Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

4. Mehrere Ebenen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

• **6.** $A(2\,|-1\,|\,0)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet.
Berechne die Schnittpunkte.
Ein möglicher Lösungsweg führt über eine Hilfsebene H zum Ergebnis.
(Tip: H geht durch A und eine der beiden Geraden, Skizze hilft!).

7. E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad g_a: \overrightarrow{X} = \sigma\begin{pmatrix}1+a\\1-a\\1\end{pmatrix}$

Welche Schargerade ist parallel zu E ? Ist sie echt parallel ?

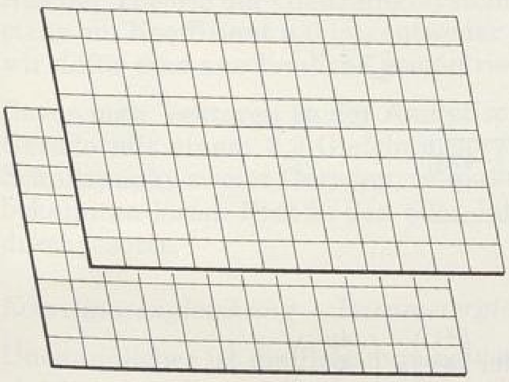
• **8.** E_b: $2x_1 - x_2 + b = 0$, $\quad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2-a\\4-2a\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}a-2\\0\\2\end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a und b gibt es genau einen Schnittpunkt ?
b) Für welche Werte von a und b sind E_b und h_a echt parallel ?
c) Für welche Werte von a und b liegt h_a in E_b ?

4. Mehrere Ebenen

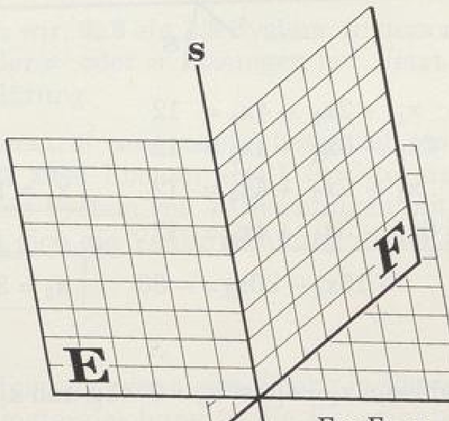
Zwei Ebenen

Zwei Ebenen können sich in einer Gerade schneiden, echt parallel oder identisch sein.



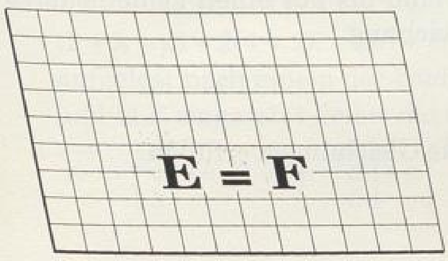
$E \cap F = \{\ \}$

E und F sind echt parallel



$E \cap F = s$

E und F schneiden sich in s

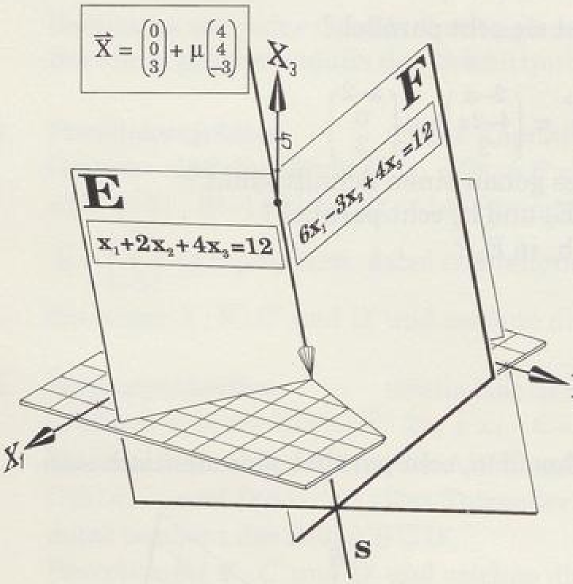


E und F sind identisch

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich beide Ebenen schneiden, und suchen die Schnittgerade. Die Berechnung der Schnittgerade ist mit Koordinatengleichungen am einfachsten.

