Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

3. Eigenschaften des Skalarprodukts

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

21. Will man die Richtung eines Vektors mit den Richtungswinkeln festlegen, so sind diese nicht beliebig wählbar.

a) Für welchen Wert von α_1 liegen α_2 und α_3 schon fest ?

b) Welche Beziehung besteht zwischen α_1 und α_2, wenn durch sie α_3 eindeutig bestimmt ist ? Wie groß ist α_3 dann ?

c) Welche Beziehung müssen α_1 und α_2 erfüllen, damit für α_3 mehr als ein Wert existiert ? Wie liegen dann die zugehörigen Einheitsvektorren ?

In Aufgabe 22. bis 26. bedeuten λ und φ sphärische Koordinaten.

22. Zeige, daß der Vektor $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

23. Bestimme einen zu λ und φ gehörigen Richtungsvektor

a) $\lambda = 90°$, $\varphi = 60°$ b) $\lambda = 120°$, $\varphi = 45°$

c) $\lambda = -11{,}5°$, $\varphi = 48{,}1°$ d) $\varphi = -90°$

24. Wie muß man λ und φ wählen, damit die drei Richtungswinkel α_1, α_2 und α_3 gleich groß sind ? $(\lambda \mid \varphi)$ ist die Blickrichtung (=Projektionsrichtung) fürs Normalbild in *Isometrie* (gleiches Maß auf allen Achsen).

25. Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erscheint in einem geeigneten Koordinatensystem als Punkt.
In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

26. Bei der *Dimetrie* (gleiches Maß auf x_2- und x_3-Achse) ist der Projektionsvektor
$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

3. Eigenschaften des Skalarprodukts

Die Körperaxiome $\boxed{\mathrm{E}}\boxed{\mathrm{K}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{N}}\boxed{\mathrm{I}}\boxed{\mathrm{D}}$ legen fest, wie man mit reellen Zahlen rechnet.

ADDITION		MULTIPLIKATION
	$\boxed{\mathrm{E}}$xistenz für alle $a,b \in \mathbb{R}$ existiert	
$\boxed{a+b}$		$\boxed{a \cdot b}$

$\boxed{\text{K}}$ommutativität

für alle a,b $\in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a + b = b + a}$ $\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$

$\boxed{\text{A}}$ssoziativität

für alle a,b,c $\in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$ $\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

$\boxed{\text{N}}$eutrales Element

es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so daß für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a + 0 = a}$

es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so daß für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{a \cdot 1 = a}$

$\boxed{\text{I}}$nverses Element

zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine inverse Zahl $-a$,

zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es eine inverse Zahl $\frac{1}{a}$,

so daß gilt

$\boxed{a + (-a) = 0}$ $\boxed{a \cdot \frac{1}{a} = 1}$

$\boxed{\text{D}}$istributivität

für alle a,b,c $\in \mathbb{R}$ gilt

$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$

Die Gesetze $\boxed{\text{E}}\boxed{\text{K}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{I}}$ gelten für Addition und Multiplikation in gleicher Weise. Der Unterschied dieser beiden Verknüpfungen zeigt sich erst im Gesetz $\boxed{\text{D}}$. In $\boxed{\text{D}}$ kommt die charakteristische Eigenschaft der Multplikation im Vergleich zur Addition zum Ausdruck. Man wird also einer Verknüpfung den Namen Produkt nur dann zugestehen, wenn zumindest dieses Gesetz gilt.

Beim Skalarprodukt gilt

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 =$$

$$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 =$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}.$$

Also gilt das Distributivgesetz für das Skalarprodukt – was seine Bezeichnung nachträglich rechtfertigt. Wie schauts mit den andern Gesetzen aus ? Man findet schnell, daß nur das Kommutativgesetz gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$. Beim Assoziativgesetz gilt wenigstens eine schwächere Form: $(\mu \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \mu(\vec{a} \circ \vec{b})$; in ihm kommen drei Multiplikationsarten vor

Zahl mal Vektor	$\mu \cdot \vec{a}$	S-Multiplikation
Vektor mal Vektor	$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt
Zahl mal Zahl	$\mu(\vec{a} \circ \vec{b})$	Zahlenprodukt.

Man kann also mit Vektoren fast genau so rechnen wie mit Zahlen; einige Ausdrücke haben keinen Sinn, so zum Beispiel Produkte aus mehr als zwei Vektoren wie $\vec{a}^3$ und Quotienten mit Vektoren im Nenner wie $\frac{1}{\vec{a}}$ oder $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$. Es gelten aber zum Beispiel die binomischen Formeln:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

Bei der Untersuchung abstrakter Vektorräume (zum Beispiel mehr als Dimension 3) stellt sich die Frage, wie man die Begriffe Länge und Winkel verallgemeinern kann. Ein Weg besteht darin, ein Skalarprodukt zu definieren, indem man bestimmte Eigenschaften fordert und sie im Axiomensystem eines verallgemeinerten Skalarprodukts zusammenstellt. Dabei orientiert man sich an den Gesetzen, die fürs Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ gelten:

