Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

5. Ebenenscharen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

$\boxed{\bullet 11.}$ $A(2|-1|2)$, $B(0|-2|-1)$, $C(6|1|1)$
$R(-3|1|-3)$, $S(-2|2|-1)$, $T(-4|2|-2)$
Die Abhänge eines Bergs seien angenähert die Ebenen ABC und RST.
Wegen der langen Verwitterung ist der Grat g nicht mehr vorhanden.
Dank Analytischer Geometrie läßt sich sein Verlauf rekonstruieren:
Bestimme eine Gleichung von g.
Berechne die Gratpunkte in den Höhen 0 und 9 über der x_1x_2-Ebene.
Zeichnung im Koordinatensystem !

12. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!). Zeige, daß es nur die Lösung $(0|0|0)$ hat.
Was bedeutet das in den beiden Interpretationen ?

13. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!).
Welche geometrische Bedeutung hat die Lösung ?

14.
$$\begin{aligned} A&: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0 \\ B&: x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ C&: 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ D&: 2x_1 - x_2 = 0 \\ E&: 2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0 \end{aligned}$$
Bestimme eine Gleichung der Ebene F, die durch die Schnittgerade von D und E geht und den Schnittpunkt von A, B und C enthält.

15.
$$\begin{aligned} A&: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ B&: 5x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ C&: 3x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ D&: x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$
Zeige, daß sich die vier Ebenen in einem Punkt schneiden, und berechne diesen Punkt.

5. Ebenenscharen

Enthält eine Koordinatengleichung auch Parameter, dann beschreibt diese Gleichung eine Ebenenschar. Die Parameter heißen **Scharparameter**. Wir behandeln nur Scharen, bei denen die Parameter linear vorkommen, zum Beispiel

$$E_a\colon\ x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

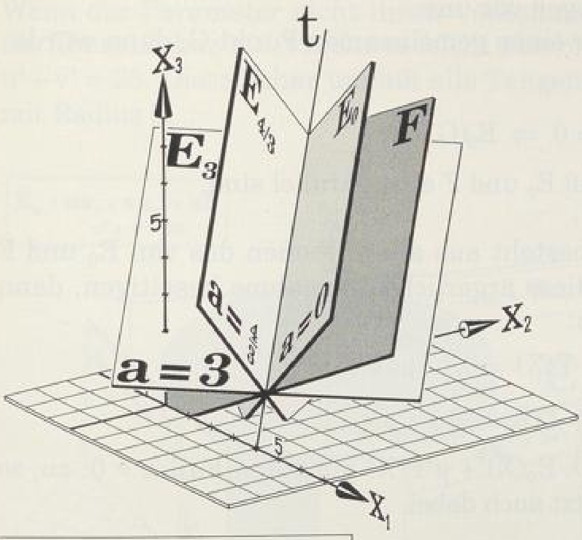
Um die Lage der Scharebenen besser zu überblicken, sortieren wir:

$$E_a\colon\ [x_1 + 2x_2 - x_3 - 4] + a[-x_2 + x_3] = 0$$

Eine Kurzschreibweise der Koordinatengleichung macht die Darstellung übersichtlicher. Die linke Seite einer Gleichung $E\colon\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ bezeichnen wir mit $E(X)$. Eine Ebene E ist damit festgelegt durch $E(X) = 0$, die Schar E_a durch $E_a(X) = 0$. In der Gleichung der Schar E_a erkennen wir jetzt zwei Ebenen E_0 und F

$$E_0\colon\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad F\colon -x_2 + x_3 = 0.$$

Kurzschreibweise für E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$.



E_a: $x_1+(2-a)x_2+(a-1)x_3-4=0$

Für einen gemeinsamen Punkt S von E_0 und F gilt: $E_0(S) = 0$ und $F(S) = 0$. Damit ist auch $E_a(S) = 0$. Also liegt *jeder* Schnittpunkt von E_0 und F auch in *jeder* Scharebene E_a. Zwei Ebenen mit *einem* gemeinsamen Punkt haben immer eine Gerade gemeinsam. Das heißt, alle Ebenen der Schar E_a gehen durch die Schnittgerade von E_0 und F.

Die Menge der Ebenen, die sich alle in ein und derselben Gerade schneiden, heißt **Ebenenbüschel**. Die gemeinsame Schnittgerade heißt **Trägergerade**.
Um die Trägergerade t zu berechnen, bringt man E_0 und F zum Schnitt. In unserm Beispiel ergibt sich $\quad t\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Wie wir wissen, geht jede Scharebene mit der Gleichung $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ durch die Trägergerade t. Es gilt aber auch (fast) die Umkehrung:
Jede Ebene (außer F) ist in der Schar vertreten, die die Trägergerade enthält.

Beweis: $T \neq F$ sei eine beliebige Ebene durch t und P einer ihrer Punkte, der nicht auf t liegt.
Wir hätten gern: $T(X) = E_0(X) + a_t F(X)$.
Setzen wir P ein, dann ergibt sich
$T(P) = 0 = E_0(P) + a_t F(P), \Rightarrow a_t = -\frac{E_0(P)}{F(P)}$
Der Nenner ist ungleich null, weil P nicht auf F liegt. $E_{a_t} = T$, qed.

