Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

5. Beweise

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

: **16.** g: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.
Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

• **17.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

• a) Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.
Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von μ.
Für welchen Wert von μ ist der Radius minimal ?

b) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel , die h und g als Tangenten hat.

5. Beweise

Mit dem Skalarprodukt ist es auch möglich, geometrische Sätze durch Rechnung zu beweisen. Drei Beispiele sollen das zeigen.

1. Beispiel: Hat ein Tetraeder zwei Paare orthogonaler Gegenkanten, dann sind auch die beiden restlichen Kanten orthogonal.

Vor.: $\vec{a} \circ (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \quad (2)$

Beh.: $\vec{c} \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

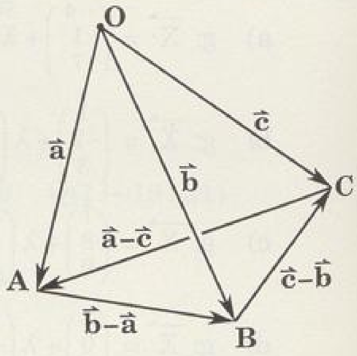
Bew.: $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0 \quad (2)$

$(1) + (2)$: $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0$

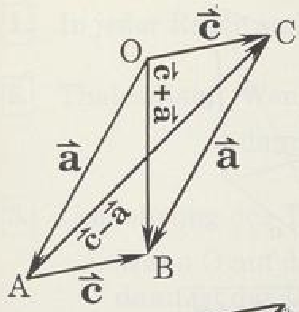
$(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$ q.e.d.

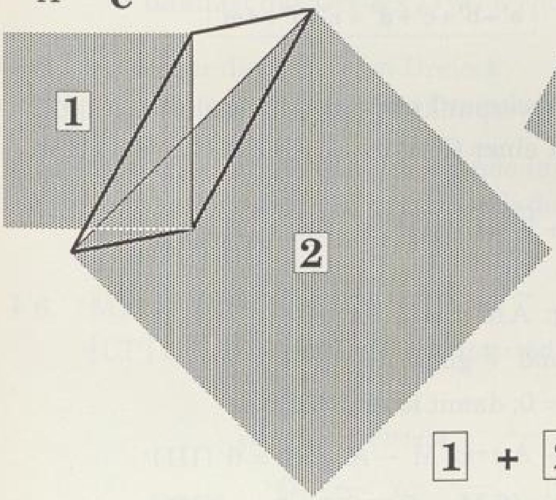
$\boxed{\left.\begin{matrix} OA \perp BC \\ OB \perp CA \end{matrix}\right\} \Rightarrow OC \perp AB}$

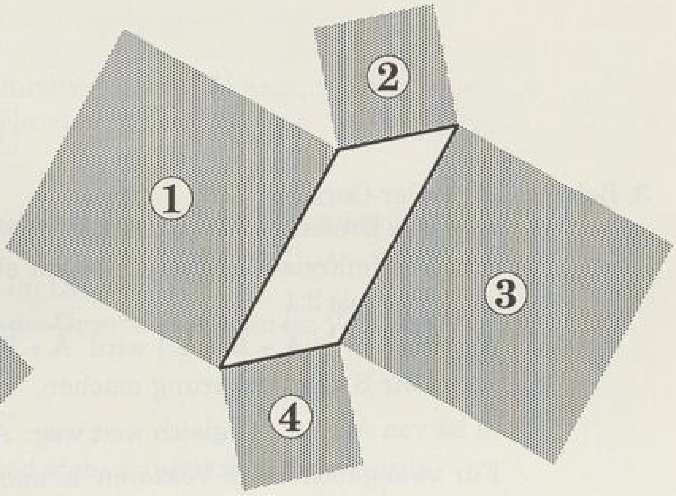


Genauso elegant lassen sich viele bekannte Sätze aus der Planimetrie mit dem Skalarprodukt beweisen.

2. Beispiel: Ein Parallelogramm-Satz und seine Verallgemeinerung:
In einem Parallelogramm sind die beiden Quadrate über den Diagonalen zusammen genau so groß wie die Quadrate über den Seiten zusammen.







$$\boxed{1} + \boxed{2} = ① + ② + ③ + ④$$

Vor.: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \vec{a}$

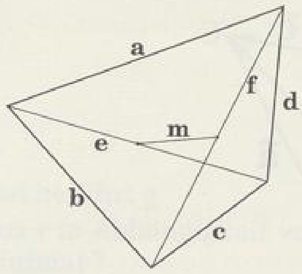
Beh.: $\overline{OB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2$

Bew.: $\overline{OB}^2 + \overline{AC}^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 + (\vec{c} - \vec{a})^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2$

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2$ q.e.d.

