



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Normalform der Ebene

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83392](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83392)

1. Normalform der Ebene

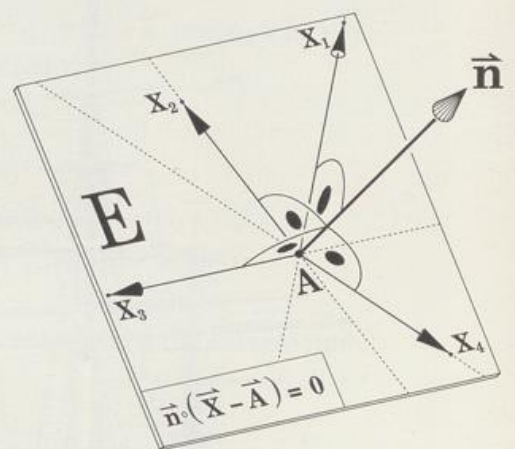
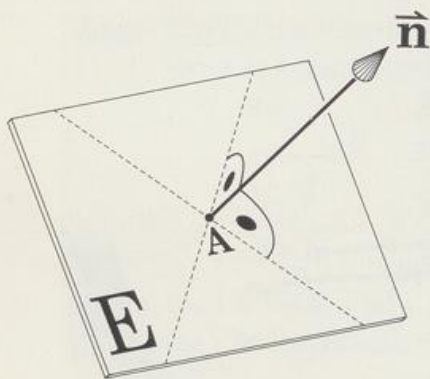
Bisher haben wir die Lage einer Ebene im Raum durch Elemente wie Punkte, Geraden und Vektoren festgelegt – also durch Bestimmungsstücke, die in der Ebene liegen. Es gibt aber auch noch eine andere einfache Möglichkeit: Man gibt einen Punkt A (Aufpunkt) der Ebene an und fixiert die Richtung der Ebene mit einem Normalvektor \vec{n} , mit einem Vektor also, der senkrecht auf der Ebene steht. Alle Vektoren \vec{AX} , die einen Ebenenpunkt X mit dem Aufpunkt A verbinden, stehen senkrecht auf \vec{n} . Die Ebenenpunkte X werden beschrieben durch:

$$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0$$

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$



Die letzte Gleichung kennen wir schon als Koordinatengleichung der Ebene. Ihre Koeffizienten n_1, n_2, n_3 sind also die Koordinaten eines Normalvektors.

Definition

Ist A Aufpunkt und \vec{n} Normalvektor einer Ebene E, dann heißt

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

vektorielle Normalform der Ebenengleichung

beziehungsweise

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \quad \text{mit} \quad n_0 = -\vec{n} \circ \vec{A}$$

skalare Normalform der Ebenengleichung.

Die skalare Normalform der Ebenengleichung ist identisch mit der Koordinatengleichung der Ebene.

Beispiel: Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E, die durch A(2 | -3 | 4) geht und

senkrecht steht auf der Gerade g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Als Normalvektor nehmen wir den Richtungsvektor der Gerade und stellen sofort die vektorielle Normalform der Ebenengleichung auf:

E: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$. Ausmultiplizieren liefert die

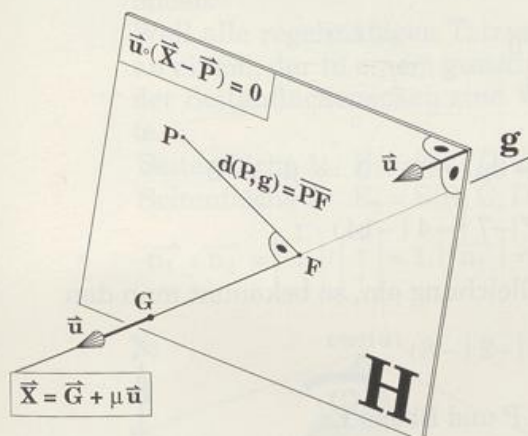
skalare Normalform E: $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 21 = 0$

Der Normalvektor zeigt einen neuen Weg, die Parameterform der Ebenengleichung in die Koordinatenform umzurechnen: Man sucht einen Vektor \vec{n} , der auf den beiden Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} der Ebene senkrecht steht. \vec{n} ist Lösung des 2,3-Gleichungssystems $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$
 $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$

oder ein Vielfaches von $\vec{u} \times \vec{v}$. Dann gehts weiter wie im vorigen Beispiel. Vier Beispiele zeigen die Nützlichkeit der Normalform beim Lösen geometrischer Grundaufgaben.

