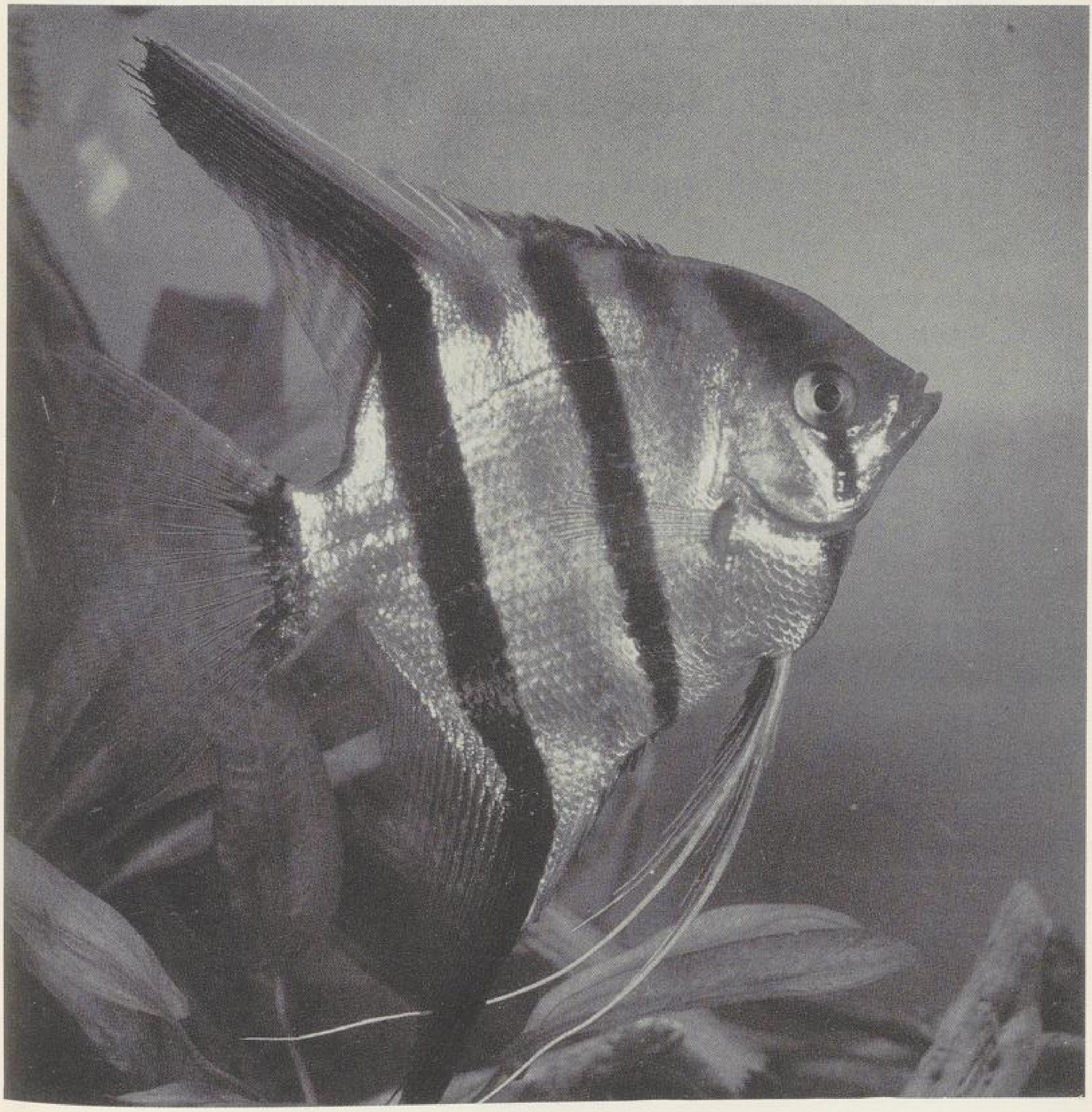
# Anschauliche analytische Geometrie

**Barth, Elisabeth**

**München, 2000**

IX. Skalarprodukt

# IX. Skalarprodukt



Die Geometrie, mit der wir uns bisher beschäftigt haben, heißt auch **affine Geometrie**. Die affine Geometrie handelt von den Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen. Man nennt sie auch Inzidenzgeometrie (*incidere* hineinfallen). Typische Begriffe der affinen Geometrie sind Schnittpunkt, Schnittgerade, Parallelität und Teilverhältnis. Affine Eigenschaften bleiben bei Parallelprojektionen erhalten; deshalb geben unsere zweidimensionalen Zeichnungen alle affinen Verhältnisse der dreidimensionalen Figuren richtig wieder. Längen und Winkel dagegen sind in diesen Zeichnungen meistens verzerrt.
Wir wenden uns jetzt dem Teil der Analytischen Geometrie zu, der sich mit der Berechnung von Längen und Winkeln befaßt. Er heißt **metrische Geometrie**. Für das Folgende setzen wir zur Vereinfachung ein kartesisches Koordinatensystem voraus. Seine Basisvektoren haben die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht.
Das wichtigste Hilfsmittel der metrischen Geometrie ist das Skalarprodukt.

## 1. Länge eines Vektors

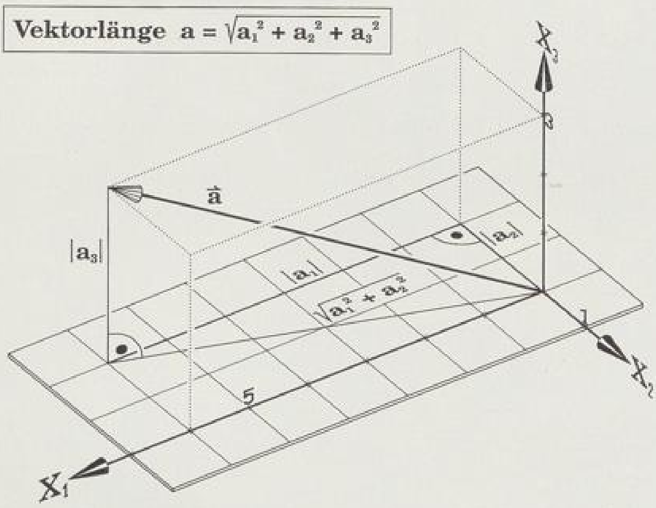
Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ bezeichnet man mit $|\vec{a}|$ oder kurz mit a: $|\vec{a}| = a$.

$|\vec{a}|$ heißt auch **Betrag** von $\vec{a}$. Die Länge von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist die Länge der Raumdiagonale im Quader mit den Kantenlängen $|a_1|$, $|a_2|$ und $|a_3|$. Wir finden sie mit Pythagoras:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$a^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \text{(Längenquadrat)}$$

$$\boxed{\textbf{Länge von } \vec{a}: |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$




Zum Beispiel hat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Länge $a = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$.

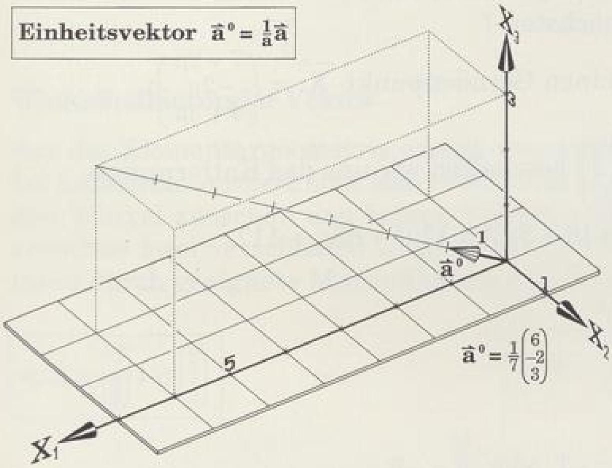
Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**.

Zum Beispiel sind $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$ Einheitsvektoren.

Den Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ bezeichnet man mit $\vec{a}^{\,0}$ (sprich "a oben null").

$\vec{a}^{\,0}$ ergibt sich aus $\vec{a}$, in dem man $\vec{a}$ durch seine Länge a teilt:

**Einheitsvektor** $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{a}\vec{a}$




**Einheitsvektor in Richtung** $\vec{a}$: $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{a}$

Zum Beispiel ist in Richtung $\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ der Einheitsvektor $\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$.

**Streckenabtragen**

Mit den Einheitsvektoren können wir im Raum Strecken bekannter Länge in vorgegebene Richtungen abtragen. Als Beispiel berechnen wir den Endpunkt Z einer Wanderung im Raum. Wir starten bei S(1 | –2 | –2), gehen 27 Einheiten in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix}$, dann 15 Einheiten in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix}$ und schließlich 18 Einheiten in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix}$.

$\vec{Z} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} + 27\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix} + 15\cdot\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix} + 18\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-8\\-4\end{pmatrix}$. Wir landen bei Z(13| –8 | –4).

**Streckenlänge**

Mit der Formel für die Vektorlänge berechnet man auch die Entfernung zweier Punkte oder die Länge einer Strecke

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$

Zum Beispiel haben die Punkte A(–4 | 1 | 3) und B(0 | –2 | 3) die Entfernung $\overline{AB} = \left|\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$.

Dazu noch ein anspruchsvolleres Problem: **Abstand Punkt-Gerade**

Gegeben ist die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\0\\9\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ und der Punkt $P(0\,|\,-2\,|\,1)$.

**a)** Welche Geradenpunkte haben von P die Entfernung $e = \sqrt{66}$?

**b)** Berechne den Abstand d von Punkt P und Gerade g, das heißt, die kleinste Entfernung $e_{min}$ eines Geradenpunkts X von P. Welcher Geradenpunkt F liegt P am nächsten ?

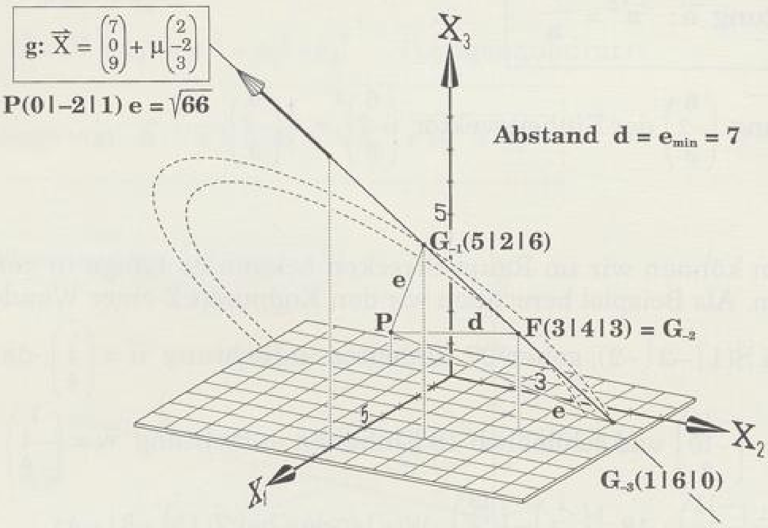
Für die Lösung brauchen wir den allgemeinen Geradenpunkt $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7+2\mu\\-2\mu\\9+3\mu\end{pmatrix}$;

aus dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}7+2\mu\\-2\mu+2\\8+3\mu\end{pmatrix}$ beschaffen wir uns das Entfernungs-quadrat $e^2 = \overrightarrow{PX}^2 = (7+2\mu)^2 + (2-2\mu)^2 + (8+3\mu)^2 = 17\mu^2 + 68\mu + 117$.