Koordinatengleichung – Koordinatengleichung

Die Koordinaten der Punkte, die in beiden Ebenen liegen, müssen beide Koordinatengleichungen erfüllen, also Lösungen eines 2,3-Gleichungssystems sein.



$$
\begin{array}{rl}
\text{E:} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \\
\text{F:} & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\
\text{I} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \qquad \boxed{x_1 = 12 - 2x_2 - 4x_3} \\
\text{II} & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\
\hline
\text{II'} & -15x_2 - 20x_3 = -60 \qquad \boxed{x_3 = 3 - \frac{3}{4}x_2}
\end{array}
$$

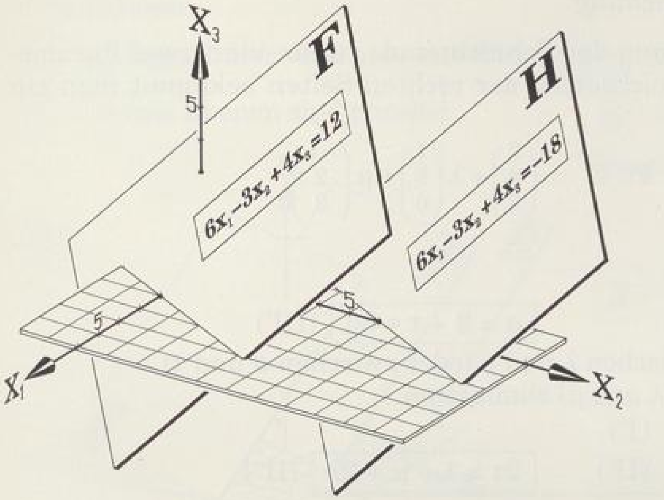
Bei Wahl von $x_2 = 4\mu$ ist $x_3 = 3 - 3\mu$ und $x_1 = 4\mu$, oder $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\mu\\4\mu\\3-3\mu\end{pmatrix}$

Gleichung der Schnittgerade s von E und F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$.

Die Parallelität zweier Ebenen erkennt man bei Koordinatengleichungen mit einem Blick: Die Koeffizienten der x_i der einen Gleichung sind bis auf einen gemeinsamen Faktor identisch mit den Koeffizienten der andern Gleichung:

$$
\begin{array}{rl}
\text{F:} & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\
\text{H:} & 12x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -36
\end{array}
$$

Es gibt keinen Punkt, dessen Koordinaten beide Gleichungen erfüllen.
H und F sind echt parallel.



Ist die ganze Gleichung der einen Ebene ein Vielfaches der andern, so sind beide Ebenen identisch:

F: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$
G: $-3x_1 + 1{,}5x_2 - 2x_3 = -6$
Die Gleichung von F ist das (–2)-fache der Gleichung von G.
F und G sind identisch.

Aus der Theorie der Gleichungssysteme wissen wir, daß ein 2,3-System, in dem mindestens ein Koeffizient $\neq 0$ ist, entweder keine oder ∞^1 oder ∞^2 Lösungen hat. Jetzt haben wir dafür eine anschauliche geometrische Erklärung.

Bevor man Vektoren in der Analytischen Geometrie verwendete, beschrieb man eine Gerade mit einem 2,3-Gleichungssystem (mit zwei Ebenen also!). Suchte man den Schnittpunkt zweier Geraden, so mußte man ein System von 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten lösen. Erst in den 60er-Jahren hat sich die Vektorrechnung in der Schule durchgesetzt.

Koordinatengleichung – Parametergleichung

Umständlicher ist die Bestimmung der Schnittgerade, wenn eine Ebene in Parametergleichung vorliegt. Man setzt die x_i der Parametergleichung in die Koordinatengleichung ein:

E: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\lambda-\mu\\4+2\lambda+2\mu\\3+3\mu\end{pmatrix}$ in E eingesetzt ergibt

$(2 + \lambda - \mu) + 2(4 + 2\lambda + 2\mu) + 4(3 + 3\mu) = 12$, $\quad 5\lambda + 15\mu = -10$,

aufgelöst nach einem der beiden Parameter $\quad \lambda = -2 - 3\mu$

und in F eingesetzt liefert die Gleichung der Schnittgerade

$\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + (-2 - 3\mu)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$