Abstand d(P,g) von Punkt P und Gerade g

Lösungsidee: Man legt eine Hilfsebene H durch P senkrecht zu g. H schneidet g im Lotfußpunkt F. F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P auf (oder in) die Gerade g. Der gesuchte Abstand ist $d(P, g) = \overline{PF}$.



Beispiel: $P(0 | -2 | 1)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

H: $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0$

g in H eingesetzt: $2(5 + 2\mu) - 2(2 - 2\mu) + 3(6 + 3\mu) - 7 = 0 \Rightarrow \mu = -1$

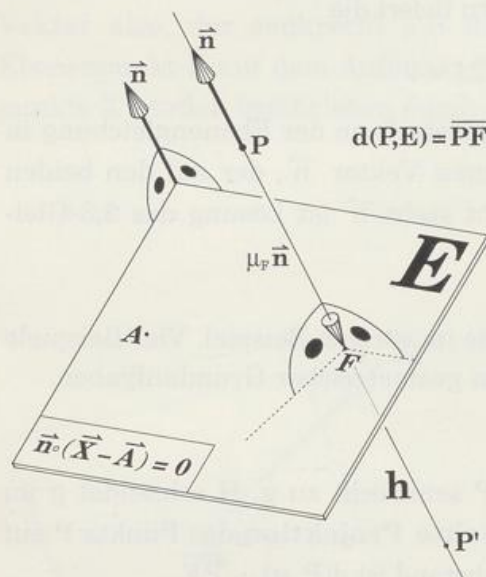
Lotfußpunkt: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(3 | 4 | 3)$

Abstand: $\overline{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d(P, g) = |\overline{PF}| = 7$

Spiegelung eines Punkts P an einer Ebene E

Lösungsidee: Man legt durch P eine Normale der Ebene E. Diese Lotgerade schneidet E im Lotfußpunkt F (Parameter μ_F). F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P in (oder auf) die Ebene E.

Für den Spiegelpunkt P' gilt $\vec{P'} = \vec{P} + 2\mu_F \vec{n}$



Beispiel: $P(1 \mid 0 \mid -2)$, $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 32 = 0$

$$\text{Lotgerade } h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \text{ in } E \text{ eingesetzt: } 2(1 + 2\mu) + \mu + 3(-2 + 3\mu) + 32 = 0 \Rightarrow \mu_F = -2$$

$$\text{Spiegelpunkt } \vec{P'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P'(-7 \mid -4 \mid -14)$$

Setzt man $\mu_F = -2$ in die Lotgeraden-Gleichung ein, so bekommt man den

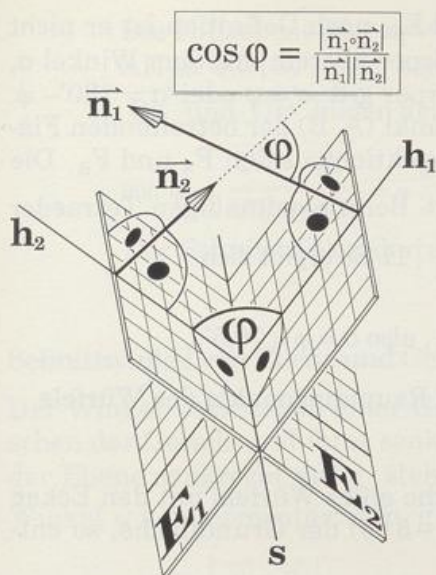
$$\text{Lotfußpunkt } \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F(-3 \mid -2 \mid -8)$$

\overline{PF} ist der Abstand $d(P, E)$ von Punkt P und Ebene E:

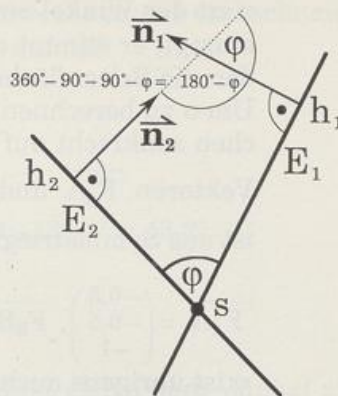
$$\overline{PF} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad d(P, E) = |\overline{PF}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Schnittwinkel von Ebenen

Schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 in der Gerade s, dann versteht man unter dem Schnittwinkel φ den nichtstumpfen Winkel zweier Lotgeraden h_1 und h_2 dieser Schnittgerade s, wobei h_1 in E_1 und h_2 in E_2 liegt. Parallele Ebenen haben den »Schnittwinkel« 0° . Weil die zugehörigen Normalvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 auf h_1 und h_2 senkrecht stehen, bilden auch sie den Schnittwinkel φ oder $180^\circ - \varphi$.