**a)** Bedingung: $17\mu^2 + 68\mu + 117 = (\sqrt{66})^2$

$$17\mu^2 + 68\mu + 117 = 66$$
$$17\mu^2 + 68\mu + 51 = 0$$
$$\mu^2 + 4\mu + 3 = 0$$
$$(\mu+1)(\mu+3) = 0, \text{ also } \mu = -1 \text{ oder } \mu = -3$$

$G_{-1}(5\,|\,2\,|\,6)$ und $G_{-3}(1\,|\,6\,|\,0)$ haben von P die Entfernung $\sqrt{66}$.




**b)** Bedingung: $e^2 = f(\mu) = 17\mu^2 + 68\mu + 117$ muß minimal sein, also muß $f'(\mu) = 0$ sein: $34\mu + 68 = 0$, also $\mu = -2$.

$e^2 = f(-2) = 49$ ist das Minimum von f wegen $f''(-2) = 34 > 0$, $e_{min} = 7$.
$F = G_{-2}(3\,|\,4\,|\,3)$ liegt P am nächsten.
P und g haben den Abstand $d = e_{min} = 7$; [PF] ist die Abstandstrecke.

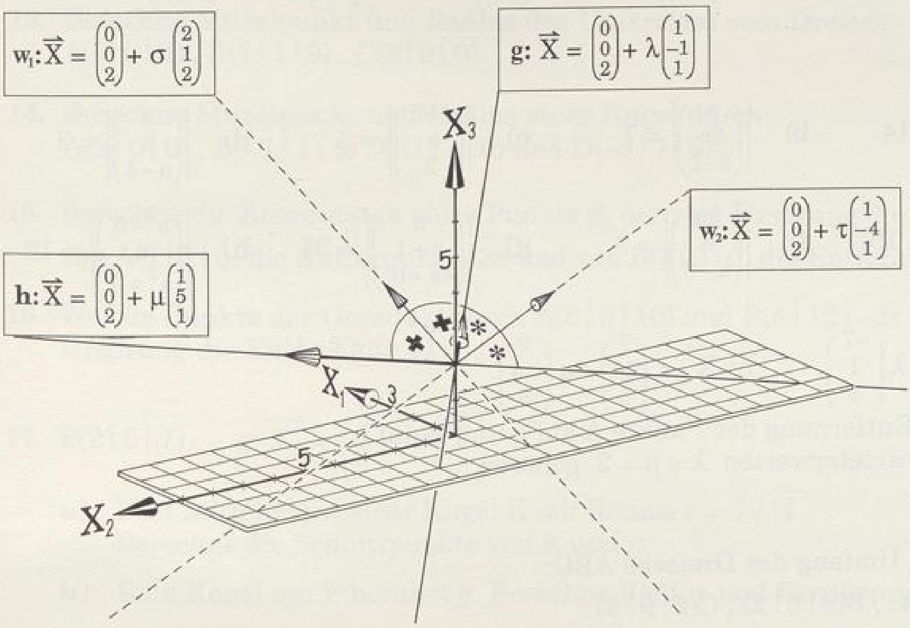
Wenn man **a)** gelöst hat und sich an einer Skizze vorstellt, wie g, P, $G_{-1}$ und $G_{-3}$ liegen, dann findet man F viel schneller als Mittelpunkt der Strecke $[G_{-1}G_{-3}]$.

Dasselbe Problem hätte man auch so einkleiden können:

a) g schneidet eine Kugel um P mit Radius $\sqrt{66}$. Berechne die Schnittpunkte.
b) g ist Tangente einer Kugel um P. Berechne Kugelradius und Berührpunkt.

**Winkelhalbierender Vektor**

Aus der Elementargeometrie wissen wir, daß die Diagonalen einer Raute die Innenwinkel halbieren. Addiert man also zwei gleich lange Vektoren, so ergibt sich ein Vektor, der den Winkel zwischen den beiden Vektoren halbiert. Man kann aber auch den Winkel zwischen zwei verschieden langen Vektoren halbieren; man muß dann vorher die Vektoren durch geeignete Multiplikation gleich lang machen.




Beispiel: Bestimme die beiden Winkelhalbierenden der Geraden

$$g\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ und } h\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \mu\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{Längen: } |\vec{u}| = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3};\ |\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{3} = 3\cdot|\vec{u}|$$

Die Richtungsvektoren der beiden Winkelhalbierenden sind

$$\overrightarrow{w_1} = \vec{v} + 3\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{w_2} = \vec{v} - 3\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichungen der Winkelhalbierenden: } w_1\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ w_2\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \tau\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

## Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne die Beträge von

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-14\\-2\\-23\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}56\\-17\\56\end{pmatrix}$

2. Zeige, daß für rationales a der Vektor $\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$ eine rationale Länge hat.

3. Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$

g) $13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}1\\1\\2{,}3\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/12\end{pmatrix}$ j) $9\begin{pmatrix}7/5\\1/2\\1/5\end{pmatrix}$ k) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\7/4\end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix}-3a\\2{,}4a\\3{,}2a\end{pmatrix}$

4. Berechne a

a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right| = 14$ b) $\left|\begin{pmatrix}a\\2a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 7$ c) $\left|\begin{pmatrix}11/5\\a\\2\end{pmatrix}\right| = 2$ d) $\left|\begin{pmatrix}a\\a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 3$

e) $\left|\begin{pmatrix}a+9\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 15$ f) $\left|\begin{pmatrix}2a\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 9$ g) $\left|\begin{pmatrix}a\\a+1\\4a+10\end{pmatrix}\right| = 31$ h) $\left|\begin{pmatrix}a^2-5\\a\\a^2+3\end{pmatrix}\right| = 13$

$\boxed{5.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-7\\1\\3\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\16\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$

Berechne die Entfernung der Punkte A auf g und B auf h, die zu den Parameterwerten $\lambda = \mu = 2$ gehören.

$\boxed{6.}$ Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

a) A(6 | 3 | −4) , B(8 | 6 | 2) , C(2 | 9 | 8)
b) A(1 | −6 | −6) , B(2 | 2 | −2) , C(0 | −2 | 2)
c) A(9 | 9 | 0) , B(−6 | 3 | 9) , C(0 | −6 | −6) , Umkreisradius ?

7. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen, und berechne den Kugelradius r.

a) A(26 | −7 | 2) , B(25 | 10 | −2) , C(2 | 14 | 23) , D(−7 | −14 | −22)
b) A(12 | 4 | 39) , B(33 | 4 | 24) , C(32 | 9 | 24) , D(31 | 24 | 12) , E(23 | 24 | 24)

8. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um M(−20 | −20 | −4) liegen, und berechne den Kugelradius r.
A(12 | −12 | −3) , B(12 | −13 | 0) , C(8 | −3 | 0) , D(8 | −4 | 3) , E(5 | 0 | 4) und F(0 | 0 | 13).

**9.** Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um $M(30 \mid 20 \mid 10)$ liegen, und berechne den Kugelradius r.
$A(-18 \mid 11 \mid 6)$, $B(-6 \mid -13 \mid 6)$, $C(-6 \mid -12 \mid 1)$, $D(-11 \mid -4 \mid -2)$, $E(-6 \mid -11 \mid -2)$, $F(-10 \mid -4 \mid -5)$ und $G(-6 \mid -4 \mid -13)$.

**10.** Durch $A(4 \mid -5 \mid 3)$ und $B(6 \mid -3 \mid 2)$ geht die Gerade g.
Bestimme die Punkte auf g,

**a)** die von A die Entfernung 9 haben **b)** die von B die Entfernung 9 haben.

**11.** Durch $P(-2 \mid 5 \mid 1)$ und $Q(-1 \mid 13 \mid -3)$ geht die Gerade h, $F(0 \mid f_2 \mid f_3)$ liegt auch auf h und ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 18.
Berechne die Schnittpunkte von Gerade und Kugel.

**12.** Berechne alle Achsenpunkte, die von $A(4 \mid 1 \mid 7)$ und $B(-8 \mid -7 \mid 1)$ gleich weit entfernt sind.

**13.** Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises vom Dreieck $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(3 \mid 9 \mid 0)$.

**14.** Berechne Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch $A(2 \mid 0 \mid 0)$, $B(-1 \mid 1 \mid 4)$, $C(1 \mid 1 \mid 0)$ und $D(-3 \mid 7 \mid 6)$.

**15.** Berechne die Koordinaten eines Punkts S, der vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{50}$, von $A(7 \mid 1 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{38}$ und von $B(3 \mid 9 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{62}$ hat.

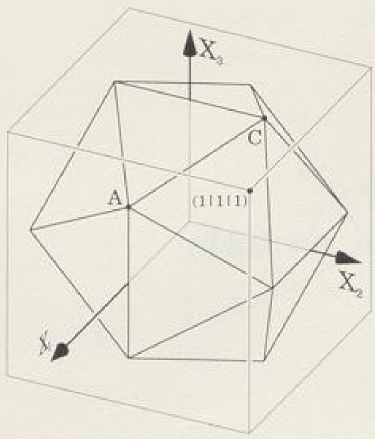
**16.** Welche Punkte der Gerade g durch $A(8 \mid 3 \mid 10)$ und $B(5 \mid 12 \mid -2)$ haben vom Ursprung die Entfernung 11 ?

• **17.** $P(2 \mid 8 \mid 7)$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

**a)** P ist Mittelpunkt einer Kugel K mit Radius $r = 3\sqrt{14}$.
Berechne die Schnittpunkte von K und g.

**b)** Eine Kugel um P berührt g. Berechne Radius und Berührpunkt.

• **18.** Ein Würfel hat die Ecke $(1 \mid 1 \mid 1)$, seine Kanten haben die Länge 2 und sind parallel zu den Koordinatenachsen. Ihm ist ein regelmäßiges Ikosaeder so einbeschrieben, daß in der Mitte jeder Würfelfläche eine Ikosaederkante parallel zu einer Würfelkante liegt. Berechne die Koordinaten der 6·2 Ecken des Ikosaeders.



