Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Spatprodukt und Spatvolumen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

20. Begründe:

a) Ist $P_1P_2P_3P_4P_5$ ein ebenes konvexes Fünfeck, dann sind die Kreuzprodukte $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_{j+1}P_{j+2}}$ aufeinander folgender Seitenvektoren gleichsinnig parallel. Stimmt dieser Satz auch für konkave Fünfecke ?

b) I liege im Innern eines ebenen konvexen Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$ $\Leftrightarrow$ für alle Ecken P_j mit $P_1 = P_6$ gilt: $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$ ist bis auf einen positiven Faktor gleich $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$. Wie merkt man, daß ein Punkt auf dem Fünfeck liegt ?

21. $A(4\,|\,3\,|\,0)$, $B(6\,|\,0\,|\,1)$, $C(-4\,|\,0\,|\,6)$, $D(-8\,|\,6\,|\,4)$, $E(0\,|\,6\,|\,0)$

a) Zeige: ABCDE ist ein ebenes konvexes Fünfeck.

b) $P(-8\,|\,3\,|\,6)$, $Q(-2\,|\,3\,|\,3)$, $R(-6\,|\,3\,|\,5)$, $S(0\,|\,0\,|\,4)$, $T(0\,|\,3\,|\,2)$, $U(-6\,|\,3\,|\,4)$. Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Fünfecks ABCDE ? Welche liegen drauf ?

22. $A(1\,|\,-2\,|\,0)$, $B(-3\,|\,-6\,|\,6)$, $C(3\,|\,10\,|\,12)$, $D(5\,|\,6\,|\,0)$

a) Zeige: ABCD ist ein ebenes konvexes Viereck.

b) $P(0\,|\,2\,|\,9)$, $Q(-4\,|\,-18\,|\,-9)$, $R(0\,|\,0\,|\,0)$, $S(2\,|\,2\,|\,3)$ Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Vierecks ABCD ? Welche liegen drauf ?

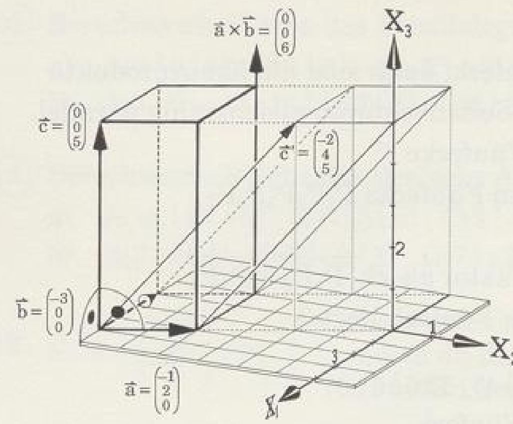
2. Spatprodukt und Spatvolumen

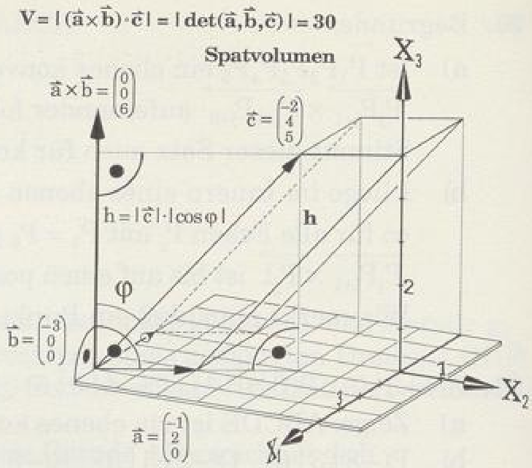
Das Volumen eines geraden Prismas berechnet man mit der Formel Grundfläche mal Höhe. Schert man ein Prisma parallel zur Grundfläche, dann bleiben Grundfläche G und Höhe h – und nach CAVALIERI – auch das Volumen $V = G \cdot h$ gleich.

Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Spat auf. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine Seitenfläche vom Inhalt $G = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$ auf; $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu dieser Seitenfläche, also parallel zur Höhe h. Diese ist die Länge der senkrechten Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$h = |\,\vec{c}\,| \cdot |\cos\varphi| = |\,\vec{c}\,| \cdot \frac{|\,(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|}{|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |\,\vec{c}\,|} = \frac{|\,(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|}{|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|}$$

$$V_{Spat} = G \cdot h = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot \frac{|\,(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|}{|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|} = |\,(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\,|$$





Das gemischte Produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$ heißt auch **Spatprodukt** von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$; man schreibt es einfach $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Der Ausdruck $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ist eine Zahl, deren Betrag das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats angibt. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ist positiv, wenn $\cos\varphi$ positiv ist, das heißt, wenn $\vec{c}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ einen spitzen Winkel einschließen. Das bedeutet, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Rechtssystem bilden.

