Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Winkelberechnungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

19. Bestimme die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von e und f und zeichne diese vier Geraden in ein ebenes x_1x_2-Koordinatensystem.

a) e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

20. Bestimme die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von e und f.

e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

• **21.** A(6 | 3 | 6) , B(−4 | −8 | 8) und der Ursprung sind die Ecken eines Dreiecks. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks OAB und den Inkreismittelpunkt I.

• **22.** Durch U(16 | −16 | 8) und den Ursprung geht die Gerade u.

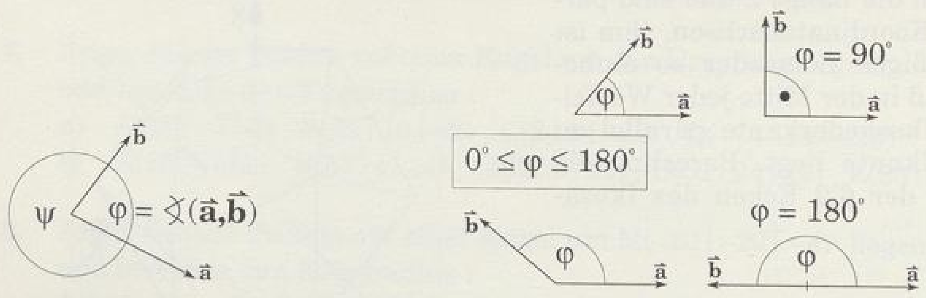
a) M(10 | ? | ?) auf u ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 9. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Gerade u.

b) Eine Kugel mit Radius 6 hat ihren Mittelpunkt auf u und schneidet u im Ursprung. Berechne den Kugelmittelpunkt und den zweiten Schnittpunkt.

c) Durch C(? | ? | −3) auf u geht die Gerade f mit Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von u und f.

2. Winkelberechnungen

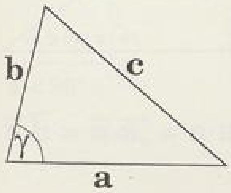
Zwei Vektoren legen zwei Winkel fest, von denen einer im allgemeinen überstumpf ist. Den andern bezeichnen wir als Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Weil wir Längen schon berechnen können, liegt es nahe, den Kosinussatz für die Winkelberechnung einzuspannen. In einem Vektordreieck sieht das so aus:

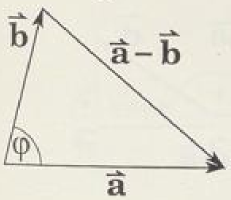
Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 - 2 \cdot |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$



Kosinussatz

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$$



$$\mathbf{a} = |\vec{\mathbf{a}}| \qquad \mathbf{b} = |\vec{\mathbf{b}}| \qquad \mathbf{c} = |\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|$$

$$|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 - 2|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\varphi$$

Nach dem Ausquadrieren fallen alle Quadrate $a_i{}^2$ und $b_i{}^2$ weg und übrig bleibt:

$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$

Den Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ kürzt man ab mit $\vec{a} \circ \vec{b}$. Weil seine Eigenschaften an ein Produkt erinnern, nennt man ihn auch Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Definition:

Die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

heißt **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Damit gilt

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Ist weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ der Nullvektor, so findet man ihren Zwischenwinkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\boxed{\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}}$$

Die Kosinusfunktion ist für $0° \le \varphi \le 180°$ eineindeutig; deshalb liefert die Formel gerade den Winkel, den wir oben als Winkel zwischen zwei Vektoren eingeführt haben.

Beispiele: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -42 + 18 - 12 = -36; \quad a = \sqrt{121} = 11, \; b = \sqrt{49} = 7;$

$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-36}{11 \cdot 7} = -\frac{36}{77}$; $\Rightarrow \varphi = 117{,}9°$. Wir geben Winkel immer auf 0,1° gerundet an und schreiben aus Bequemlichkeit = statt ≈ .

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = ?$

$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 + 10 - 12 = 0; \qquad \cos\varphi = \frac{0}{uv} = 0; \Rightarrow \varphi = 90°$

Orthogonale und parallele Vektoren

Wegen $\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \\ \text{für } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o} \end{array}}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man also mit einem Blick überprüfen, ob zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ nennt man auch **orthogonal**. Für parallele Vektoren gilt $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 180°$. Wegen $\cos 0° = 1$ und $\cos 180° = -1$ ist dann

$\mathbf{\vec{a} \circ \vec{b} = ab}$  $\boldsymbol{\varphi = 0°}$

oder

$\mathbf{\vec{a} \circ \vec{b} = -ab}$  $\boldsymbol{\varphi = 180°}$

Länge und Skalarprodukt

Wie bei Zahlen schreibt man beim Skalarprodukt auch $\vec{a}^{\,2}$ statt $\vec{a} \circ \vec{a}$. Höhere Potenzen als die zweiten sind allerdings sinnlos, denn zum Beispiel bei $(\vec{a} \circ \vec{a}) \circ \vec{a}$ müßte die Zahl $\vec{a} \circ \vec{a}$ durch ein Skalarprodukt mit dem Vektor $\vec{a}$ verknüpft werden.