Zusammenfassung

Schneiden sich E_0 und F in t, so besteht die Schar E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ aus allen Ebenen (bis auf F), die die Trägergerade t enthalten.

Sind E_0 und F echt parallel, so besteht die Schar E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ aus allen Ebenen (bis auf F), die parallel zu E_0 sind.

Als Begründung für den zweiten Teil überlegen wir uns:

Hätten zwei Ebenen $E_{a_1} \neq E_{a_2}$ der Schar einen gemeinsamen Punkt G, dann würde gelten

$$\left.\begin{array}{l} E_0(G) + a_1F(G) = 0 \\ E_0(G) + a_2F(G) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(G) = 0 \Rightarrow E_0(G) = 0 \lightning$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß E_0 und F echt parallel sind.

Die Schar E_a mit $E_a(X) = E_0(X) + a \cdot F(X)$ besteht aus allen Ebenen des von E_0 und F erzeugten Büschels, bis auf F. Will man diese ärgerliche Ausnahme beseitigen, dann muß man zwei Parameter in Kauf nehmen:

Setzt man $a = \frac{\mu}{\lambda}$, so ergibt sich $E_0(X) + \frac{\mu}{\lambda} \cdot F(X) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

beziehungsweise $\lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X) = 0$

Läßt man in der Schar $E_{\lambda,\mu}$ mit $E_{\lambda,\mu}(X) = \lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X)$ auch den Fall $\lambda = 0$ zu, so ergibt sich $E_{0,\mu} = F$ für alle $\mu \neq 0$, und F ist jetzt auch dabei.

Außer dem Nachteil des zusätzlichen Parameters müssen wir uns jetzt auch noch damit abfinden, daß jede Ebene E_a durch unendlich viele Paare λ,μ von Parametern beschrieben wird, von denen mindestens einer ungleich 0 sein muß. Es gilt nämlich $a = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{k\mu}{k\lambda}$ mit $k \neq 0$. Das Ebenenbüschel des Beispiels hat die Gleichung

$$E_{\lambda,\mu}\colon\ \lambda x_1 + (2\lambda - \mu)x_2 + (\mu - \lambda)x_3 - 4\lambda = 0 \quad (\lambda | \mu) \neq (0|0)$$

Die Menge der Ebenen, die genau einen Punkt T gemeinsam haben,
heißt **Ebenenbündel**; der gemeinsame Punkt T heißt **Trägerpunkt**.

Schneiden sich die Ebenen E, F und G im Punkt T, dann enthält jede Ebene der Schar $E_{a,b}$ mit $E_{a,b}(X) = E(X) + a \cdot F(X) + b \cdot G(X)$ diesen Punkt, sie gehört also zum Bündel. Es gilt nämlich $E_{a,b}(T) = E(T) + a \cdot F(T) + b \cdot G(T) = 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

Die Ebenen F und G des Bündels fehlen in der Schar. Mit einem zusätzlichen Parameter können wir auch sie aufnehmen. Setzt man $a = \frac{\mu}{\lambda}$ und $b = \frac{\nu}{\lambda}$, so ergibt sich $E_{\lambda,\mu,\nu}(X) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot F(X) + \nu \cdot G(X)$, wobei mindestens ein Parameter ungleich null sein muß. So gilt zum Beispiel $E_{0,\mu,0} = F$ für $\mu \neq 0$.

1. Beispiel: Die drei Koordinatenebenen E_i: $x_i = 0$ (i = 1,2,3) erzeugen das Bündel $E_{\lambda,\mu,\nu}$: $\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$ mit dem Trägerpunkt T(0|0|0).

2. Beispiel: $E_{\lambda,\mu,\nu}$: $(2\lambda+\mu+2\nu)x_1 + (\mu-\lambda-\nu)x_2 + (2\lambda-\nu)x_3 - (3\mu+12\lambda-6\nu) = 0$

Um die erzeugenden Ebenen zu erkennen, sortieren wir nach λ, μ und ν:

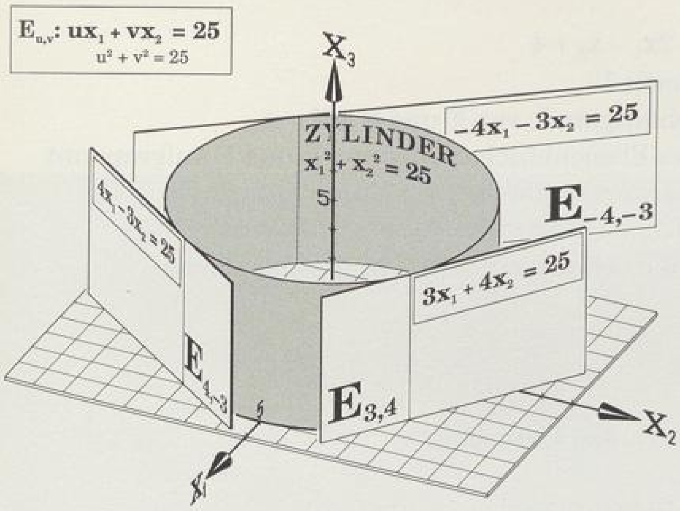
$\lambda(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) + \mu(x_1 + x_2 - 3) + \nu(2x_1 - x_2 - x_3 + 6) = 0$