Parametergleichung – Parametergleichung

Noch langwieriger wird die Berechnung der Schnittgerade, wenn man zwei Parametergleichungen verwendet. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten bekommt man ein 3,4-System:

$$E\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-6\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad F\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & -6\sigma + 2\tau - \lambda + \mu & = & -4 \\
\text{II} & \sigma + \tau - 2\lambda - 2\mu & = & 3 \\
\text{III} & \sigma - \tau \quad - 3\mu & = & 2 \qquad \boxed{\sigma = 2 + \tau + 3\mu}\ (\text{III}')
\end{array}$$

Wir brauchen eine Beziehung zwischen λ und μ (oder zwischen σ und τ).
Deshalb muß man σ und τ (oder λ und μ) eliminieren.

$$\begin{array}{llll}
\text{III}' \text{ in I} & 4\tau + \lambda + 17\mu = -8 & (\text{I}') & \\
\text{III}' \text{ in II} & 2\tau - 2\lambda + \mu = 1 & (\text{II}') & \boxed{2\tau = 1 - \mu + 2\lambda}\ (\text{II}'') \\
\hline
\text{II}'' \text{ in I}' & 5\lambda + 15\mu = -10\,, & &
\end{array}$$

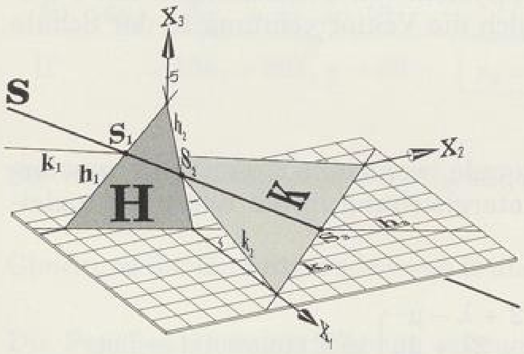
$\lambda = -2 - 3\mu$ eingesetzt in F liefert wieder die Gleichung der Schnittgerade.

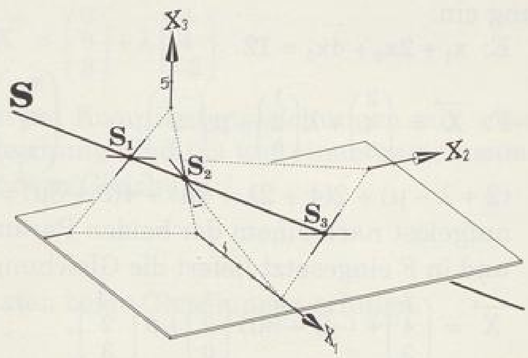
Kennt man die Spurgeraden zweier Ebenen, so geht die Zeichnung der Schnittgerade leicht von der Hand: Die Schnittgerade verbindet nämlich die Schnittpunkte von je zwei Spurgeraden in derselben Koordinatenebene.

Beispiel: H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$
hat die Achsenpunkte $H_{12}(0|0|4)$, $H_{13}(0|-4|0)$ und $H_{23}(2|0|0)$.

K: $x_1 + x_2 + 4x_3 - 8 = 0$
hat die Achsenpunkte $K_{12}(0|0|2)$, $K_{13}(0|8|0)$ und $K_{23}(8|0|0)$.

H und K schneiden sich in s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}$.