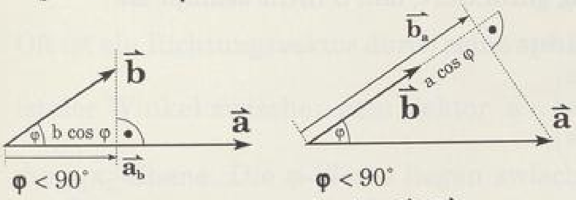
Wegen $\vec{a}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$ ergibt sich $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Diese Formel erinnert an die Formel für Zahlen $|x| = \sqrt{x^2}$.

Geometrische Deutung des Skalarprodukts

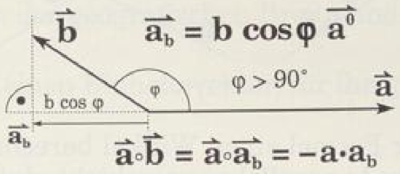
Bezeichnet man mit $\vec{a_b}$ die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$, dann kann man der Zeichnung entnehmen:

$$\vec{a_b} = b \cos\varphi\, \vec{a^0} \qquad \vec{b_a} = a \cos\varphi\, \vec{b^0}$$



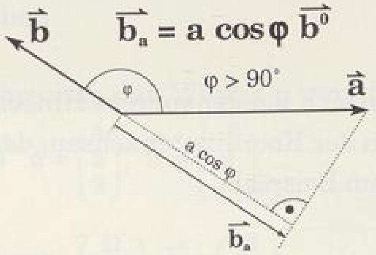
$$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\circ\vec{a_b} = a\cdot a_b \qquad \vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\circ\vec{b_a} = b\cdot b_a$$

$$\vec{a_b} = b \cos\varphi\, \vec{a^0}$$



$$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\circ\vec{a_b} = -a\cdot a_b$$

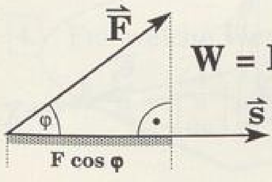
$$\vec{b_a} = a \cos\varphi\, \vec{b^0}$$



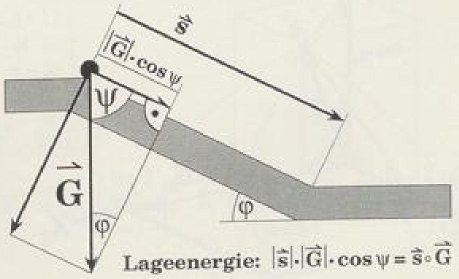
$$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\circ\vec{b_a} = -b\cdot b_a$$

Für $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich dem Produkt der Länge eines Vektors und der Länge der senkrechten Projektion des andern auf ihn.
Für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ muß man das Produkt der Längen mit -1 multiplizieren.

Diese Interpretation verwenden die Physiker manchmal zur Formulierung von Gesetzen, Beispiel: die mechanische Arbeit W als das Skalarprodukt des Kraftvektors $\vec{F}$ und des Streckenvektors $\vec{s}$. So gilt zum Beispiel für die frei werdende Lageenergie E einer Walze vom Gewicht G, die eine schiefe Ebene herabrollt: $E = \vec{G}\circ\vec{s}$



$$W = F \cos\varphi\; s = \vec{F}\circ\vec{s}$$

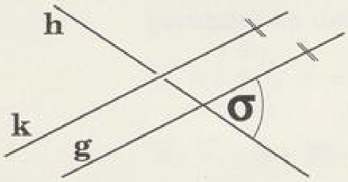


Winkel zwischen zwei Geraden

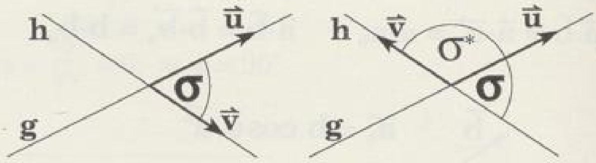
Als Schnittwinkel zweier Geraden definiert man den nichtstumpfen Winkel der Geradenkreuzung. Wegen $\cos\sigma = -\cos(180°-\sigma) = -\cos\sigma^* = |\cos\sigma^*|$ gilt

$$\boxed{\cos\sigma = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{uv}\right|}$$