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$



Blick auf die Ebenen in Richtung der Schnittgerade s

Sind \vec{n}_1 und \vec{n}_2 Normalvektoren der Ebenen E_1 und E_2

und $\angle(E_1, E_2) = \varphi$, dann gilt $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$

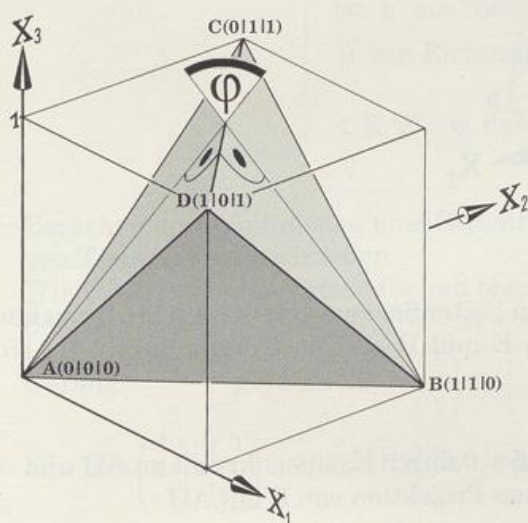
Beispiel: Berechne den Winkel, den zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders bilden.

Weil alle regelmäßigen Tetraeder ähnlich sind, überlegen wir uns die Lösung an einem, der in einem günstig liegenden Würfel verpackt ist: die Koordinaten der Seitenflächenecken sind Würfecken, das Tetraeder steht auf einer Kante.

Seitenfläche 1: $E_1 = E(A, D, C): x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Seitenfläche 2: $E_2 = E(B, C, D): x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, |\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = \sqrt{3}; \cos \varphi = \frac{1}{3}, \quad \varphi = 70,5^\circ.$$



φ ist der Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2 , nach Definition ist er nicht stumpf; er stimmt deshalb nicht bei jedem Körper überein mit dem Winkel σ , den die Seitenflächen bilden. Für konvexe Körper gilt: $\sigma = \varphi$ oder $\sigma = 180^\circ - \varphi$. Um σ zu berechnen, projiziert man je einen Punkt (A, B) der betreffenden Flächen senkrecht auf die Schnittgerade. Die Projektionen seien F_A und F_B . Die Vektoren $\overrightarrow{F_A A}$ und $\overrightarrow{F_B B}$ bilden den Winkel σ . Beim regelmäßigen Tetraeder ist aus Symmetriegründen $F_A = F_B = M_{CD}(\frac{1}{2} | \frac{1}{2} | 1)$. So ergibt sich

$$\overrightarrow{F_A A} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{F_B B} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \cos \sigma = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}, \text{ also } \sigma = \varphi = 70,5^\circ.$$

φ ist übrigens auch der Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels.

Jetzt noch ein anspruchsvolleres Beispiel:

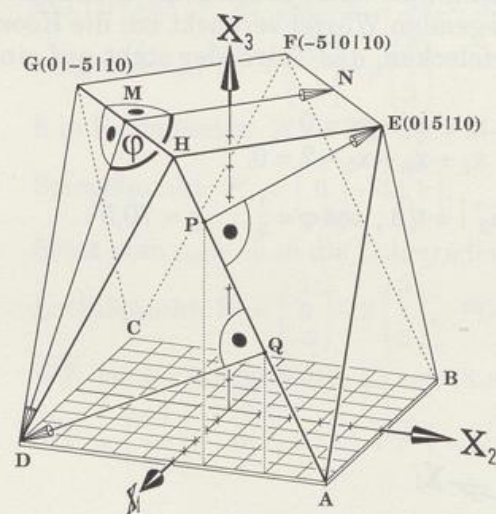
Verbindet man die Kantenmitten der Deckfläche eines Würfels mit den Ecken $A(5 | 5 | 0)$, $B(-5 | 5 | 0)$, $C(-5 | -5 | 0)$ und $D(5 | -5 | 0)$ der Grundfläche, so entsteht ein Würfelstumpf ABCDEFGH.

Für den Winkel φ zwischen der Deckfläche EFGH und der Seitenfläche HGD

$$\text{gilt } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MD}|}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wegen } M(\frac{5}{2} | -\frac{5}{2} | 10) \text{ ist } \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } \cos \varphi = \frac{-25}{5\sqrt{2} \cdot 7,5\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}; \quad \varphi = 109,5^\circ$$



Für den Winkel ψ zwischen den Seitenflächen AHD und AEH brauchen wir die senkrechten Projektionen von E und D auf die Gerade durch $A(5 | 5 | 0)$ und $H(5 | 0 | 10)$:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Hilfsebene $H_E: x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ durch E, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in $P(5 | 1 | 8)$, der senkrechten Projektion von E auf AH.