**19.** Bestimme die Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von e und f und zeichne diese vier Geraden in ein ebenes $x_1x_2$-Koordinatensystem.

**a)** e: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** e: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**20.** Bestimme die Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von e und f.

e: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

• **21.** A(6 | 3 | 6) , B(−4 | −8 | 8) und der Ursprung sind die Ecken eines Dreiecks. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks OAB und den Inkreismittelpunkt I.

• **22.** Durch U(16 | −16 | 8) und den Ursprung geht die Gerade u.

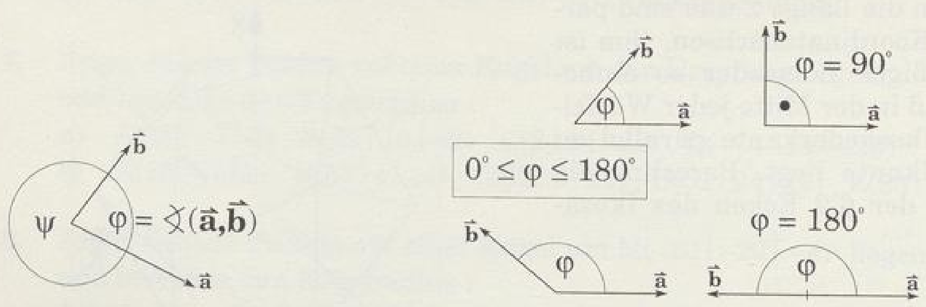
**a)** M(10 | ? | ?) auf u ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 9. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Gerade u.

**b)** Eine Kugel mit Radius 6 hat ihren Mittelpunkt auf u und schneidet u im Ursprung. Berechne den Kugelmittelpunkt und den zweiten Schnittpunkt.

**c)** Durch C(? | ? | −3) auf u geht die Gerade f mit Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von u und f.

## 2. Winkelberechnungen

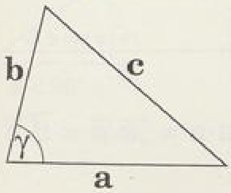
Zwei Vektoren legen zwei Winkel fest, von denen einer im allgemeinen überstumpf ist. Den andern bezeichnen wir als Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Weil wir Längen schon berechnen können, liegt es nahe, den Kosinussatz für die Winkelberechnung einzuspannen. In einem Vektordreieck sieht das so aus:

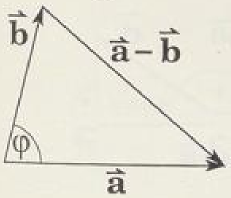
Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 - 2 \cdot |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$




**Kosinussatz**

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$$




$$\mathbf{a = |\vec{a}| \quad b = |\vec{b}| \quad c = |\vec{a} - \vec{b}|}$$

$$\mathbf{|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi}$$

Nach dem Ausquadrieren fallen alle Quadrate $a_i{}^2$ und $b_i{}^2$ weg und übrig bleibt:

$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$

Den Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ kürzt man ab mit $\vec{a} \circ \vec{b}$. Weil seine Eigenschaften an ein Produkt erinnern, nennt man ihn auch Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

**Definition**:

Die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

heißt **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Damit gilt $\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi}$

**Winkel zwischen zwei Vektoren**

Ist weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ der Nullvektor, so findet man ihren Zwischenwinkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\boxed{\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}}$$

Die Kosinusfunktion ist für $0° \leq \varphi \leq 180°$ eineindeutig; deshalb liefert die Formel gerade den Winkel, den wir oben als Winkel zwischen zwei Vektoren eingeführt haben.

Beispiele: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -42 + 18 - 12 = -36; \quad a = \sqrt{121} = 11, \; b = \sqrt{49} = 7;$

$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-36}{11 \cdot 7} = -\frac{36}{77}$ ; $\Rightarrow \varphi = 117{,}9°$. Wir geben Winkel immer auf 0,1° gerundet an und schreiben aus Bequemlichkeit = statt ≈ .

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = ?$

$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 + 10 - 12 = 0; \qquad \cos \varphi = \frac{0}{uv} = 0; \Rightarrow \varphi = 90°$

**Orthogonale und parallele Vektoren**

Wegen $\cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$ gilt

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{für } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man also mit einem Blick überprüfen, ob zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ nennt man auch **orthogonal**. Für parallele Vektoren gilt $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 180°$. Wegen $\cos 0° = 1$ und $\cos 180° = -1$ ist dann

$\vec{a} \circ \vec{b} = ab$ 

$\varphi = 0°$

oder

$\vec{a} \circ \vec{b} = -ab$ 

$\varphi = 180°$

**Länge und Skalarprodukt**

Wie bei Zahlen schreibt man beim Skalarprodukt auch $\vec{a}^2$ statt $\vec{a} \circ \vec{a}$. Höhere Potenzen als die zweiten sind allerdings sinnlos, denn zum Beispiel bei $(\vec{a} \circ \vec{a}) \circ \vec{a}$ müßte die Zahl $\vec{a} \circ \vec{a}$ durch ein Skalarprodukt mit dem Vektor $\vec{a}$ verknüpft werden.

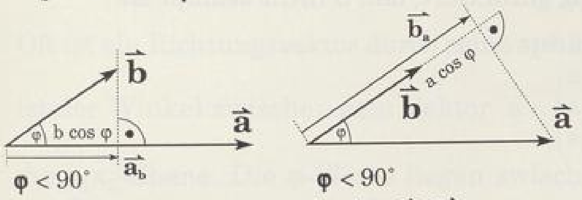
Wegen $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$ ergibt sich $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Diese Formel erinnert an die Formel für Zahlen $|x| = \sqrt{x^2}$.

**Geometrische Deutung des Skalarprodukts**

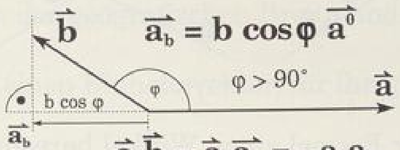
Bezeichnet man mit $\overrightarrow{a_b}$ die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$, dann kann man der Zeichnung entnehmen:

$\overrightarrow{a_b} = b \cos\varphi\, \overrightarrow{a^0}$ $\qquad$ $\overrightarrow{b_a} = a \cos\varphi\, \overrightarrow{b^0}$



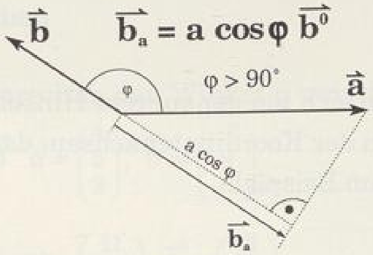

$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \overrightarrow{a_b} = a \cdot a_b$ $\qquad$ $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \overrightarrow{b_a} = b \cdot b_a$

$\overrightarrow{a_b} = b \cos\varphi\, \overrightarrow{a^0}$




$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \overrightarrow{a_b} = -a \cdot a_b$

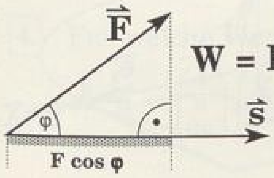
$\overrightarrow{b_a} = a \cos\varphi\, \overrightarrow{b^0}$



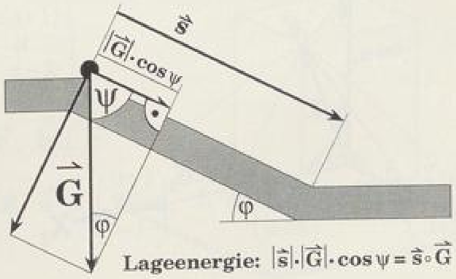

$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \overrightarrow{b_a} = -b \cdot b_a$

Für $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich dem Produkt der Länge eines Vektors und der Länge der senkrechten Projektion des andern auf ihn.
Für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ muß man das Produkt der Längen mit $-1$ multiplizieren.

Diese Interpretation verwenden die Physiker manchmal zur Formulierung von Gesetzen, Beispiel: die mechanische Arbeit W als das Skalarprodukt des Kraftvektors $\vec{F}$ und des Streckenvektors $\vec{s}$. So gilt zum Beispiel für die frei werdende Lageenergie E einer Walze vom Gewicht G, die eine schiefe Ebene herabrollt: $E = \vec{G} \circ \vec{s}$




$W = F \cos\varphi\; s = \vec{F} \circ \vec{s}$

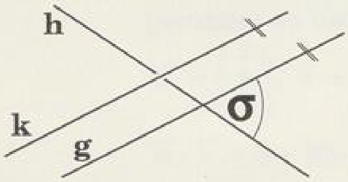


**Winkel zwischen zwei Geraden**

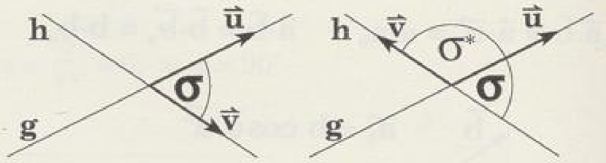
Als Schnittwinkel zweier Geraden definiert man den nichtstumpfen Winkel der Geradenkreuzung. Wegen $\cos\sigma = -\cos(180°-\sigma) = -\cos\sigma^* = |\cos\sigma^*|$ gilt

$$\boxed{\cos\sigma = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{uv}\right|}$$

Schnittwinkel $\sigma$ zweier Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Der Betrag garantiert, daß $\sigma$ nicht stumpf ist.




$$\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(k,h)$$



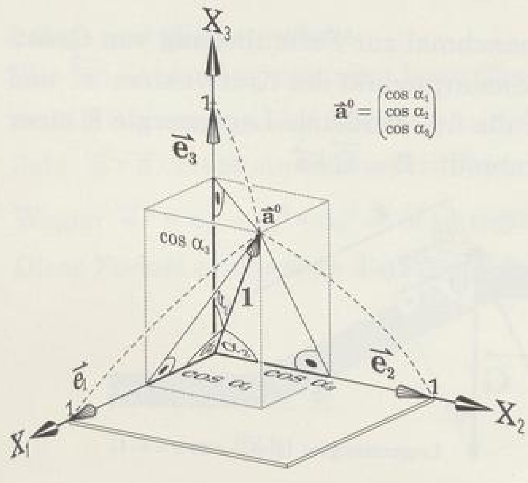

Auch bei windschiefen Geraden kann man mit dieser Formel einen Winkel berechnen. Es ist der Winkel, der sich ergibt, wenn man eine Gerade parallel so verschiebt, daß sie die andere trifft.