Schnittwinkel σ zweier Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Der Betrag garantiert, daß σ nicht stumpf ist.



$$\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(k,h)$$



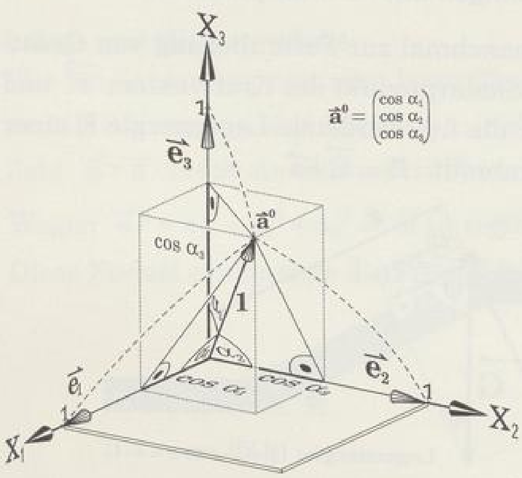
Auch bei windschiefen Geraden kann man mit dieser Formel einen Winkel berechnen. Es ist der Winkel, der sich ergibt, wenn man eine Gerade parallel so verschiebt, daß sie die andere trifft.

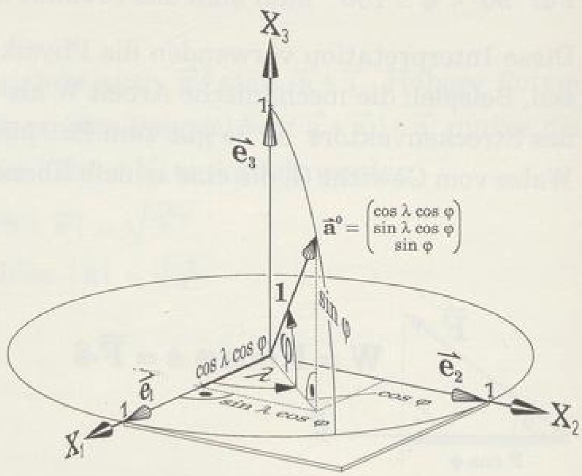
Richtungswinkel und Einheitsvektor

Die Koordinaten eines Einheitsvektors $\vec{a}^{\,0}$ entpuppen sich bei genauerem Hinsehen als Kosinuswerte der Winkel, die $\vec{a}^{\,0}$ mit den Richtungen der Koordinatenachsen, das heißt mit den Basisvektoren, einschließt. Es gilt nämlich zum Beispiel

$$\cos\alpha_1 = \frac{\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{a_{01}^{\;2} + a_{02}^{\;2} + a_{03}^{\;2} \cdot 1}} = a_{01} \text{ (die Wurzel hat den Wert 1)}$$

Daraus folgt $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$ mit $(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_3)^2 = 1$.





Wir nennen α_i den i-ten Richtungswinkel des Vektors $\vec{a}$;
α_i ist also der Winkel zwischen $\vec{a}$ und dem i-ten Basisvektor.

Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 8/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 63{,}6^\circ \\ \cos 27{,}3^\circ \\ \cos 96{,}4^\circ \end{pmatrix}$

Oft ist ein Richtungsvektor durch seine **sphärischen Koordinaten** λ und φ festgelegt. $|\varphi|$ ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und seiner senkrechten Projektion $\vec{a_\perp}$ in die x_1x_2-Ebene. Die φ-Werte liegen zwischen -90° und $+90^\circ$, φ und a_3 haben dasselbe Vorzeichen. λ ist der Winkel, um den man $\vec{e_1}$ in Richtung $\vec{e_2}$ drehen muß, bis er die Richtung von $\vec{a_\perp}$ hat. Die λ-Werte liegen zwischen -180° und $+180^\circ$. φ und λ entsprechen der geografischen Breite und Länge auf der Erde. Zu jedem Paar $(\lambda\,|\,\varphi)$ gibt es genau einen Einheitsvektor, für ihn gilt $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Aufgaben

1. Berechne den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 55 \\ -88 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 63 \\ -70 \\ 56 \end{pmatrix}$ e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Welche Winkel schließen die Gerade g und die Koordinatenachsen ein?

a) g: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Zeige, daß die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen.

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$

4. Für welche Werte von u ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix}$

5. Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 45° ?

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\u\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}u\\u\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\\2u\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1\\u\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\2u\\8\end{pmatrix}$

: 6. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

K sei ein gerader Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 90°,
seine Spitze liegt im Ursprung, seine Achse verläuft in Richtung $\vec{a}$.
In welchen Punkten schneiden sich g und K ? (Vergleiche **5. a)**)

7. Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 60° ?

a) $\begin{pmatrix}u\\u\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\10\\-u\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\u\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\3\\u\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}5\\5\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}u\\4\\3u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\u\\4\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}4\\9\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\u\\2u+1\end{pmatrix}$

8. $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{u}$ so, daß $\vec{u}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

9. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}r\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\s\\t\end{pmatrix}$

Bestimme r, s und t so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise orthogonal sind.