Sind $\underline{a}$, $\underline{b}$ beliebige Elemente des abstrakten Vektorraums V, dann ist » $*$ « mit $\underline{a} * \underline{b} \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt von $\underline{a}$ und $\underline{b}$, wenn die Axiome gelten:

$\boxed{\text{I}}$	für alle $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in V$ gilt	$(\underline{a} + \underline{b}) * \underline{c} = \underline{a} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}$
$\boxed{\text{II}}$	für alle $\underline{a},\underline{b} \in V$ gilt	$\underline{a} * \underline{b} = \underline{b} * \underline{a}$
$\boxed{\text{III}}$	für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\underline{a},\underline{b} \in V$ gilt	$(\mu \cdot \underline{a}) * \underline{b} = \mu \cdot (\underline{a} * \underline{b})$
$\boxed{\text{IV}}$	für alle $\underline{a} \in V$, $\underline{a} \neq 0$ gilt	$\underline{a} * \underline{a} > 0$

Das IV. Axiom braucht man, um die Länge $|\underline{a}|$ eines Vektors $\underline{a}$ mit der Formel $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} * \underline{a}}$ zu definieren.

Einen Überblick über die möglichen Skalarprodukte erhält man, wenn man im Vektorraum eine Basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots)$ und damit eine Koordinatendarstellung hat. Wir zeigen das für einen dreidimensionalen Vektorraum:

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3$$
$$\underline{b} = \beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3$$

$$\begin{aligned}\underline{a} * \underline{b} &= (\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3) * (\beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3)\\ &= \alpha_1\beta_1\, \underline{e}_1 * \underline{e}_1 + \alpha_2\beta_2\, \underline{e}_2 * \underline{e}_2 + \alpha_3\beta_3\, \underline{e}_3 * \underline{e}_3 +\\ &\quad + \alpha_1\beta_2\, \underline{e}_1 * \underline{e}_2 + \alpha_1\beta_3\, \underline{e}_1 * \underline{e}_3 + \alpha_2\beta_1\, \underline{e}_2 * \underline{e}_1 + \alpha_2\beta_3\, \underline{e}_2 * \underline{e}_3 + \alpha_3\beta_1\, \underline{e}_3 * \underline{e}_1 + \alpha_3\beta_2\, \underline{e}_3 * \underline{e}_2\end{aligned}$$

Die Produkte der Basisvektoren heißen **Strukturkonstanten**. Kennt man sie, dann liegt das Skalarprodukt fest. Allerdings muß man sie so wählen, daß die Axiome erfüllt sind. Ein Vektorraum mit einem so definierten Skalarprodukt heißt **Euklidischer Vektor-**

raum. Das einfachste Beispiel ist das uns vertraute Skalarprodukt. Man nennt es auch **Standard-Skalarprodukt**. Seine Strukturkonstanten sind:

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \circ \overrightarrow{e_3} = 1$$

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3} \circ \overrightarrow{e_1} = 0$$

Das führt zu $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ für $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$.

Es gibt aber auch ungewöhnliche Skalarprodukte mit Strukturkonstanten wie $\underline{e}_i * \underline{e}_i = 2$ und $\underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{a} * \underline{a} &= 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_3)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 > 0 \quad \text{für } \underline{a} \neq \underline{0}. \end{aligned}$$

Bei diesem Skalarprodukt gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Der Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat in diesem Skalarprodukt die »Länge« $|\underline{a}|^*$ mit

$$\begin{aligned} |\underline{a}|^{*2} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + \\ &+ 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

also ist $|\underline{a}|^* = 2$. (Beim Standard-Skalarprodukt hätte $\underline{a}$ die Länge $\sqrt{3}$.)

Auch einen »Winkel« könnte man mit diesem Skalarprodukt bestimmen, wenn man den Winkel φ^* zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ definierte mit

$$\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}.$$

Als Beispiel nehmen wir $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \underline{a} * \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$|\underline{a}|^* = 2$, für $\underline{b}$ ergibt sich $|\underline{b}|^* = \sqrt{6}$, also $\cos \varphi^* = \frac{2}{2\sqrt{6}}$, $\Rightarrow \varphi^* = 65{,}9^\circ$.

(Beim Standard-Skalarprodukt würde sich ergeben $\cos \varphi = 0$, $\Rightarrow \varphi^* = 90^\circ$.)

Die Definition $\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ hat nur einen Sinn, wenn $-1 \leq \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \leq 1$ garantiert ist. Tatsächlich gilt für jedes Skalarprodukt die Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ:

$$(\underline{a} * \underline{b})^2 \leq (\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b})$$

Beweis: Für $\underline{b} = \underline{0}$ stimmt die Beziehung.