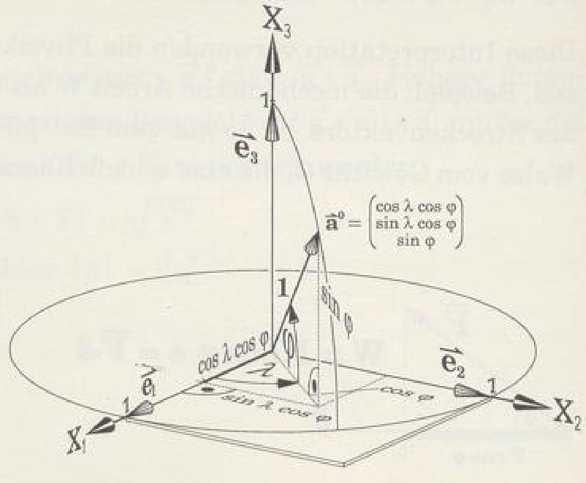
**Richtungswinkel und Einheitsvektor**

Die Koordinaten eines Einheitsvektors $\vec{a}^{\,0}$ entpuppen sich bei genauerem Hinsehen als Kosinuswerte der Winkel, die $\vec{a}^{\,0}$ mit den Richtungen der Koordinatenachsen, das heißt mit den Basisvektoren, einschließt. Es gilt nämlich zum Beispiel

$$\cos\alpha_1 = \frac{\begin{pmatrix}a_{01}\\a_{02}\\a_{03}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{a_{01}^{\;2}+a_{02}^{\;2}+a_{03}^{\;2}\cdot 1}} = a_{01} \text{ (die Wurzel hat den Wert 1)}$$

Daraus folgt $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1\\\cos\alpha_2\\\cos\alpha_3\end{pmatrix}$ mit $(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_3)^2 = 1.$



Wir nennen $\alpha_i$ den i-ten Richtungswinkel des Vektors $\vec{a}$;
$\alpha_i$ ist also der Winkel zwischen $\vec{a}$ und dem i-ten Basisvektor.

Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 8/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 63{,}6^\circ \\ \cos 27{,}3^\circ \\ \cos 96{,}4^\circ \end{pmatrix}$

Oft ist ein Richtungsvektor durch seine **sphärischen Koordinaten** $\lambda$ und $\varphi$ festgelegt. $|\varphi|$ ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und seiner senkrechten Projektion $\vec{a_\perp}$ in die $x_1x_2$-Ebene. Die $\varphi$-Werte liegen zwischen $-90^\circ$ und $+90^\circ$, $\varphi$ und $a_3$ haben dasselbe Vorzeichen. $\lambda$ ist der Winkel, um den man $\vec{e_1}$ in Richtung $\vec{e_2}$ drehen muß, bis er die Richtung von $\vec{a_\perp}$ hat. Die $\lambda$-Werte liegen zwischen $-180^\circ$ und $+180^\circ$. $\varphi$ und $\lambda$ entsprechen der geografischen Breite und Länge auf der Erde. Zu jedem Paar $(\lambda \mid \varphi)$ gibt es genau einen Einheitsvektor, für ihn gilt $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

**Aufgaben**

**1.** Berechne den Winkel $\varphi$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 55 \\ -88 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 63 \\ -70 \\ 56 \end{pmatrix}$ e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

**2.** Welche Winkel schließen die Gerade g und die Koordinatenachsen ein ?

a) g: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

**3.** Zeige, daß die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen.

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$

**4.** Für welche Werte von u ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix}$

5. Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 45° ?

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\u\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}u\\u\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-4\\2u\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\u\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-9\\2u\\8\end{pmatrix}$

: 6. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

K sei ein gerader Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 90°,
seine Spitze liegt im Ursprung, seine Achse verläuft in Richtung $\vec{a}$.
In welchen Punkten schneiden sich g und K ? (Vergleiche **5. a)** )

7. Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 60° ?

a) $\begin{pmatrix}u\\u\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\10\\-u\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\u\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\3\\u\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}5\\5\\u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}u\\4\\3u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\u\\4\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}4\\9\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\u\\2u+1\end{pmatrix}$

8. $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{u}$ so, daß $\vec{u}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

9. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}r\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\s\\t\end{pmatrix}$

Bestimme r, s und t so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise orthogonal sind.

$\boxed{10.}$ Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

a) A(6 | 3 | −4) , B(8 | 6 | 2) , C(2 | 9 | 8)
b) A(1 | −6 | −6) , B(2 | 2 | −2) , C(0 | −2 | 2)
c) A(9 | 9 | 0) , B(−6 | 3 | 9) , C(0 | −6 | −6)

$\boxed{11.}$ Berechne den Winkel zwischen

a) einer Raumdiagonale und einer Kante eines Würfels
b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

12. A(4 | 1 | 3) , B(4 | −2 | 6) , C(1 | 1 | 6) , D(5 | 2 | 7) Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Zeige, daß ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist.
b) Berechne den Schwerpunkt S.
c) Berechne $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC})$

$\boxed{13.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. Berechne den Winkel zwischen g und h.

**14.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A(5|1|0)$

Verbinde den Geradenpunkt für $\lambda = 2$ mit A durch die Gerade h.
Berechne den Winkel zwischen g und h und gib eine Gleichung von h an.

**15.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeige, daß g und h windschief sind, und berechne $\sphericalangle(g,h)$.

**16.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

a) Berechne den Schnittwinkel von g und h.

b) Stelle Gleichungen der Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von g und h auf und zeige, daß der Schnittwinkel der Winkelhalbierenden 90° ist.

c) Berechne $\sphericalangle(w_1, g)$, $\sphericalangle(w_1, h)$, $\sphericalangle(w_2, g)$ und $\sphericalangle(w_2, h)$.

**17.** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimme $\vec{a_b}$, die Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.

b) Bestimme $\vec{b_a}$, die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

c) Welche Besonderheit haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt $\vec{b_a} = \vec{b}$ ?

d) Zeige allgemein: $\vec{a_b} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$

**18.** Deute geometrisch

a) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$  b) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

c) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  d) $|\vec{AB} \circ \vec{AC}| \neq \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

**19.** Welche Winkel bilden der Vektor $\vec{a}$ und die Richtungen der Koordinatenachsen ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**20.** Bestimme die fehlenden Richtungswinkel eines Einheitsvektors, von dem bekannt ist:

a) $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = ?$
b) $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 30°$
c) $\alpha_1 = ?$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 180°$
d) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ wie groß ist $\alpha_1$ ?

**21.** Will man die Richtung eines Vektors mit den Richtungswinkeln festlegen, so sind diese nicht beliebig wählbar.

a) Für welchen Wert von $\alpha_1$ liegen $\alpha_2$ und $\alpha_3$ schon fest ?

b) Welche Beziehung besteht zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$, wenn durch sie $\alpha_3$ eindeutig bestimmt ist ? Wie groß ist $\alpha_3$ dann ?

c) Welche Beziehung müssen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ erfüllen, damit für $\alpha_3$ mehr als ein Wert existiert ? Wie liegen dann die zugehörigen Einheitsvektorren ?

**In Aufgabe 22. bis 26. bedeuten $\lambda$ und $\varphi$ sphärische Koordinaten.**

**22.** Zeige, daß der Vektor $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

**23.** Bestimme einen zu $\lambda$ und $\varphi$ gehörigen Richtungsvektor

a) $\lambda = 90°$, $\varphi = 60°$  b) $\lambda = 120°$, $\varphi = 45°$

c) $\lambda = -11{,}5°$, $\varphi = 48{,}1°$  d) $\varphi = -90°$

**24.** Wie muß man $\lambda$ und $\varphi$ wählen, damit die drei Richtungswinkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ gleich groß sind ? $(\lambda \mid \varphi)$ ist die Blickrichtung (=Projektionsrichtung) fürs Normalbild in *Isometrie* (gleiches Maß auf allen Achsen).

**25.** Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erscheint in einem geeigneten Koordinatensystem als Punkt.
In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

**26.** Bei der *Dimetrie* (gleiches Maß auf $x_2$- und $x_3$-Achse) ist der Projektionsvektor
$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

### 3. Eigenschaften des Skalarprodukts

Die Körperaxiome $\boxed{\text{E}}\boxed{\text{K}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{I}}\boxed{\text{D}}$ legen fest, wie man mit reellen Zahlen rechnet.

| ADDITION | | MULTIPLIKATION |
|---|---|---|
| | $\boxed{\text{E}}$xistenz<br>für alle a,b $\in\mathbb{R}$ existiert | |
| $\boxed{a + b}$ | | $\boxed{a \cdot b}$ |

## $\boxed{K}$ommutativität

für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a + b = b + a}$ $\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$

---

## $\boxed{A}$ssoziativität

für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$ $\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

---

## $\boxed{N}$eutrales Element

es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so daß für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a + 0 = a}$

es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so daß für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a \cdot 1 = a}$

---

## $\boxed{I}$nverses Element

zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine inverse Zahl $-a$,

zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es eine inverse Zahl $\frac{1}{a}$,

so daß gilt

$\boxed{a + (-a) = 0}$ $\boxed{a \cdot \frac{1}{a} = 1}$

---

## $\boxed{D}$istributivität

für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$

Die Gesetze $\boxed{E}\boxed{K}\boxed{A}\boxed{N}\boxed{I}$ gelten für Addition und Multiplikation in gleicher Weise. Der Unterschied dieser beiden Verknüpfungen zeigt sich erst im Gesetz $\boxed{D}$. In $\boxed{D}$ kommt die charakteristische Eigenschaft der Multplikation im Vergleich zur Addition zum Ausdruck. Man wird also einer Verknüpfung den Namen Produkt nur dann zugestehen, wenn zumindest dieses Gesetz gilt.