$\boxed{10.}$ Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

a) A(6 | 3 | −4) , B(8 | 6 | 2) , C(2 | 9 | 8)
b) A(1 | −6 | −6) , B(2 | 2 | −2) , C(0 | −2 | 2)
c) A(9 | 9 | 0) , B(−6 | 3 | 9) , C(0 | −6 | −6)

$\boxed{11.}$ Berechne den Winkel zwischen

a) einer Raumdiagonale und einer Kante eines Würfels
b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

12. A(4 | 1 | 3) , B(4 | −2 | 6) , C(1 | 1 | 6) , D(5 | 2 | 7) Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Zeige, daß ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist.
b) Berechne den Schwerpunkt S.
c) Berechne $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC})$

$\boxed{13.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. Berechne den Winkel zwischen g und h.

14. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $A(5\,|\,1\,|\,0)$

Verbinde den Geradenpunkt für $\lambda = 2$ mit A durch die Gerade h.
Berechne den Winkel zwischen g und h und gib eine Gleichung von h an.

$\boxed{15.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

Zeige, daß g und h windschief sind, und berechne $\sphericalangle(g,h)$.

16. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}$

a) Berechne den Schnittwinkel von g und h.

b) Stelle Gleichungen der Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von g und h auf und zeige, daß der Schnittwinkel der Winkelhalbierenden 90° ist.

c) Berechne $\sphericalangle(w_1, g)$, $\sphericalangle(w_1, h)$, $\sphericalangle(w_2, g)$ und $\sphericalangle(w_2, h)$.

17. $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

a) Bestimme $\overrightarrow{a_b}$, die Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.

b) Bestimme $\overrightarrow{b_a}$, die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

c) Welche Besonderheit haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt $\overrightarrow{b_a} = \vec{b}$?

d) Zeige allgemein: $\overrightarrow{a_b} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$

18. Deute geometrisch

a) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$

b) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

c) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

d) $|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}| \neq \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

19. Welche Winkel bilden der Vektor $\vec{a}$ und die Richtungen der Koordinatenachsen ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

20. Bestimme die fehlenden Richtungswinkel eines Einheitsvektors, von dem bekannt ist:

a) $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = ?$

b) $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 30°$

c) $\alpha_1 = ?$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 180°$

d) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ wie groß ist α_1 ?

21. Will man die Richtung eines Vektors mit den Richtungswinkeln festlegen, so sind diese nicht beliebig wählbar.

a) Für welchen Wert von α_1 liegen α_2 und α_3 schon fest ?

b) Welche Beziehung besteht zwischen α_1 und α_2, wenn durch sie α_3 eindeutig bestimmt ist ? Wie groß ist α_3 dann ?

c) Welche Beziehung müssen α_1 und α_2 erfüllen, damit für α_3 mehr als ein Wert existiert ? Wie liegen dann die zugehörigen Einheitsvektorren ?

In Aufgabe 22. bis 26. bedeuten λ und φ sphärische Koordinaten.

22. Zeige, daß der Vektor $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cos\varphi \\ \sin\lambda \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

23. Bestimme einen zu λ und φ gehörigen Richtungsvektor

a) $\lambda = 90^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ b) $\lambda = 120^\circ$, $\varphi = 45^\circ$

c) $\lambda = -11{,}5^\circ$, $\varphi = 48{,}1^\circ$ d) $\varphi = -90^\circ$

24. Wie muß man λ und φ wählen, damit die drei Richtungswinkel α_1, α_2 und α_3 gleich groß sind ? $(\lambda \mid \varphi)$ ist die Blickrichtung (=Projektionsrichtung) fürs Normalbild in *Isometrie* (gleiches Maß auf allen Achsen).

25. Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erscheint in einem geeigneten Koordinatensystem als Punkt.
In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

26. Bei der *Dimetrie* (gleiches Maß auf x_2- und x_3-Achse) ist der Projektionsvektor
$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

3. Eigenschaften des Skalarprodukts

Die Körperaxiome $\boxed{\text{E}}\boxed{\text{K}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{I}}\boxed{\text{D}}$ legen fest, wie man mit reellen Zahlen rechnet.

ADDITION		MULTIPLIKATION
	$\boxed{\text{E}}$xistenz für alle a,b $\in \mathbb{R}$ existiert	
$\boxed{a + b}$		$\boxed{a \cdot b}$