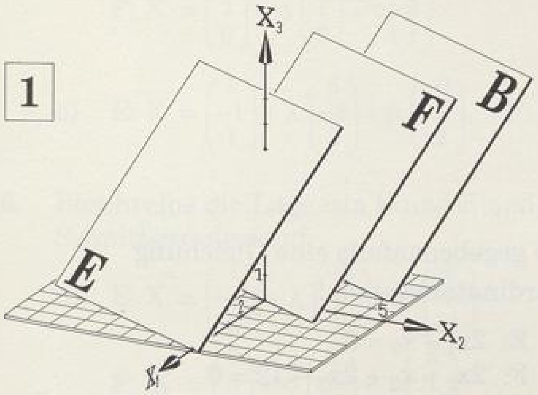


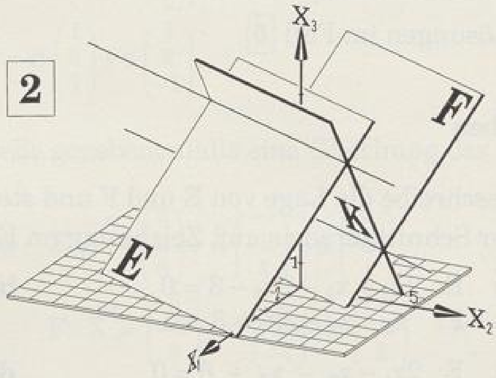
Drei Ebenen

Für die Lage dreier verschiedener Ebenen gibt es fünf charakteristische Fälle:

1 die drei Ebenen sind parallel

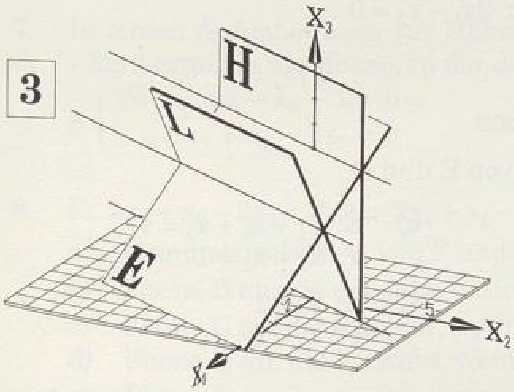
2 genau zwei Ebenen sind parallel; es gibt genau zwei parallele Schnittgeraden

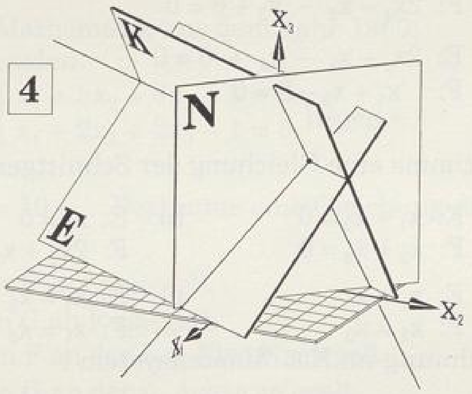




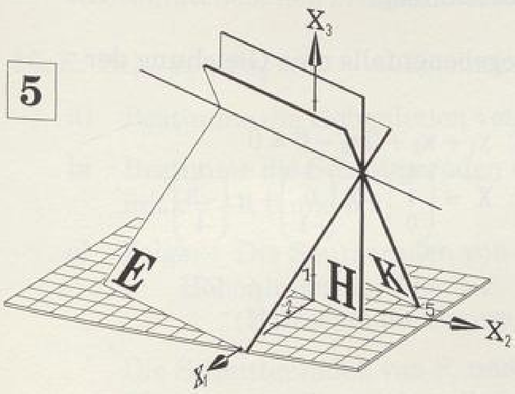
3 es gibt drei parallele Schnittgeraden

4 es gibt genau einen gemeinsamen Punkt





5 es gibt genau eine gemeinsame Schnittgerade



Sind die drei Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben (wir betrachten nur diesen Fall), dann müssen gemeinsame Punkte das zugehörige 3,3-Gleichungssystem erfüllen. Die fünf Fälle veranschaulichen die möglichen Lösungsmengen, die wir vom 3,3-System kennen:

– keine Lösung in den Fällen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$
– genau eine Lösung im Fall $\boxed{4}$
– ∞^1 Lösungen im Fall $\boxed{5}$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf. Zeichnung im Koordinatensystem !

a) E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$
F: $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

b) E: $2x_1 - x_2 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

c) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

d) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$

e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

f) E: $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 = 0$

g) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$

$\boxed{2.}$ Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F:

a) E: $x_1 + x_2 = 0$
F: $x_2 + x_3 = 0$

b) E: $x_1 = 0$
F: $2x_2 + x_3 = 1$

c) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
F: $x_1 + x_2 = 1$

d) E: $x_1 = x_2$
F: $x_2 = x_3$

e) E: $x_1 = x_2$
F: $x_1 = x_3$

f) E: $x_1 = 1$
F: $x_2 = 2$

Zeichnung im Koordinatensystem !