Beim Skalarprodukt gilt

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 =$$

$$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 =$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}.$$

Also gilt das Distributivgesetz für das Skalarprodukt – was seine Bezeichnung nachträglich rechtfertigt. Wie schauts mit den andern Gesetzen aus ? Man findet schnell, daß nur das Kommutativgesetz gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$. Beim Assoziativgesetz gilt wenigstens eine schwächere Form: $(\mu \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \mu(\vec{a} \circ \vec{b})$; in ihm kommen drei Multiplikationsarten vor

| | | |
|---|---|---|
| Zahl mal Vektor | $\mu \cdot \vec{a}$ | S-Multiplikation |
| Vektor mal Vektor | $\vec{a} \circ \vec{b}$ | Skalarprodukt |
| Zahl mal Zahl | $\mu(\vec{a} \circ \vec{b})$ | Zahlenprodukt. |

Man kann also mit Vektoren fast genau so rechnen wie mit Zahlen; einige Ausdrücke haben keinen Sinn, so zum Beispiel Produkte aus mehr als zwei Vektoren wie $\vec{a}^3$ und Quotienten mit Vektoren im Nenner wie $\frac{1}{\vec{a}}$ oder $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$. Es gelten aber zum Beispiel die binomischen Formeln:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2$$
$$(\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

Bei der Untersuchung abstrakter Vektorräume (zum Beispiel mehr als Dimension 3) stellt sich die Frage, wie man die Begriffe Länge und Winkel verallgemeinern kann. Ein Weg besteht darin, ein Skalarprodukt zu definieren, indem man bestimmte Eigenschaften fordert und sie im Axiomensystem eines verallgemeinerten Skalarprodukts zusammenstellt. Dabei orientiert man sich an den Gesetzen, die fürs Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ gelten:

Sind $\underline{a}$, $\underline{b}$ beliebige Elemente des abstrakten Vektorraums V, dann ist » $*$ « mit $\underline{a}*\underline{b} \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt von $\underline{a}$ und $\underline{b}$, wenn die Axiome gelten:

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{\text{I}}$ | für alle $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in V$ gilt | $(\underline{a} + \underline{b})*\underline{c} = \underline{a}*\underline{c} + \underline{b}*\underline{c}$ |
| $\boxed{\text{II}}$ | für alle $\underline{a},\underline{b} \in V$ gilt | $\underline{a}*\underline{b} = \underline{b}*\underline{a}$ |
| $\boxed{\text{III}}$ | für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\underline{a},\underline{b} \in V$ gilt | $(\mu \cdot \underline{a})*\underline{b} = \mu \cdot (\underline{a}*\underline{b})$ |
| $\boxed{\text{IV}}$ | für alle $\underline{a} \in V$, $\underline{a} \neq 0$ gilt | $\underline{a}*\underline{a} > 0$ |

Das IV. Axiom braucht man, um die Länge $|\underline{a}|$ eines Vektors $\underline{a}$ mit der Formel $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}*\underline{a}}$ zu definieren.

Einen Überblick über die möglichen Skalarprodukte erhält man, wenn man im Vektorraum eine Basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots)$ und damit eine Koordinatendarstellung hat. Wir zeigen das für einen dreidimensionalen Vektorraum:

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3$$
$$\underline{b} = \beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3$$

$$\begin{aligned}\underline{a} * \underline{b} &= (\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3) * (\beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3) \\ &= \alpha_1\beta_1\,\underline{e}_1*\underline{e}_1 + \alpha_2\beta_2\,\underline{e}_2*\underline{e}_2 + \alpha_3\beta_3\,\underline{e}_3*\underline{e}_3 + \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\,\underline{e}_1*\underline{e}_2 + \alpha_1\beta_3\,\underline{e}_1*\underline{e}_3 + \alpha_2\beta_1\,\underline{e}_2*\underline{e}_1 + \alpha_2\beta_3\,\underline{e}_2*\underline{e}_3 + \alpha_3\beta_1\,\underline{e}_3*\underline{e}_1 + \alpha_3\beta_2\,\underline{e}_3*\underline{e}_2\end{aligned}$$

Die Produkte der Basisvektoren heißen **Strukturkonstanten**. Kennt man sie, dann liegt das Skalarprodukt fest. Allerdings muß man sie so wählen, daß die Axiome erfüllt sind. Ein Vektorraum mit einem so definierten Skalarprodukt heißt **Euklidischer Vektor-**

**raum**. Das einfachste Beispiel ist das uns vertraute Skalarprodukt. Man nennt es auch **Standard-Skalarprodukt**. Seine Strukturkonstanten sind:

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \circ \overrightarrow{e_3} = 1$$

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3} \circ \overrightarrow{e_1} = 0$$

Das führt zu $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ für $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$.

Es gibt aber auch ungewöhnliche Skalarprodukte mit Strukturkonstanten wie $\underline{e}_i * \underline{e}_i = 2$ und $\underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$\underline{a} * \underline{a} = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_3)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 > 0 \quad \text{für } \underline{a} \neq \underline{0}.$$

Bei diesem Skalarprodukt gilt zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 +$$
$$+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Der Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat in diesem Skalarprodukt die »Länge« $|\underline{a}|^*$ mit

$$|\underline{a}|^{*2} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 +$$
$$+ 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

also ist $|\underline{a}|^* = 2$. (Beim Standard-Skalarprodukt hätte $\underline{a}$ die Länge $\sqrt{3}$.)

Auch einen »Winkel« könnte man mit diesem Skalarprodukt bestimmen, wenn man den Winkel $\varphi^*$ zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ definierte mit

$$\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}.$$

Als Beispiel nehmen wir $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} * \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 2 +$$
$$+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

$|\underline{a}|^* = 2$, für $\underline{b}$ ergibt sich $|\underline{b}|^* = \sqrt{6}$, also $\cos \varphi^* = \frac{2}{2\sqrt{6}}$, $\Rightarrow \varphi^* = 65{,}9°$.

(Beim Standard-Skalarprodukt würde sich ergeben $\cos \varphi = 0$, $\Rightarrow \varphi^* = 90°$.)

Die Definition $\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ hat nur einen Sinn, wenn $-1 \leq \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \leq 1$ garantiert ist. Tatsächlich gilt für jedes Skalarprodukt die Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ:

$$(\underline{a} * \underline{b})^2 \leq (\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b})$$

Beweis: Für $\underline{b} = \underline{0}$ stimmt die Beziehung.

Nun sei $\underline{b} \neq \underline{0}$. Wegen $\boxed{\text{IV}}$ gilt für $\mu \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\underline{a} + \mu\,\underline{b}) * (\underline{a} + \mu\,\underline{b})$$

$0 \leq \underline{a} * \underline{a} + 2\mu\underline{a} * \underline{b} + \mu^2\underline{b} * \underline{b}$ ; setzt man $\mu = -\frac{\underline{a}*\underline{b}}{\underline{b}*\underline{b}}$, so ergibt sich

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - 2\frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}} + \frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}}$$

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - \frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}} \quad \Big\| \cdot \underline{b} * \underline{b}$$

$$0 \leq (\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b}) - (\underline{a} * \underline{b})^2 \text{ , q.e.d.}$$

Baron Augustin Louis CAUCHY (Paris 1789 bis 1857 Sceaux) hat diese Ungleichung formuliert und für endliche Folgen in seinem Cours d'analyse 1821 bewiesen.
Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf 1843 bis 1921 Berlin) hat sie 1885 im Zusammenhang mit der Untersuchung von Minimalflächen verallgemeinert.

## Aufgaben

**1.** Begründe: Die Axiome $\boxed{A}\boxed{N}\boxed{I}$ gelten für kein Skalarprodukt außer in Vektorräumen der Dimension 1.

$\boxed{2.}$ Welche der folgenden Terme beziehungsweise Gleichungen sind mathematisch sinnlos, welche Umformungen sind gültig?
$\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ seien Vektoren, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ seien Zahlen, außerdem sei $\underline{a} * \underline{b}$ ein Skalarprodukt, $\alpha \cdot \underline{a}$ eine S-Multiplikation und $\alpha \cdot \beta$ eine Zahlenmultiplikation.

**a)** $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{b} = \underline{a} * \underline{b}^2$ **b)** $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}^2$

**c)** $\underline{a} * \underline{b} = \gamma, \Rightarrow \underline{a} = \frac{\gamma}{\underline{b}}$ **d)** $\alpha \cdot (\underline{a} * \underline{b}) = \beta, \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\underline{a} * \underline{b}}$

**e)** $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot c + \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}) = 2\underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c})$

**f)** $\frac{\underline{a} * \underline{b}}{\underline{a}} = \underline{b}$ **g)** $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \underline{b}$ **h)** $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \gamma$

**3.** Beweise: $\underline{0} * \underline{c} = 0$

• **4.** Untersuche, ob mit folgender Definition ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ festliegt:

**a)** $\underline{a} * \underline{b} = a_1b_1 - 3a_1b_2 - 3a_2b_1 - a_2b_2$

**b)** $\underline{a} * \underline{b} = 3a_1b_1 - 4a_1b_2 - 4a_2b_1 + 8a_2b_2 - a_1b_3 - a_3b_1 + 4a_3b_3$

**c)** $\underline{a} * \underline{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

• **5.** Liegt überhaupt ein Skalarprodukt vor? Bestimme gegebenenfalls die Strukturkonstanten des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$:

**a)** $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 + \sqrt{5}\,(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

**b)** $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 - 3(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

**c)** $\underline{a} * \underline{b} = 4a_1b_1 + 5(a_1b_2 - a_2b_1) + 3a_2b_2$

• **6.** Bestimmen die Strukturkonstanten ein Skalarprodukt?

**a)** $\underline{e}_i^{\,2} = \alpha_i$ und $\alpha_i > 0$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

**b)** $\underline{e}_i^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \alpha$ und $|\alpha| < 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

**c)** $\underline{e}_1^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_2^{\,2} = 2$, $\quad \underline{e}_3^{\,2} = 3$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$

**d)** $\underline{e}_i^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 2$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

• **7.** Ist in einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Term
$-x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + \ldots + (-1)^n x_ny_n$
die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts gegeben?

• **8.** In einem Vektorraum mit der Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sei ein Skalarprodukt bestimmt durch die Strukturkonstanten
$\underline{e}_1^{\,2} = 1$, $\underline{e}_2^{\,2} = 2$, $\underline{e}_3^{\,2} = 3$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

**a)** Gib die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts an.

**b)** Zeige: $\underline{a}^2 > 0$ für $\underline{a} > \underline{0}$.

**c)** Berechne damit das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

**d)** Berechne die »Längen« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

**e)** Berechne den »Winkel« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

• **9.** Berechne im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor $\underline{n}$ der »Länge« 5, für den gilt $\underline{a} * \underline{n} = \underline{b} * \underline{n} = 0$; verwende das Skalarprodukt von **6. c)**. ($\underline{n}$ ist »Lotvektor« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.)