E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$
G: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

E, F und G erzeugen das Bündel; ihr Schnittpunkt T(1|2|6) ist der Trägerpunkt (siehe Bild $\boxed{4}$ im Abschnitt 4). Dasselbe Bündel läßt sich auch einfacher darstellen, wenn man erzeugende Ebenen wählt, die parallel sind zu den Koordinatenebenen: $E_{\rho,\sigma,\tau}\colon\ \rho(x_1 - 1) + \sigma(x_2 - 2) + \tau(x_3 - 6) = 0$

$E_{\rho,\sigma,\tau}\colon\ \rho x_1 + \sigma x_2 + \tau x_3 - (\rho + 2\sigma + 6\tau) = 0$

Wenn der Parameter nicht linear vorkommt, dann läßt sich – außer in Sonderfällen – die Ebenenschar nicht mehr so leicht überblicken, zum Beispiel $E_{u,v}$: $ux_1 + vx_2 = 25$ mit $u^2 + v^2 = 25$. Diese Schar umfaßt alle Tangentialebenen eines Zylinders um die x_3-Achse mit Radius 5.



Aufgaben

$\boxed{1.}$ Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t der Schar E_a. Gib eine Gleichung der Ebene des zugehörigen Büschels an, die nicht in der Schar ist.

a) E_a: $ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 = 6$

b) E_a: $(1-a)x_1 + (1+a)x_2 = a$

c) E_a: $x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$

2. Die Schar E_a werde aufgespannt von den Ebenen E_0 und F.
Bestimme in der Schar E_a die Ebene, die den Punkt $P(1 \mid -1 \mid 1)$ enthält.

a) E_0: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
F: $x_1 + x_2 = 2$

b) E_0: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
F: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

c) E_0: $2x_1 = 2$
F: $x_2 = 1$

d) E_0: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$
F: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2$

• **3.** Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $E_{\lambda,\mu}$ auf

a) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \tau \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

c) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur Ebene $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1992$

d) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur x_1-Achse und um Vektor $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ Zu

4. Von Ebenen, die in Parameterform vorliegen, findet man die Schnittgerade, wenn auch mühsam, durch Gleichsetzen (Seite 194). Jemand will dieses Verfahren auf die Koordinatengleichungen anwenden und setzt die beiden linken Seiten der Gleichungen gleich:

E: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
F: $2x_1 - x_3 + 4 = 0$
Gleichsetzen: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 2x_1 - x_3 + 4$

a) Was hat er wirklich bekommen ?
b) Stelle eine Gleichung der Schnittgerade von E und F auf.
c) Bestimme eine Gleichung des Ebenenbüschels, das von E und F aufgespannt wird. Für welchen Parameterwert ergibt sich die Ebene
H: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zu **a)** ?
d) Zeige durch Rechnung, daß die Schnittgerade von **b)** in jeder Ebene des Büschels liegt.

$\boxed{5.}$ E_a: $x_1 + ax_2 + (2-a)x_3 = 2a + 4$

a) Welche Scharebene geht durch den Ursprung, welche durch (1 | 1 | 1) ?
b) Welche Scharebene ist parallel zur x_3-Achse ?
c) Welche Scharebene hat ein gleichseitiges Spurdreieck ?
d) Welche Scharebene steht senkrecht auf der x_1x_3-Ebene ?
e) Welche Scharebene ist parallel zur Gerade $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$?

• 6. E_a: $x_1 + (1-2a)x_2 + ax_3 = 1$
F_b: $x_1 + bx_2 + (1-2b)x_3 = 1$

a) Begründe, daß keine Scharebene E_a durch den Ursprung geht.
b) Bestimme die Trägergerade von E_a. Welche Ebene fehlt in der Schar?
c) Die Schnittgeraden s_a von E_a und F_a bilden eine Schar mit dem Parameter a. Bestimme eine Gleichung von s_a. Was ist los bei $a = \frac{1}{3}$?
d) Für welche Werte von a und b ist die Schnittgerade von E_a und F_b parallel zur x_2-Achse ?
e) Kann die x_1-Achse Schnittgerade von E_a und F_b sein ?

• 7. E: $x_1 + x_2 = 0$
F: $x_2 + x_3 = 0$
G: $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$

a) Stelle eine Gleichung des Ebenenbündels $H_{\lambda,\mu,\nu}$ auf, das von E, F und G aufgespannt wird. Gib den Trägerpunkt T an.
b) Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $K_{\sigma,\tau}$ auf, das im Bündel $H_{\lambda,\mu,\nu}$ steckt und den Ursprung enthält.
c) Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t des Büschels $H_{\lambda,0,\nu}$.
d) Bestimme eine möglichst einfache Darstellung $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ von $H_{\lambda,\mu,\nu}$.
e) Welche Scharebene von $H_{\lambda,\mu,\nu}$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene ? Welche Scharebenen sind parallel zur x_1-Achse ?