Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Länge eines Vektors

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

Die Geometrie, mit der wir uns bisher beschäftigt haben, heißt auch **affine Geometrie**. Die affine Geometrie handelt von den Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen. Man nennt sie auch Inzidenzgeometrie (*incidere* hineinfallen). Typische Begriffe der affinen Geometrie sind Schnittpunkt, Schnittgerade, Parallelität und Teilverhältnis. Affine Eigenschaften bleiben bei Parallelprojektionen erhalten; deshalb geben unsere zweidimensionalen Zeichnungen alle affinen Verhältnisse der dreidimensionalen Figuren richtig wieder. Längen und Winkel dagegen sind in diesen Zeichnungen meistens verzerrt.
Wir wenden uns jetzt dem Teil der Analytischen Geometrie zu, der sich mit der Berechnung von Längen und Winkeln befaßt. Er heißt **metrische Geometrie**. Für das Folgende setzen wir zur Vereinfachung ein kartesisches Koordinatensystem voraus. Seine Basisvektoren haben die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht.
Das wichtigste Hilfsmittel der metrischen Geometrie ist das Skalarprodukt.

1. Länge eines Vektors

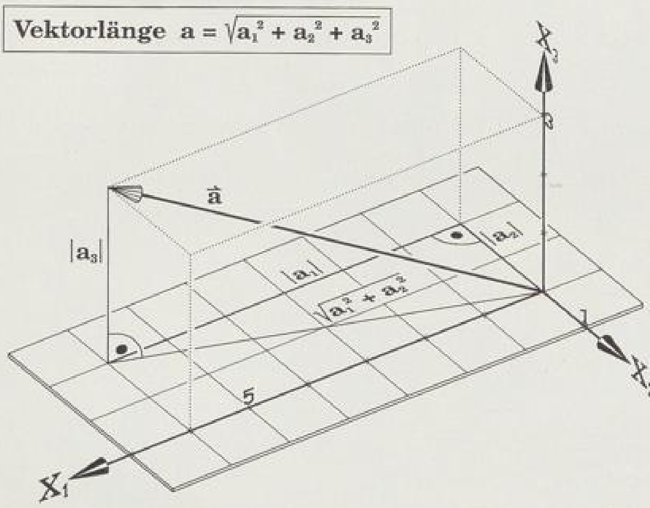
Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ bezeichnet man mit $|\vec{a}|$ oder kurz mit a: $|\vec{a}| = a$.

$|\vec{a}|$ heißt auch **Betrag** von $\vec{a}$. Die Länge von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist die Länge der Raumdiagonale im Quader mit den Kantenlängen $|a_1|$, $|a_2|$ und $|a_3|$. Wir finden sie mit Pythagoras:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$a^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \text{(Längenquadrat)}$$

$$\boxed{\textbf{Länge von } \vec{a}: |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$



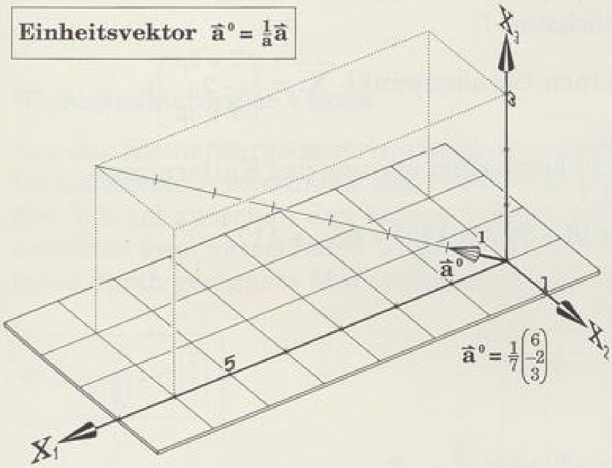
Zum Beispiel hat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Länge $a = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$.

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**.

Zum Beispiel sind $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$ Einheitsvektoren.

Den Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ bezeichnet man mit $\vec{a}^{\,0}$ (sprich "a oben null").

$\vec{a}^{\,0}$ ergibt sich aus $\vec{a}$, in dem man $\vec{a}$ durch seine Länge a teilt:



Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$: $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{a}$

Zum Beispiel ist in Richtung $\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ der Einheitsvektor $\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Streckenabtragen

Mit den Einheitsvektoren können wir im Raum Strecken bekannter Länge in vorgegebene Richtungen abtragen. Als Beispiel berechnen wir den Endpunkt Z einer Wanderung im Raum. Wir starten bei S(1 | –2 | –2), gehen 27 Einheiten in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix}$, dann 15 Einheiten in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix}$ und schließlich 18 Einheiten in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix}$.