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

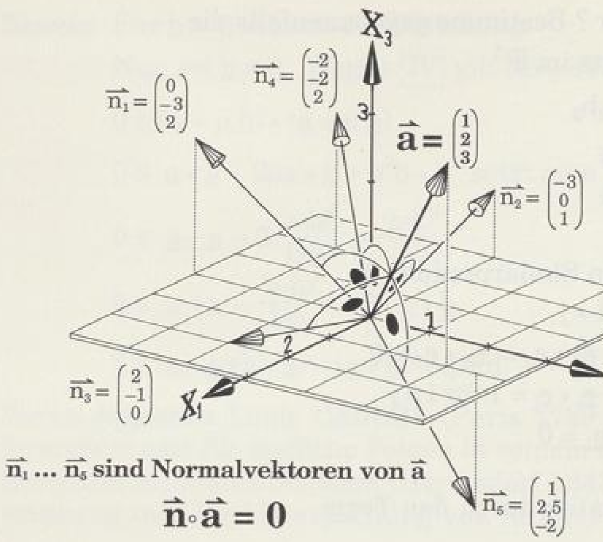
• **10.** Zeige die Gültigkeit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für das

**a)** Standard-Skalarprodukt **b)** Skalarprodukt von **6. c)**.

### 4. Anwendungen der Orthogonalität

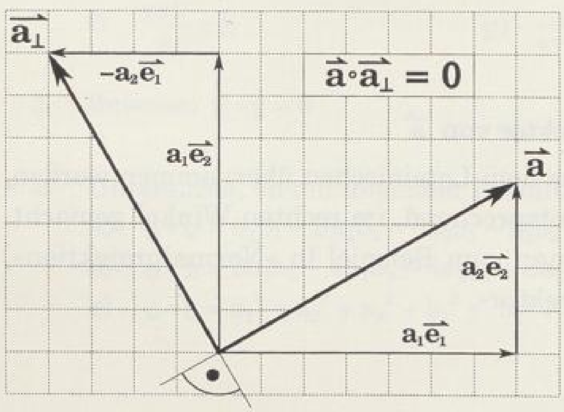
#### Vektor, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$

Vor gut 200 Jahren ist das Wort »normal« aus dem Lateinischen übernommen worden. Es leitet sich ab von *normalis* = der Norm entsprechend, im rechten Winkel gemacht. Die Bedeutung normal = senkrecht findet man zum Beispiel in »Normalprojektion«, »Normalbild«, »Normalkraft« und »Normalvektor«.




Die Aufgabe, Vektoren zu finden, die auf $\vec{a}\,(\neq \vec{o})$ senkrecht stehen, ist nicht eindeutig lösbar. Normalvektoren $\vec{n}\,(\neq \vec{o})$ von $\vec{a}$ müssen die Gleichung $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ erfüllen: $n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 = 0$. Weil man zwei Koordinaten von $\vec{n}$ frei wählen und dann die dritte daraus bestimmen kann, gibt es $\infty^2$ Lösungen. Zum Beispiel ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Gleichung $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$; mögliche Lösungen sind $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Besonders leicht findet man Normalvektoren zweidimensionaler Vektoren.

$\vec{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der senkrecht ist zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und genau so lang ist. Die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{a_\perp}$ lassen die Bedingung aus der Analysis fürs Senkrechtstehen von Geraden erkennen: Geraden parallel zu $\vec{a}$ haben die Steigung $m = \frac{a_2}{a_1}$, und die parallel zu $\vec{a_\perp}$ haben die Steigung $m = -\frac{a_1}{a_2}$, aber nur, wenn keine Koordinate gleich 0 ist.



**Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$**

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, dann ist der Normalvektor $\vec{n}$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Um $\vec{n}$ zu finden, muß man das Gleichungssystem:

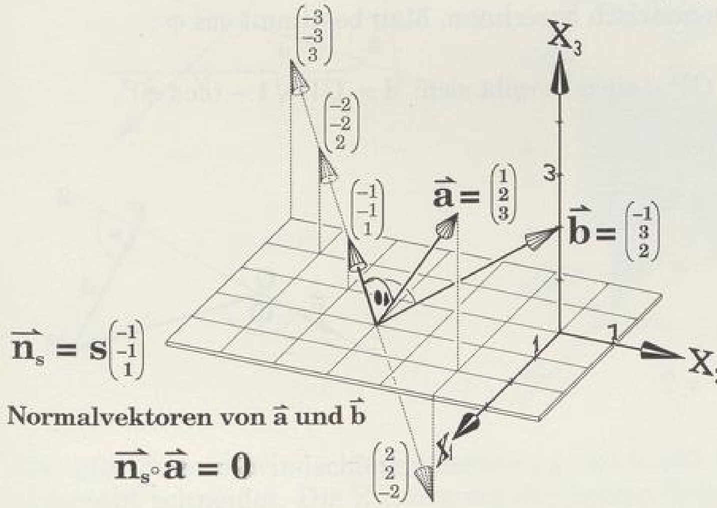
$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$$

$\vec{n} \circ \vec{b} = 0$ lösen. Dieses 2,3-System hat $\infty^1$ Lösungen.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

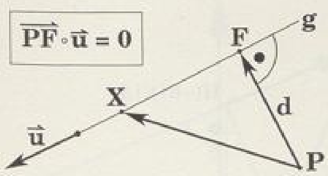
$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$$

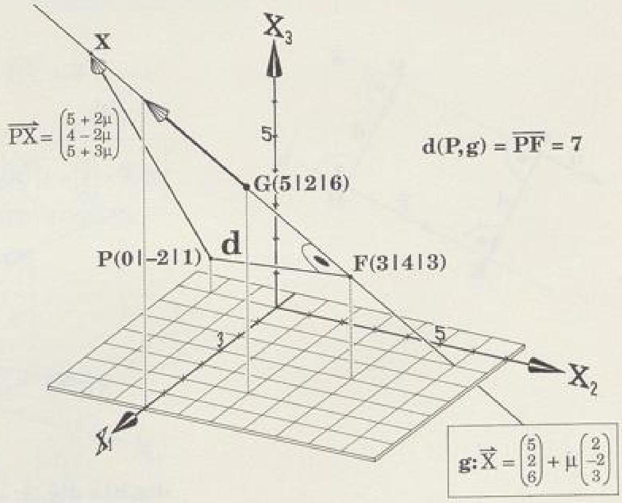
$$-n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0 \qquad \text{Lösung } \vec{n_s} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




**Abstand von Punkt und Gerade; Lotfußpunkt**

Der Abstand d ist die Länge des Lots von P auf g. Ist X allgemeiner Punkt der Gerade g: $\vec{X} = \vec{G} + \mu \vec{u}$, dann bestimmt man den Lotfußpunkt F aus der Gleichung $\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0$. Der Abstand ist dann $d = \overline{PF}$.



Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, P(0 | −2 | 1)

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5+2\mu\\2-2\mu\\6+3\mu\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}5+2\mu\\4-2\mu\\5+3\mu\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0: \quad 2(5+2\mu) - 2(4-2\mu) + 3(5+3\mu) = 0$$

$$17\mu + 17 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \text{ eingesetzt in } \overrightarrow{PX}:$$

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}, \text{ Abstand } d(P,g) = |\overrightarrow{PF}| = 7$$

zu $\mu = -1$ gehört der Lotfußpunkt F(3 | 4 | 3).
F ist derjenige Geradenpunkt, der P am nächsten liegt.

Der Abstand läßt sich auch trigonometrisch berechnen. Man bestimmt $\cos\varphi$ :

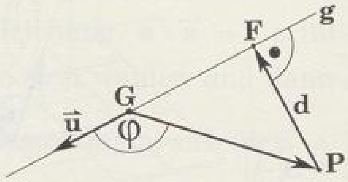
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \circ \overrightarrow{GP}}{u \cdot \overline{GP}}, \text{ und aus } d = \overline{GP} \cdot |\sin\varphi| \text{ ergibt sich: } d = \overline{GP}\sqrt{1-(\cos\varphi)^2}.$$

Im Beispiel von oben sieht das so aus:

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-5\end{pmatrix}, \qquad \overline{GP} = \sqrt{66}, \quad u = \sqrt{17}$$

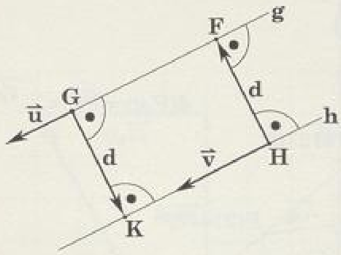
$$\cos\varphi = \frac{-17}{\sqrt{66}\sqrt{17}} = \frac{-\sqrt{17}}{\sqrt{66}};$$

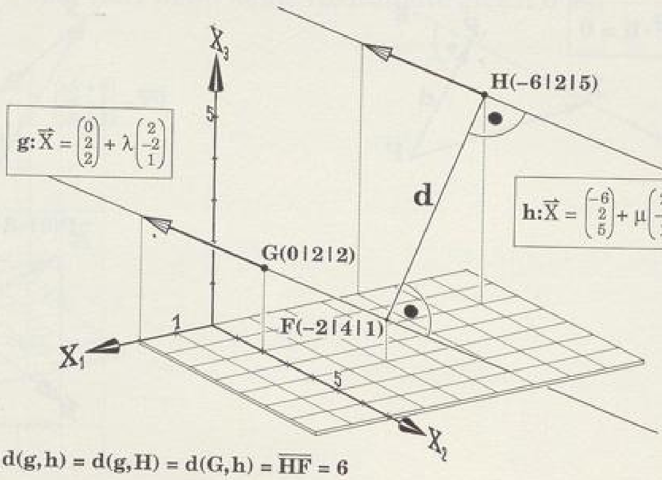
$$d = \sqrt{66}\sqrt{1-\frac{17}{66}} = \sqrt{66-17} = 7$$




## Abstand zweier Parallelen

Man führt das Problem zurück auf die im letzten Abschnitt behandelte Aufgabe: Man berechnet den Abstand eines Punkts der einen Gerade von der andern Gerade.