Die Schreibweise $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ enthält keine Klammern, läßt also nicht erkennen, wo »$\circ$« und wo »$\times$« steht. Tatsächlich kommts nicht drauf an, solang man die Reihenfolge der Vektoren nicht ändert. Es gilt nämlich:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\circ\vec{a} \quad \text{(andere Grundfläche)} = \vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Berechnet man das Spatprodukt aus den Koordinaten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, dann macht man eine überraschende Entdeckung:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

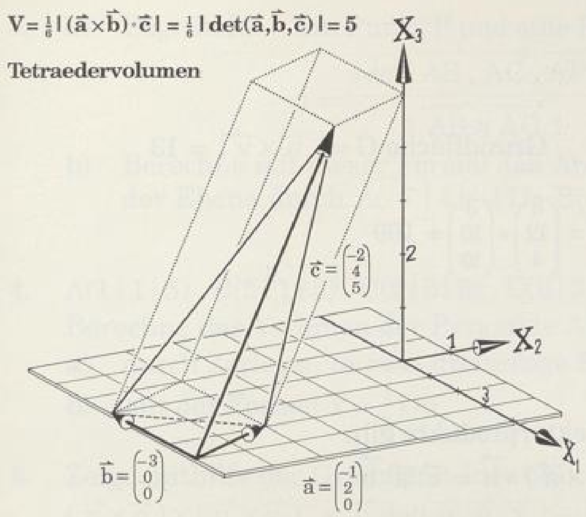
(Entwicklung nach der 3. Spalte)

Damit gilt: $\boxed{V_{\text{Spat}} = |(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}| = |\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| =: |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}$

Diese Volumenformel macht die Komplanaritätsbedingung anschaulich verständlich:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar $\Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

Das Spat hat die Höhe 0 und entartet zu einem Vieleck.



Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen auch ein Tetraeder (= dreiseitige Pyramide) auf.

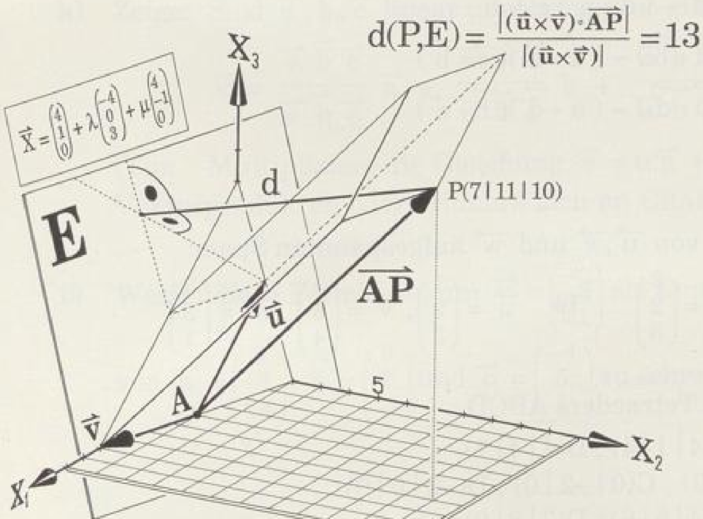
$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} G_{\text{Tetraeder}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} G_{\text{Spat}} \cdot h = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}$

$$\boxed{V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \frac{1}{6} |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}$$

Als Anwendung des Spatprodukts berechnen wir den Abstand eines Punkts und einer Ebene in Parameterform:

$P(7 | 11 | 10), E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ spannen ein Spat auf. Der Abstand d(P,E) ist gleich der Spathöhe, die auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht steht:



$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\circ\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix}; \qquad \text{Grundfläche } G = |\vec{u}\times\vec{v}| = 13$$

$$\text{Volumen } V = |(\vec{u}\times\vec{v})\circ\overrightarrow{AP}| = \begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\10\\10\end{pmatrix} = 169$$

$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{169}{13} = 13.$$

Eigenschaften des Spatprodukts

Wegen der Eigenschaften des Skalar- und Vektorprodukts gilt:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\circ\vec{b} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$$

also $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$,

das heißt, zyklische Vertauschung ändert den Wert nicht. Andrerseits gilt:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\circ\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$$

also $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$,

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$

und $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$, das heißt, Vertauschung zweier Vektoren ändert das Vorzeichen.