Jetzt verallgemeinern wir den Satz auf beliebige Vierecke:
Summe der Seitenquadrate:
$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 =$
$2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 + 2(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{a} \circ \vec{c})$
Summe der Diagonalquadrate:
$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c})$
Diese beiden Summen sind im allgemeinen nicht gleich groß,
sie unterscheiden sich um den Term $\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c})^2$.
Dieser Korrektur-Summand hat eine geometrische Bedeutung:
Sind M und N die Mitten der Diagonalen, dann gilt
$\overrightarrow{NM} = \vec{M} - \vec{N} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$.
Damit haben wir einen Satz gefunden und bewiesen:
Die vier Quadrate über den Seiten eines Vierecks sind zusammen so groß wie

die Summe der beiden Diagonalquadrate und des vierfachen Quadrats über der Verbindung der Diagonalmitten.



$$\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4m^2}$$

3. Beispiel: Die Euler-Gerade:

In jedem Dreieck ABC liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreis-Mittelpunkt M auf einer Gerade. S teilt die Strecke [HM] im Verhältnis 2:1.

Wegen $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ wird $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{o}$ (I),
wenn wir S zum Ursprung machen.

M ist von A, B und C gleich weit weg: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ (II)

Für zwei gleich lange Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt $\vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} = 0$
beziehungsweise $(\vec{u} - \vec{v}) \circ (\vec{u} + \vec{v}) = 0$; damit folgt aus (II):

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \circ (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = (\vec{B} - \vec{A}) \circ (2\vec{M} - \vec{A} - \vec{B}) = 0 \quad \text{(III)}$$

$$\text{und} \quad (\vec{C} - \vec{B}) \circ (2\vec{M} - \vec{B} - \vec{C}) = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$\text{und} \quad (\vec{A} - \vec{C}) \circ (2\vec{M} - \vec{C} - \vec{A}) = 0 \quad \text{(V)}$$

Wir setzen $\vec{G} := -2\vec{M}$; aus (I) folgt: $-\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$. Damit wird

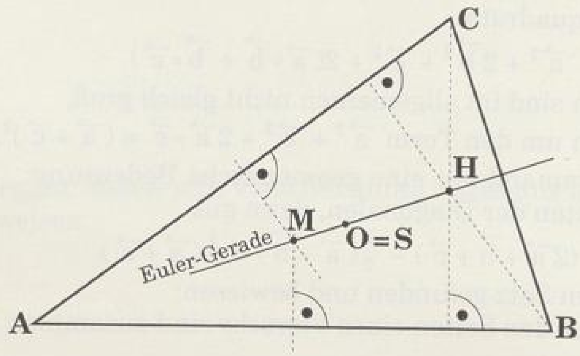
aus (III): $(\vec{B} - \vec{A}) \circ (\vec{C} - \vec{G}) = \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{GC} = 0$

aus (IV): $(\vec{C} - \vec{B}) \circ (\vec{A} - \vec{G}) = \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{GA} = 0$

aus (V): $(\vec{A} - \vec{C}) \circ (\vec{B} - \vec{G}) = \overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{GB} = 0$

Demnach liegt G auf allen Höhen, ist also identisch mit H: G = H.

Aus $\vec{H} = -2\vec{M}$ folgen beide Behauptungen.



Aufgaben

Beweise folgende Sätze mit dem Skalarprodukt

1. In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

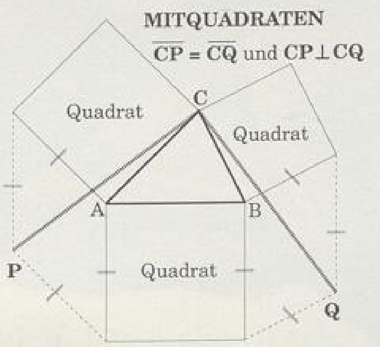
2. Thales-Satz: Wenn ein Dreieck OVU rechtwinklig bei O ist,
   dann liegt O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV].

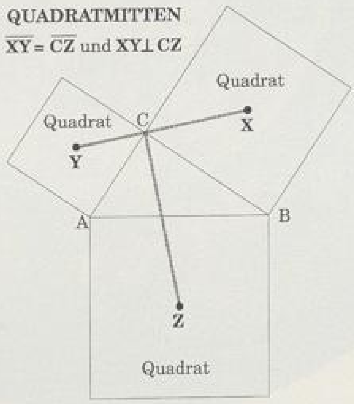
3. Umkehrung des Thales-Satzes:
   Wenn O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV] liegt,
   dann ist das Dreieck OVU rechtwinklig bei O.

• 4. Satz über die Höhen im Dreieck:
   Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

⁝ 5. Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:
   Jede Winkelhalbierende teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.

⁝ 6. MITQUADRATEN
   [CP] und [CQ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.





⁝ 7. QUADRATMITTEN
   X, Y und Z seien die Mitten der Quadrate über den Seiten eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC.
   [XY] und [CZ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.

⁝ 8. Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungsverhältnis zu zwei festen Punkten O und P gleich τ ($\neq 1$) ist, ist ein Kreis. (Apollonios-Kreis)

9. In jedem Spat sind die Quadrate über den vier Raumdiagonalen zusammen genauso groß wie die Summe der Quadrate über den zwölf Kanten.

⁝ 10. Die Höhen eines Tetraeders treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn je zwei Gegenkanten senkrecht stehen.
   (Eine Höhe ist das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche.)