Nun sei $\underline{b} \neq \underline{0}$. Wegen $\boxed{\text{IV}}$ gilt für $\mu \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\underline{a} + \mu\, \underline{b}) * (\underline{a} + \mu\, \underline{b})$$

$0 \leq \underline{a} * \underline{a} + 2\mu \underline{a} * \underline{b} + \mu^2 \underline{b} * \underline{b}$; setzt man $\mu = -\frac{\underline{a}*\underline{b}}{\underline{b}*\underline{b}}$, so ergibt sich

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - 2\frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}} + \frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}}$$

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - \frac{(\underline{a}*\underline{b})^2}{\underline{b}*\underline{b}} \quad \Big\| \cdot \underline{b} * \underline{b}$$

$0 \leq (\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b}) - (\underline{a} * \underline{b})^2$, q.e.d.

Baron Augustin Louis CAUCHY (Paris 1789 bis 1857 Sceaux) hat diese Ungleichung formuliert und für endliche Folgen in seinem Cours d'analyse 1821 bewiesen. Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf 1843 bis 1921 Berlin) hat sie 1885 im Zusammenhang mit der Untersuchung von Minimalflächen verallgemeinert.

Aufgaben

1. Begründe: Die Axiome $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{I}}$ gelten für kein Skalarprodukt außer in Vektorräumen der Dimension 1.

$\boxed{2.}$ Welche der folgenden Terme beziehungsweise Gleichungen sind mathematisch sinnlos, welche Umformungen sind gültig ?
$\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ seien Vektoren, α, β und γ seien Zahlen, außerdem sei $\underline{a} * \underline{b}$ ein Skalarprodukt, $\alpha \cdot \underline{a}$ eine S-Multiplikation und $\alpha \cdot \beta$ eine Zahlenmultiplikation.

a) $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{b} = \underline{a} * \underline{b}^2$ **b)** $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}^2$

c) $\underline{a} * \underline{b} = \gamma, \Rightarrow \underline{a} = \frac{\gamma}{\underline{b}}$ **d)** $\alpha \cdot (\underline{a} * \underline{b}) = \beta, \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\underline{a} * \underline{b}}$

e) $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot c + \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}) = 2\underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c})$

f) $\frac{\underline{a} * \underline{b}}{\underline{a}} = \underline{b}$ **g)** $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \underline{b}$ **h)** $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \gamma$

3. Beweise: $\underline{0} * \underline{c} = 0$

• 4. Untersuche, ob mit folgender Definition ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ festliegt:

a) $\underline{a} * \underline{b} = a_1 b_1 - 3a_1 b_2 - 3a_2 b_1 - a_2 b_2$

b) $\underline{a} * \underline{b} = 3a_1 b_1 - 4a_1 b_2 - 4a_2 b_1 + 8a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1 + 4a_3 b_3$

c) $\underline{a} * \underline{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

• **5.** Liegt überhaupt ein Skalarprodukt vor ? Bestimme gegebenenfalls die Strukturkonstanten des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$:

a) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 + \sqrt{5}\,(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

b) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 - 3(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

c) $\underline{a} * \underline{b} = 4a_1b_1 + 5(a_1b_2 - a_2b_1) + 3a_2b_2$

• **6.** Bestimmen die Strukturkonstanten ein Skalarprodukt ?

a) $\underline{e}_i^{\,2} = \alpha_i$ und $\alpha_i > 0$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

b) $\underline{e}_i^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \alpha$ und $|\alpha| < 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

c) $\underline{e}_1^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_2^{\,2} = 2$, $\quad \underline{e}_3^{\,2} = 3$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$

d) $\underline{e}_i^{\,2} = 1$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 2$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

• **7.** Ist in einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Term
$-x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + \ldots + (-1)^n x_n y_n$
die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts gegeben ?

• **8.** In einem Vektorraum mit der Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sei ein Skalarprodukt bestimmt durch die Strukturkonstanten
$\underline{e}_1^{\,2} = 1$, $\underline{e}_2^{\,2} = 2$, $\underline{e}_3^{\,2} = 3$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

a) Gib die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts an.

b) Zeige: $\underline{a}^2 > 0$ für $\underline{a} > \underline{0}$.

c) Berechne damit das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d) Berechne die »Längen« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

e) Berechne den »Winkel« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

• **9.** Berechne im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor $\underline{n}$ der »Länge« 5, für den gilt $\underline{a} * \underline{n} = \underline{b} * \underline{n} = 0$; verwende das Skalarprodukt von **6. c)**. ($\underline{n}$ ist »Lotvektor« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.)

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

• **10.** Zeige die Gültigkeit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für das

a) Standard-Skalarprodukt $\qquad$ **b)** Skalarprodukt von **6. c)**.

4. Anwendungen der Orthogonalität

Vektor, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$

Vor gut 200 Jahren ist das Wort »normal« aus dem Lateinischen übernommen worden. Es leitet sich ab von *normalis* = der Norm entsprechend, im rechten Winkel gemacht. Die Bedeutung normal = senkrecht findet man zum Beispiel in »Normalprojektion«, »Normalbild«, »Normalkraft« und »Normalvektor«.