Die Vertauschungseigenschaft des Spatprodukts führt zu einer weiteren Beziehung von Vektor- und Skalarprodukt, der *Lagrange-Identität*:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})$$

Zum Beweis setzen wir $\vec{c}\times\vec{d} = \vec{z}$. Damit ist:

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{z} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{z} = \vec{z}\,\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{z}\times\vec{a})\circ\vec{b} = \\
&= [(\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}]\circ\vec{b} \\
\text{(Graßmann)} \quad &= [(\vec{c}\circ\vec{a})\vec{d} - (\vec{d}\circ\vec{a})\vec{c}]\circ\vec{b} \\
&= (\vec{c}\circ\vec{a})(\vec{d}\circ\vec{b}) - (\vec{d}\circ\vec{a})(\vec{c}\circ\vec{b}) \\
&= (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\0\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Berechne das Volumen V des Tetraeders ABCD

a) A(1 | 1 | 1), B(1 | 4 | 4), C(4 | 1 | 4), D(4 | 4 | 1)
b) A(−1 | −1 | −1), B(0 | 0 | −2), C(0 | −2 | 0), D(−2 | 0 | 0)
c) A(0 | 0 | 0), B(1 | 2 | 3), C(4 | 5 | 6), D(7 | 8 | 9)

3. a) Begründe: Ein Punkt P und eine Ebene ABC haben den Abstand

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

b) Berechne mit dieser Formel den Abstand von $P(-41 \mid 33 \mid 25)$ und der Ebene durch $A(-7 \mid 4 \mid -17)$, $B(-7 \mid 1 \mid -13)$ und $C(-3 \mid 7 \mid -14)$.

4. $A(1 \mid 1 \mid 5)$, $B(5 \mid 1 \mid 5)$, $C(2 \mid 5 \mid 5)$, $D(0 \mid 3 \mid 5)$, Spitze $S(4 \mid 1 \mid -1)$
Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS

a) durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden.

b) mit der Formel $V = \frac{1}{3}Gh$

• 5. Zeige mithilfe der Graßmann-Identität:

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{v}) - \vec{v} \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{u})$$
$$= \vec{q} \det(\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}) - \vec{p} \det(\vec{q}, \vec{u}, \vec{v})$$

• 6. **Jacobi-Identität** Zeige mithilfe der Graßmann-Identität

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{o}$$

• 7. a) Zeige: Die windschiefen Geraden g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u}$ und h: $\vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$

haben den Abstand $d = \dfrac{|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{GH}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

b) Bestimme mit dieser Formel den Abstand von

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Zerlegung eines Vektors $\vec{v}$ in seine Komponenten in Richtung $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

a) Zeige: Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so gilt

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}\ \vec{b}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{a} + \frac{\vec{a}\ \vec{v}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{b} + \frac{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{v}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{c}$$

(Tip: Multipliziere die Gleichung $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ mit geeigneten Vektorprodukten oder erinnere dich an CRAMER!)

b) Wende diese Formel an, um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination

von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu schreiben.

• **9.** Rechtfertige die Gleichheitszeichen

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\times\vec{d} = \vec{b}\;\vec{c}\times\vec{d}\;\vec{a}$$
$$= [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\circ\vec{a} = [(\vec{b}\circ\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\circ\vec{c})\vec{d}]\circ\vec{a}$$
$$= (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})$$

: 10. Quaternionen

William HAMILTON hat 1844 die komplexen Zahlen durch die Definition der *Quaternionen* erweitert. Eine Quaternion q ist ein Term der Form

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad \text{mit } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\ ,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$\text{und } ij = -ji = k,\quad jk = -kj = i,\quad ki = -ik = j$$

Hamilton betrachtete eine Quaternion q als Summe einer Zahl a_0 (Skalarteil) und eines dreidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, also $q = a_0 + \vec{a}$.

Zeige: Multipliziert man zwei Quaternionen $q_1 = a_0 + \vec{a}$ und $q_2 = b_0 + \vec{b}$, dann entstehen alle uns bekannten Produkte:

$a_0 b_0$	Zahlenprodukt
$a_0\vec{b}$, $b_0\vec{a}$	S-Multiplikation
$\vec{a}\circ\vec{b}$	Skalarprodukt
$\vec{a}\times\vec{b}$	Vektorprodukt

und es gilt:

$$(a_0 + \vec{a}) * (b_0 + \vec{b}) = a_0 b_0 + a_0\vec{b} + b_0\vec{a} - \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b},$$

» * « bedeutet (distributive) Multiplikation zweier Quaternionen.