$\vec{Z} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} + 27\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix} + 15\cdot\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-11\\-10\\2\end{pmatrix} + 18\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-8\\-4\end{pmatrix}$. Wir landen bei Z(13| –8 | –4).

Streckenlänge

Mit der Formel für die Vektorlänge berechnet man auch die Entfernung zweier Punkte oder die Länge einer Strecke

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$

Zum Beispiel haben die Punkte A(–4 | 1 | 3) und B(0 | –2 | 3) die Entfernung $\overline{AB} = \left|\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$.

Dazu noch ein anspruchsvolleres Problem: **Abstand Punkt-Gerade**

Gegeben ist die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(0 \mid -2 \mid 1)$.

a) Welche Geradenpunkte haben von P die Entfernung $e = \sqrt{66}$?
b) Berechne den Abstand d von Punkt P und Gerade g, das heißt, die kleinste Entfernung e_{min} eines Geradenpunkts X von P. Welcher Geradenpunkt F liegt P am nächsten ?

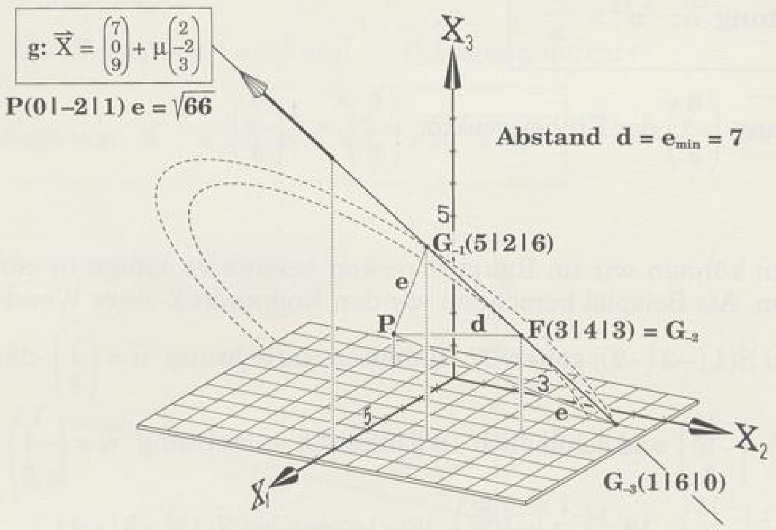
Für die Lösung brauchen wir den allgemeinen Geradenpunkt $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 + 2\mu \\ -2\mu \\ 9 + 3\mu \end{pmatrix}$;

aus dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 7 + 2\mu \\ -2\mu + 2 \\ 8 + 3\mu \end{pmatrix}$ beschaffen wir uns das Entfernungs-

quadrat $e^2 = \overrightarrow{PX}^2 = (7 + 2\mu)^2 + (2 - 2\mu)^2 + (8 + 3\mu)^2 = 17\mu^2 + 68\mu + 117$.

a) Bedingung:
$$\begin{aligned} 17\mu^2 + 68\mu + 117 &= (\sqrt{66})^2 \\ 17\mu^2 + 68\mu + 117 &= 66 \\ 17\mu^2 + 68\mu + 51 &= 0 \\ \mu^2 + 4\mu + 3 &= 0 \\ (\mu + 1)(\mu + 3) &= 0, \text{ also } \mu = -1 \text{ oder } \mu = -3 \end{aligned}$$

$G_{-1}(5 \mid 2 \mid 6)$ und $G_{-3}(1 \mid 6 \mid 0)$ haben von P die Entfernung $\sqrt{66}$.



b) Bedingung: $e^2 = f(\mu) = 17\mu^2 + 68\mu + 117$ muß minimal sein,
also muß $f'(\mu) = 0$ sein: $34\mu + 68 = 0$, also $\mu = -2$.

$e^2 = f(-2) = 49$ ist das Minimum von f wegen $f''(-2) = 34 > 0$, $e_{min} = 7$.
$F = G_{-2}(3 \mid 4 \mid 3)$ liegt P am nächsten.
P und g haben den Abstand $d = e_{min} = 7$; [PF] ist die Abstandstrecke.