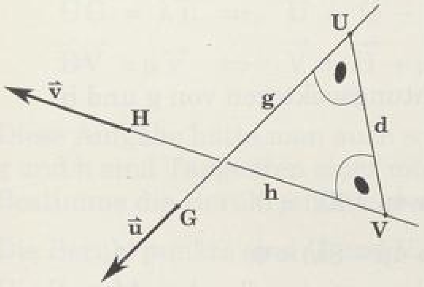


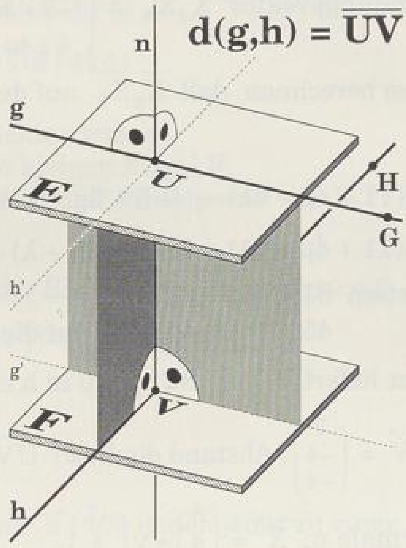




$d(g,h) = d(g,H) = d(G,h) = \overline{HF} = 6$

## Abstand zweier windschiefer Geraden

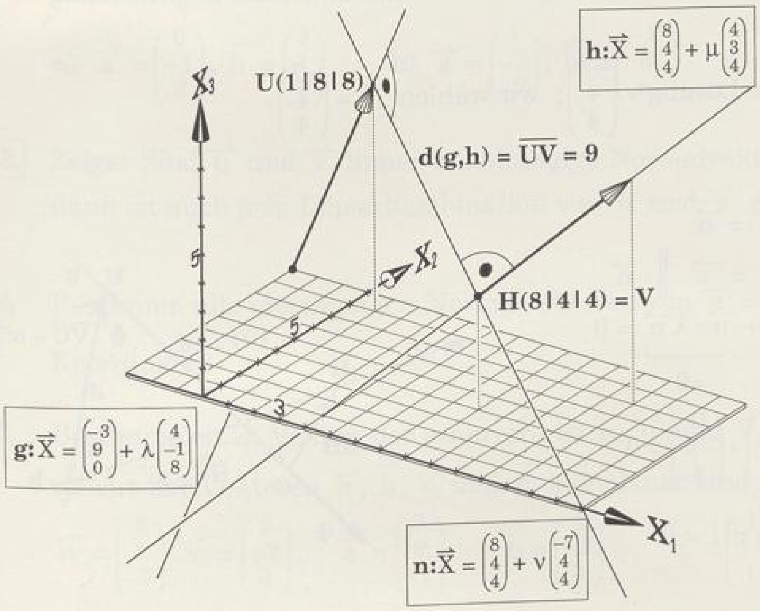
Der Abstand d(g,h) zweier windschiefer Geraden g und h ist die Länge der kürzesten Strecke, die einen Punkt von g mit einem Punkt von h verbindet. Legt man durch jede der beiden Geraden eine Ebene, die parallel ist zur anderen Gerade, dann haben diese Ebenen den Abstand d(g,h). Die Normalprojektion g' von g in F schneidet h im Fußpunkt V des gemeinsamen Lots n. (g' und h sind nicht parallel, weil g und h windschief sind.)




Also gilt: Zu zwei windschiefen Geraden g und h gibt es genau eine Gerade n, die beide senkrecht schneidet. Die Entfernung der beiden Schnittpunkte ist der Abstand von g und h. Die Gerade n heißt Normale oder gemeinsames Lot von g und h.

Es gibt mehrere Verfahren, die Schnittpunkte U und V, den Abstand d und die Normale n zu bestimmen. Zunächst führen wir zwei vor.



*Methode »Allgemeiner Punkt«*

$$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}, \qquad h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_g} = \begin{pmatrix}-3+4\lambda\\9-\lambda\\8\lambda\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{X_h} = \begin{pmatrix}8+4\mu\\4+3\mu\\4+4\mu\end{pmatrix}$$

Allgemeiner Verbindungsvektor $\overrightarrow{X_gX_h} = \begin{pmatrix}11+4\mu-4\lambda\\-5+3\mu+\lambda\\4+4\mu-8\lambda\end{pmatrix}$

$\mu$ und $\lambda$ muß man so berechnen, daß $\overrightarrow{X_gX_h}$ auf den Richtungsvektoren von g und h senkrecht steht:

$$\overrightarrow{X_gX_h} \circ \vec{u} = 0\colon \quad 4(11+4\mu-4\lambda) - (-5+3\mu+\lambda) + 8(4+4\mu-8\lambda) = 0$$

$$\overrightarrow{X_gX_h} \circ \vec{v} = 0\colon \quad 4(11+4\mu-4\lambda) + 3(-5+3\mu+\lambda) + 4(4+4\mu-8\lambda) = 0$$

Das Gleichungssystem $81 + 45\mu - 81\lambda = 0$

$45 + 41\mu - 45\lambda = 0$ hat die Lösungen $\lambda = 1, \mu = 0$.

$\lambda = 1$ in g eingesetzt liefert $U(1\,|\,8\,|\,8)$, $\mu = 0$ in h eingesetzt liefert $V(8\,|\,4\,|\,4)$.

Abstandvektor $\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix}7\\-4\\-4\end{pmatrix}$, Abstand $d(g,h) = |\overrightarrow{UV}| = 9$

Gleichung der Normale n: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$.

*Methode »Vektorkette«*

Zuerst bestimmt man den Richtungsvektor $\vec{n}$ der Normale, $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{n} \circ \vec{u} = 0\colon \quad 4n_1 - n_2 + 8n_3 = 0$

$\vec{n} \circ \vec{v} = 0\colon \quad 4n_1 + 3n_2 + 4n_3 = 0$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $\nu\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$; wir wählen $\vec{n} = \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$.

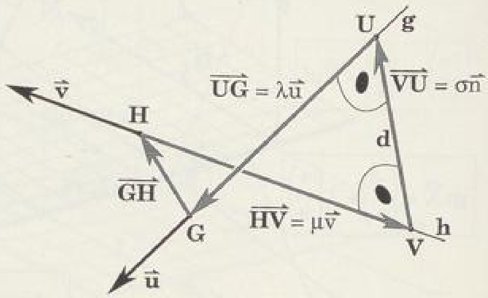
Geschlossene Vektorkette

$$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HV} + \overrightarrow{VU} + \overrightarrow{UG} = \vec{o}$$

$$\overrightarrow{GH} + \mu\vec{v} + \sigma\vec{n} + \lambda\vec{u} = \vec{o} \quad \|\circ\vec{n}$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{GH} + \underbrace{\vec{n} \circ \mu\vec{v}}_{=0} + \vec{n} \circ \sigma\vec{n} + \underbrace{\vec{n} \circ \lambda\vec{u}}_{=0} = 0$$

$$\sigma = -\frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{GH}}{\vec{n}^2} = -\frac{1}{81}\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}11\\-5\\4\end{pmatrix} = 1$$




Abstand $d(g,h) = |\overrightarrow{VU}| = |\sigma\vec{n}| = 9$

Braucht man auch noch die Punkte U und V, dann setzt man σ und $\vec{n}$ in die Vektorkette ein und löst das Gleichungssystem für μ und λ:

$$\begin{pmatrix}11\\-5\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\1\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$4\mu - 4\lambda = -4$$
$$3\mu + \lambda = 1$$
$$4\mu - 8\lambda = -8 \qquad \text{Lösungen } \lambda = 1,\ \mu = 0 \qquad \text{(Zwei Gleichungen genügen!)}$$

$$\overrightarrow{UG} = \lambda\vec{u} \Rightarrow \vec{U} = \vec{G} - \lambda\vec{u},\quad U(1\,|\,8\,|\,8)$$

$$\overrightarrow{HV} = \mu\vec{v} \Rightarrow \vec{V} = \vec{H} + \mu\vec{v},\quad V(8\,|\,4\,|\,4)$$

Diese Aufgabe hätte man auch so einkleiden können:
g und h sind Tangenten einer möglichst kleinen Kugel K.
Bestimme die Berührpunkte sowie Radius und Mittelpunkt von K.

Die Berührpunkte sind U und V.

Die Kugel hat den Durchmesser [UV]; der Radius ist $r = \frac{1}{2}d(g,h) = 4{,}5$.

Der Mittelpunkt halbiert [UV]: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{U} + \vec{V})$, M(4,5 | 6 | 6).

## Aufgaben

**1.** Bestimme drei Normalvektoren von $\vec{a}$, von denen jeder zu einer Koordinatenebene parallel ist:

**a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$

**2.** Bestimme einen Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit teilerfremden, ganzzahligen Koordinaten:

**a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\6\\\pi\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}19\\0\\-7\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}13\\0\\99\end{pmatrix}$

**3.** Zeige: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Normalvektoren von $\vec{a}$, dann ist auch jede Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Normalvektor von $\vec{a}$.

**4.** Bestimme alle gleichlangen Normalvektoren von $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Koordinaten.

**5.** Bestimme einen Vektor, der senkrecht ist zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, und untersuche, welche der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ komplanar sind zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a} = \begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{d} = \begin{pmatrix}-7\\8\\-1\end{pmatrix}$

$\boxed{6.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}20\\1\\12\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$, P(4 | 8 | −8)

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P und den Abstand von P und g.
b) Berechne den Abstand von g und Ursprung.

$\boxed{7.}$ Gib die Gleichung einer Ursprungsgerade u an,
die g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

$\boxed{8.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, P(1 | −1 | 1) Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.
b) Gib eine Gleichung der Normale n von g durch P an.
c) Berechne den Abstand von P und g.
d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

**9.** Berechne den Abstand d(P,g) und die senkrechte Projektion F von P auf g:

a) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-20\\-10\\25\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$, P(50 | 55 | 51)

b) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\11\\111\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}111\\11\\1\end{pmatrix}$, P(1000 | 110 | 120)

• **10.** g: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix}$, P(1 | 2 | 3)

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.
b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.
c) h an g gespiegelt ergibt h'. Gib eine Gleichung von h' an.

$\boxed{•11.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$. Berechne d(g,h).

• **12.** A(29 | −5 | −4), B(−3 | −27 | 12), M(16 | 11 | −8), P(4 | 8 | 19), Q(1 | −19 | 31)
g ist die Gerade durch A und B.

a) Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.
b) g ist Tangente einer Kugel um M.
Berechne den Berührpunkt T und den Kugelradius $r_b$.
c) Berechne Radius $r_c$ und Mittelpunkt $M_c$ der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und deren Mittelpunkte auf g liegen.
d) Berechne Radius $r_d$ und Mittelpunkt $M_d$ der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und g berühren. Berechne den Berührpunkt T.

e) Berechne Radius $r_e$ und Mittelpunkt $M_e$ der kleinsten aller Kugeln, die durch Q gehen und g als Zentrale haben.
Berechne die Schnittpunkte von g und dieser Kugel;
was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte ?

f) Bestimme eine Gleichung der Normale n von g durch Q.

g) Q an g gespiegelt ergibt Q'. Berechne Q'.

• **13.** g ist die Gerade durch A(8 | 13 | 3) und B(14 | 20 | −3),
h ist die Gerade durch C(10 | 19 | 12) und D(−8 | −2 | 30).

a) Berechne den Abstand d(g,h) von g und h.

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von g und h.

c) g an h gespiegelt ergibt u, und h an g gespiegelt ergibt v.
Bestimme Gleichungen von u und v.

d) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die g und h berühren ?

e) Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln, die g und h berühren ?

• **14.** $g_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\a\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$, M(−5 | 5 | 5) , V(6 | 18 | 6) , W(−6 | 12 | 0)

a) Beschreibe die Schar $g_a$ , welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden ?
Welche besondere Lage im KOSY hat die Mittelparallele von $g_7$ und $g_{-7}$ ?

b) Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7 ?

c) Welche Schargeraden berühren die Kugel um M mit Radius 9 ?

d) Bezüglich welcher Schargerade sind V und W symmetrisch ?

