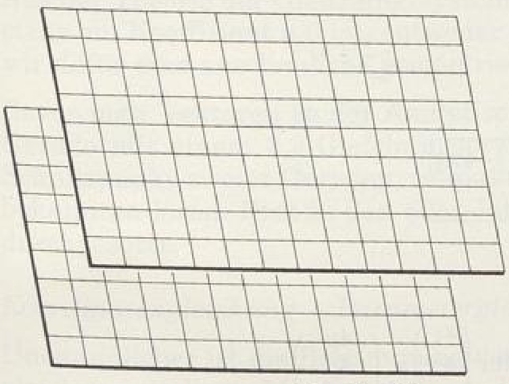
• **8.** E_b: $2x_1 - x_2 + b = 0$, $\quad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2-a\\4-2a\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}a-2\\0\\2\end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a und b gibt es genau einen Schnittpunkt ?
b) Für welche Werte von a und b sind E_b und h_a echt parallel ?
c) Für welche Werte von a und b liegt h_a in E_b ?

4. Mehrere Ebenen

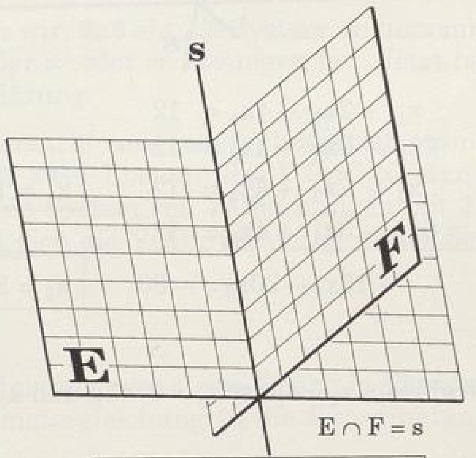
Zwei Ebenen

Zwei Ebenen können sich in einer Gerade schneiden, echt parallel oder identisch sein.



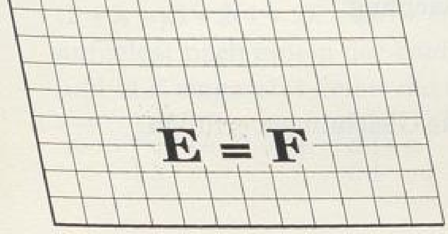
$E \cap F = \{\ \}$

E und F sind echt parallel



$E \cap F = s$

E und F schneiden sich in s



E und F sind identisch