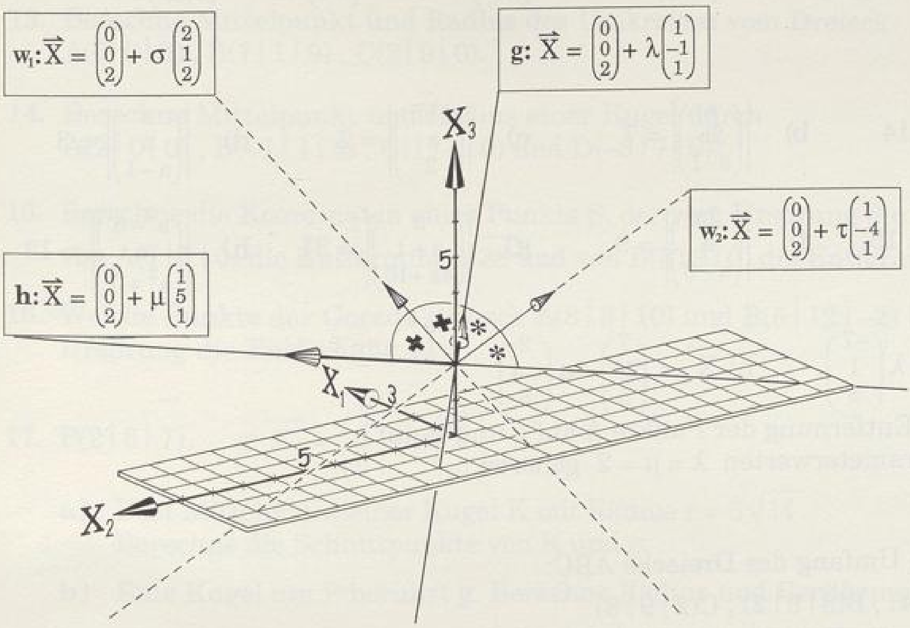
Wenn man **a)** gelöst hat und sich an einer Skizze vorstellt, wie g, P, G_{-1} und G_{-3} liegen, dann findet man F viel schneller als Mittelpunkt der Strecke $[G_{-1}G_{-3}]$.

Dasselbe Problem hätte man auch so einkleiden können:

a) g schneidet eine Kugel um P mit Radius $\sqrt{66}$. Berechne die Schnittpunkte.
b) g ist Tangente einer Kugel um P. Berechne Kugelradius und Berührpunkt.

Winkelhalbierender Vektor

Aus der Elementargeometrie wissen wir, daß die Diagonalen einer Raute die Innenwinkel halbieren. Addiert man also zwei gleich lange Vektoren, so ergibt sich ein Vektor, der den Winkel zwischen den beiden Vektoren halbiert. Man kann aber auch den Winkel zwischen zwei verschieden langen Vektoren halbieren; man muß dann vorher die Vektoren durch geeignete Multiplikation gleich lang machen.



Beispiel: Bestimme die beiden Winkelhalbierenden der Geraden

$$g\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ und } h\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \mu\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{Längen: } |\overrightarrow{u}| = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}; \quad |\overrightarrow{v}| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{3} = 3\cdot|\overrightarrow{u}|$$

Die Richtungsvektoren der beiden Winkelhalbierenden sind

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichungen der Winkelhalbierenden: } w_1\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \; w_2\colon \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \tau\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne die Beträge von

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-14\\-2\\-23\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}56\\-17\\56\end{pmatrix}$

2. Zeige, daß für rationales a der Vektor $\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$ eine rationale Länge hat.

3. Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$

g) $13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}1\\1\\2{,}3\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/12\end{pmatrix}$ j) $9\begin{pmatrix}7/5\\1/2\\1/5\end{pmatrix}$ k) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\7/4\end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix}-3a\\2{,}4a\\3{,}2a\end{pmatrix}$

4. Berechne a

a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right| = 14$ b) $\left|\begin{pmatrix}a\\2a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 7$ c) $\left|\begin{pmatrix}11/5\\a\\2\end{pmatrix}\right| = 2$ d) $\left|\begin{pmatrix}a\\a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 3$

e) $\left|\begin{pmatrix}a+9\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 15$ f) $\left|\begin{pmatrix}2a\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 9$ g) $\left|\begin{pmatrix}a\\a+1\\4a+10\end{pmatrix}\right| = 31$ h) $\left|\begin{pmatrix}a^2-5\\a\\a^2+3\end{pmatrix}\right| = 13$

$\boxed{5.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-7\\1\\3\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\16\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$

Berechne die Entfernung der Punkte A auf g und B auf h, die zu den Parameterwerten $\lambda = \mu = 2$ gehören.

$\boxed{6.}$ Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

a) A(6 | 3 | −4), B(8 | 6 | 2), C(2 | 9 | 8)
b) A(1 | −6 | −6), B(2 | 2 | −2), C(0 | −2 | 2)
c) A(9 | 9 | 0), B(−6 | 3 | 9), C(0 | −6 | −6), Umkreisradius ?

7. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen, und berechne den Kugelradius r.

a) A(26 | −7 | 2), B(25 | 10 | −2), C(2 | 14 | 23), D(−7 | −14 | −22)
b) A(12 | 4 | 39), B(33 | 4 | 24), C(32 | 9 | 24), D(31 | 24 | 12), E(23 | 24 | 24)

8. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um M(−20 | −20 | −4) liegen, und berechne den Kugelradius r.
A(12 | −12 | −3), B(12 | −13 | 0), C(8 | −3 | 0), D(8 | −4 | 3), E(5 | 0 | 4) und F(0 | 0 | 13).

9. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um $M(30 \mid 20 \mid 10)$ liegen, und berechne den Kugelradius r.
$A(-18 \mid 11 \mid 6)$, $B(-6 \mid -13 \mid 6)$, $C(-6 \mid -12 \mid 1)$, $D(-11 \mid -4 \mid -2)$,
$E(-6 \mid -11 \mid -2)$, $F(-10 \mid -4 \mid -5)$ und $G(-6 \mid -4 \mid -13)$.

10. Durch $A(4 \mid -5 \mid 3)$ und $B(6 \mid -3 \mid 2)$ geht die Gerade g.
Bestimme die Punkte auf g,
a) die von A die Entfernung 9 haben **b)** die von B die Entfernung 9 haben.

11. Durch $P(-2 \mid 5 \mid 1)$ und $Q(-1 \mid 13 \mid -3)$ geht die Gerade h, $F(0 \mid f_2 \mid f_3)$ liegt auch auf h und ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 18.
Berechne die Schnittpunkte von Gerade und Kugel.

12. Berechne alle Achsenpunkte, die von $A(4 \mid 1 \mid 7)$ und $B(-8 \mid -7 \mid 1)$ gleich weit entfernt sind.

13. Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises vom Dreieck
$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(3 \mid 9 \mid 0)$.

14. Berechne Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch
$A(2 \mid 0 \mid 0)$, $B(-1 \mid 1 \mid 4)$, $C(1 \mid 1 \mid 0)$ und $D(-3 \mid 7 \mid 6)$.

15. Berechne die Koordinaten eines Punkts S, der vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{50}$, von $A(7 \mid 1 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{38}$ und von $B(3 \mid 9 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{62}$ hat.

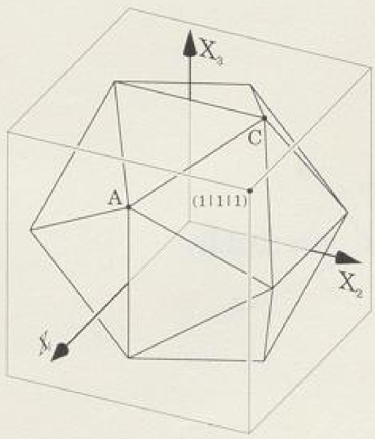
16. Welche Punkte der Gerade g durch $A(8 \mid 3 \mid 10)$ und $B(5 \mid 12 \mid -2)$ haben vom Ursprung die Entfernung 11 ?

• **17.** $P(2 \mid 8 \mid 7)$, g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) P ist Mittelpunkt einer Kugel K mit Radius $r = 3\sqrt{14}$.
Berechne die Schnittpunkte von K und g.

b) Eine Kugel um P berührt g. Berechne Radius und Berührpunkt.

• **18.** Ein Würfel hat die Ecke $(1 \mid 1 \mid 1)$, seine Kanten haben die Länge 2 und sind parallel zu den Koordinatenachsen. Ihm ist ein regelmäßiges Ikosaeder so einbeschrieben, daß in der Mitte jeder Würfelfläche eine Ikosaederkante parallel zu einer Würfelkante liegt. Berechne die Koordinaten der 6·2 Ecken des Ikosaeders.



19. Bestimme die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von e und f und zeichne diese vier Geraden in ein ebenes x_1x_2-Koordinatensystem.

a) e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

20. Bestimme die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von e und f.

e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

• **21.** A(6 | 3 | 6) , B(−4 | −8 | 8) und der Ursprung sind die Ecken eines Dreiecks. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks OAB und den Inkreismittelpunkt I.

• **22.** Durch U(16 | −16 | 8) und den Ursprung geht die Gerade u.

a) M(10 | ? | ?) auf u ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 9. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Gerade u.

b) Eine Kugel mit Radius 6 hat ihren Mittelpunkt auf u und schneidet u im Ursprung. Berechne den Kugelmittelpunkt und den zweiten Schnittpunkt.

c) Durch C(? | ? | −3) auf u geht die Gerade f mit Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von u und f.

2. Winkelberechnungen

Zwei Vektoren legen zwei Winkel fest, von denen einer im allgemeinen überstumpf ist. Den andern bezeichnen wir als Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.