3. E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
F: $2x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0$
Wähle der Reihe nach x_1, x_2 und x_3 als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

4. Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

b) E: $x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0$
F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

5. Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F

a) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, F: $\overrightarrow{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

6. Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$ b) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\7\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$ F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

c) E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

7. In einem Aufgabenbuch zur Höheren Mathematik aus dem Jahr 1960:
» Man ermittle die Ebene, in der die Geraden

g: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ und h: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ liegen.«

⁚ 8. F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, G: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$. Bestimme eine Gleichung der

a) Symmetrieebene A von F und G.
b) Ebene B an, die entsteht, wenn man F an G spiegelt.
c) Ebene C an, die entsteht, wenn man G an F spiegelt.
d) Ebene D an, die entsteht, wenn man F an der x_1x_2-Ebene spiegelt.
e) Ebene E an, die entsteht, wenn man G an der x_2-Achse spiegelt.

9. E: $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 18 = 0$
Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E, indem du E zum Schnitt mit den Koordinatenebenen bringst. Zeichnung im Koordinatensystem !

⁚ 10. E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Bestimme die Höhenlinien von E in den Höhen −1, 0 und 5 über der x_1x_2-Ebene.

b) Bestimme die Schnittgeraden von E und Ebene $F_c: x_1 + 2x_2 + c = 0$ mit $c = -1$, 0 und 5 .

c) Zeige: Die Spurgeraden von F_c in der x_1x_2-Ebene stehen senkrecht auf den Höhenlinien der Ebene E.
(Betrachte die Spurgeraden im ebenen x_1x_2-Koordinatensystem.)

Die Schnittgeraden von F_c und E heißen auch *Fall-Linien* der Ebene E.
Eine Kugel rollt auf einer Fall-Linie hinab in die x_1x_2-Ebene.

•11. A(2 | −1 | 2) , B(0 | −2 | −1) , C(6 | 1 | 1)
R(−3 | 1 | −3) , S(−2 | 2 | −1) , T(−4 | 2 | −2)
Die Abhänge eines Bergs seien angenähert die Ebenen ABC und RST.
Wegen der langen Verwitterung ist der Grat g nicht mehr vorhanden.
Dank Analytischer Geometrie läßt sich sein Verlauf rekonstruieren:
Bestimme eine Gleichung von g.
Berechne die Gratpunkte in den Höhen 0 und 9 über der x_1x_2-Ebene.
Zeichnung im Koordinatensystem !

12. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!). Zeige, daß es nur die Lösung (0 | 0 | 0) hat.
Was bedeutet das in den beiden Interpretationen ?

13. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!).
Welche geometrische Bedeutung hat die Lösung ?

14. A: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
B: $x_1 + x_2 - 3 = 0$
C: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
D: $2x_1 - x_2 = 0$
E: $2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0$

Bestimme eine Gleichung der Ebene F, die durch die Schnittgerade von D und E geht und den Schnittpunkt von A, B und C enthält.

15. A: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3 = 0$
B: $5x_1 - x_2 - 5 = 0$
C: $3x_2 - 2x_3 + 2 = 0$
D: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Zeige, daß sich die vier Ebenen in einem Punkt schneiden, und berechne diesen Punkt.

5. Ebenenscharen

Enthält eine Koordinatengleichung auch Parameter, dann beschreibt diese Gleichung eine Ebenenschar. Die Parameter heißen **Scharparameter**. Wir behandeln nur Scharen, bei denen die Parameter linear vorkommen, zum Beispiel

$$E_a\colon\ x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Um die Lage der Scharebenen besser zu überblicken, sortieren wir:

$$E_a\colon\ [x_1 + 2x_2 - x_3 - 4] + a[-x_2 + x_3] = 0$$

Eine Kurzschreibweise der Koordinatengleichung macht die Darstellung übersichtlicher. Die linke Seite einer Gleichung $E\colon\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ bezeichnen wir mit E(X). Eine Ebene E ist damit festgelegt durch E(X) = 0, die Schar E_a durch $E_a(X) = 0$. In der Gleichung der Schar E_a erkennen wir jetzt zwei Ebenen E_0 und F

$$E_0\colon\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad F\colon -x_2 + x_3 = 0.$$

Kurzschreibweise für E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$.