**•15.** Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand d(g,h) und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

c) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

d) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

e) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\16\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-5\\8\\19\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}$

f) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\15\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$

•• **16.** g: $\overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}6\\-10\\3\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\16\\7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-8\\10\\1\end{pmatrix}$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.
Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

• **17.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\9\\16\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}$

• **a)** Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.
Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von $\mu$.
Für welchen Wert von $\mu$ ist der Radius minimal ?

**b)** Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

**c)** Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel, die h und g als Tangenten hat.

## 5. Beweise

Mit dem Skalarprodukt ist es auch möglich, geometrische Sätze durch Rechnung zu beweisen. Drei Beispiele sollen das zeigen.

1. Beispiel: Hat ein Tetraeder zwei Paare orthogonaler Gegenkanten, dann sind auch die beiden restlichen Kanten orthogonal.

Vor.: $\vec{a} \circ (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \quad (2)$

Beh.: $\vec{c} \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

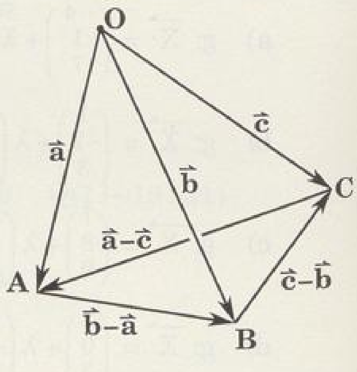
Bew.: $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0 \quad (2)$

(1) + (2): $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0$

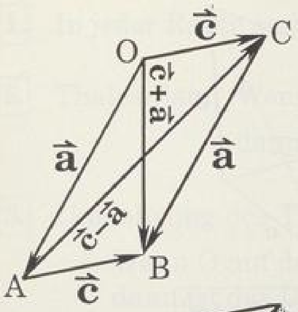
$(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$ q.e.d.

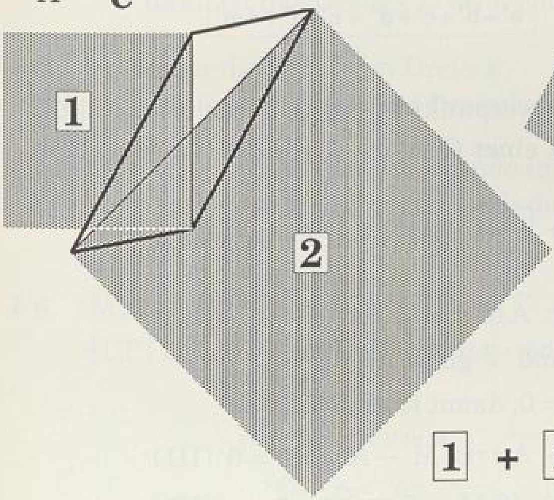
$$\boxed{\left.\begin{matrix}\mathbf{OA \perp BC}\\ \mathbf{OB \perp CA}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{OC \perp AB}}$$

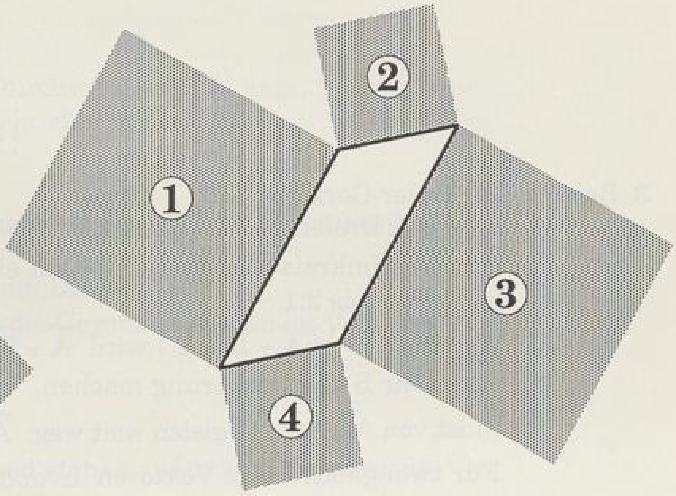



Genauso elegant lassen sich viele bekannte Sätze aus der Planimetrie mit dem Skalarprodukt beweisen.

2. Beispiel: Ein Parallelogramm-Satz und seine Verallgemeinerung:
In einem Parallelogramm sind die beiden Quadrate über den Diagonalen zusammen genau so groß wie die Quadrate über den Seiten zusammen.




$$\boxed{1} + \boxed{2} = (1) + (2) + (3) + (4)$$

Vor.: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \vec a$

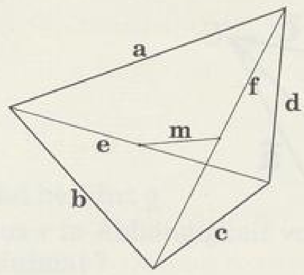
Beh.: $\overline{OB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2$

Bew.: $\overline{OB}^2 + \overline{AC}^2 = (\vec a + \vec c)^2 + (\vec c - \vec a)^2 = 2\vec a^2 + 2\vec c^2$

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2 = \vec a^2 + \vec c^2 + \vec a^2 + \vec c^2$ q.e.d.

Jetzt verallgemeinern wir den Satz auf beliebige Vierecke:
Summe der Seitenquadrate:
$\vec a^2 + \vec b^2 + \vec c^2 + (\vec a + \vec b + \vec c)^2 =$
$2\vec a^2 + 2\vec b^2 + 2\vec c^2 + 2(\vec a \circ \vec b + \vec b \circ \vec c + \vec a \circ \vec c)$
Summe der Diagonalquadrate:
$(\vec a + \vec b)^2 + (\vec b + \vec c)^2 = \vec a^2 + 2\vec b^2 + \vec c^2 + 2(\vec a \circ \vec b + \vec b \circ \vec c)$
Diese beiden Summen sind im allgemeinen nicht gleich groß,
sie unterscheiden sich um den Term $\vec a^2 + \vec c^2 + 2\vec a \circ \vec c = (\vec a + \vec c)^2$.
Dieser Korrektur-Summand hat eine geometrische Bedeutung:
Sind M und N die Mitten der Diagonalen, dann gilt
$\overrightarrow{NM} = \vec M - \vec N = \frac{1}{2}(2\vec a + \vec b + \vec c) - \frac{1}{2}(\vec a + \vec b) = \frac{1}{2}(\vec a + \vec c)$.
Damit haben wir einen Satz gefunden und bewiesen:
Die vier Quadrate über den Seiten eines Vierecks sind zusammen so groß wie

die Summe der beiden Diagonalquadrate und des vierfachen Quadrats über der Verbindung der Diagonalmitten.




$$\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4m^2}$$

3. Beispiel: Die Euler-Gerade:

In jedem Dreieck ABC liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreis-Mittelpunkt M auf einer Gerade. S teilt die Strecke [HM] im Verhältnis 2:1.

Wegen $\overrightarrow{S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$ wird $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{o}$ (I), wenn wir S zum Ursprung machen.

M ist von A, B und C gleich weit weg: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ (II)

Für zwei gleich lange Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ gilt $\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = 0$ beziehungsweise $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \circ (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 0$; damit folgt aus (II):

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \circ (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) \circ (2\overrightarrow{M} - \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) = 0 \quad \text{(III)}$$

$$\text{und} \quad (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}) \circ (2\overrightarrow{M} - \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}) = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$\text{und} \quad (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}) \circ (2\overrightarrow{M} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}) = 0 \quad \text{(V)}$$

Wir setzen $\overrightarrow{G} := -2\overrightarrow{M}$; aus (I) folgt: $-\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$. Damit wird

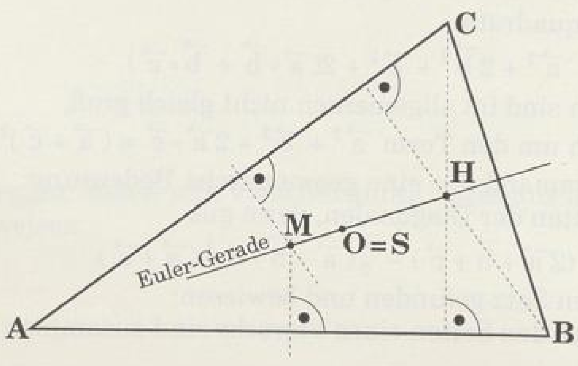
aus (III): $(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) \circ (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{GC} = 0$

aus (IV): $(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}) \circ (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{GA} = 0$

aus (V): $(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}) \circ (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{GB} = 0$

Demnach liegt G auf allen Höhen, ist also identisch mit H: G = H.

Aus $\overrightarrow{H} = -2\overrightarrow{M}$ folgen beide Behauptungen.



## Aufgaben

**Beweise folgende Sätze mit dem Skalarprodukt**

$\boxed{1.}$ In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

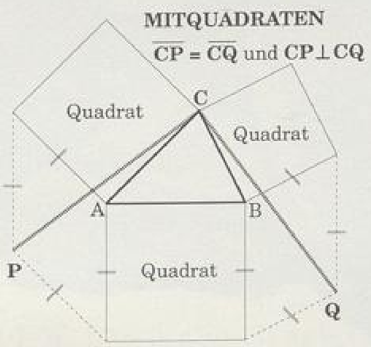
$\boxed{2.}$ Thales-Satz: Wenn ein Dreieck OVU rechtwinklig bei O ist,
dann liegt O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV] .

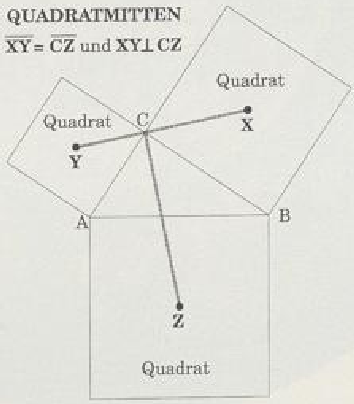
$\boxed{3.}$ Umkehrung des Thales-Satzes:
Wenn O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV] liegt,
dann ist das Dreieck OVU rechtwinklig bei O.

• **4.** Satz über die Höhen im Dreieck:
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

⁝ **5.** Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:
Jede Winkelhalbierende teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.

⁝ **6.** MITQUADRATEN
[CP] und [CQ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.




⁝ **7.** QUADRATMITTEN
X, Y und Z seien die Mitten der Quadrate über den Seiten eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC.
[XY] und [CZ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.

⁝ **8.** Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungsverhältnis zu zwei festen Punkten O und P gleich $\tau\ (\neq 1)$ ist, ist ein Kreis. (Apollonios-Kreis)

**9.** In jedem Spat sind die Quadrate über den vier Raumdiagonalen zusammen genauso groß wie die Summe der Quadrate über den zwölf Kanten.

⁝ **10.** Die Höhen eines Tetraeders treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn je zwei Gegenkanten senkrecht stehen.
(Eine Höhe ist das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche.)