Die Hilfsebene $H_D: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ durch D, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in $Q(5 | 3 | 4)$, der senkrechten Projektion von D auf AH.

\overrightarrow{PE} und \overrightarrow{QD} bilden den gesuchten Winkel:

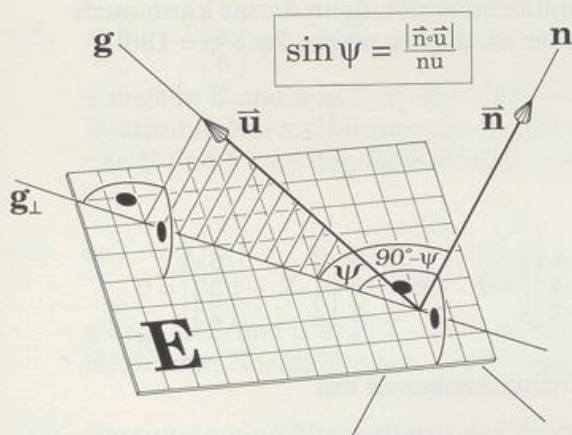
$$\cos \psi = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{QD}}{|\overrightarrow{PE}| \cdot |\overrightarrow{QD}|} = -\frac{2}{3}, \quad \psi = 131,8^\circ.$$

Der Schnittwinkel der zugehörigen Ebenen ist $180^\circ - 131,8^\circ = 48,2^\circ$.

Schnittwinkel von Ebene und Gerade

Der Winkel ψ zwischen einer Gerade g und einer Ebene E ist gleich dem Winkel zwischen der Gerade und ihrer senkrechten Projektion g_\perp in die Ebene. Weil die Normale n der Ebene senkrecht auf g_\perp steht, sind der Winkel zwischen n und g und der gesuchte Winkel ψ komplementär: $\angle(n, g) = 90^\circ - \psi$

$$\cos(90^\circ - \psi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$



Ist \vec{n} ein Normalvektor der Ebene E und \vec{u} ein Richtungsvektor der Gerade g und $\angle(E, g) = \psi$, dann gilt $\sin \psi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$

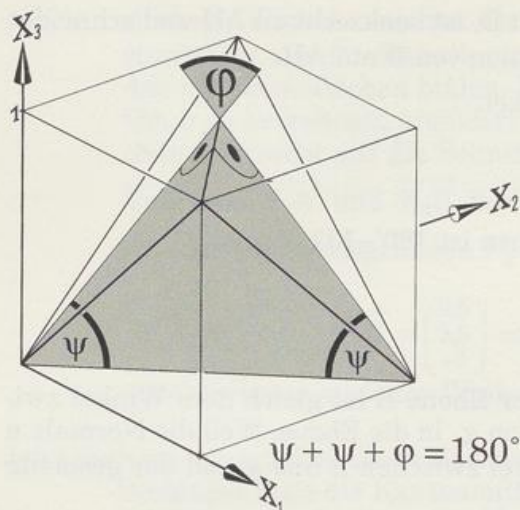
Beispiel: Berechne den Winkel, den eine Seitenfläche und eine Kante eines regelmäßigen Tetraeders einschließen.

Wir verwenden das Tetraeder von oben.

Seitenfläche: $E = E(A, D, C): x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Gerade: $g = DB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2, \quad |\vec{n}| \cdot |\vec{u}| = \sqrt{3} \cdot 2; \quad \sin \psi = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \psi = 54,7^\circ.$$



Auch bei solchen Aufgaben muß man unterscheiden zwischen dem nicht-stumpfen Schnittwinkel von Gerade und Ebene und dem Winkel, den eine Kante eines Polyeders mit einer Seitenfläche bildet, denn dieser kann auch stumpf sein. Im regelmäßigen Tetraeder ist ψ spitz wegen $2\psi + \phi = 180^\circ$.

Aufgaben

1. Gib eine skalare Normalform an von

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$ c) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

2. Stelle vektorielle Normalformen der Koordinatenebenen auf.

3. Gib eine skalare Normalform der Ebene E an, von der man weiß:

- a) E enthält $A(1 | 0 | -3)$ und hat die Normalrichtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) E enthält $A(1 | 1 | -2)$, $B(-2 | 1 | 0)$ und $C(0 | 1 | 2)$
c) E enthält $A(1 | -1 | -4)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
d) E enthält $A(1 | -1 | -4)$ und steht senkrecht auf $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
e) E enthält $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
f) E enthält $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

4. E: $3x_1 + x_3 - 6 = 0$ enthält $P(1 | 7 | 3)$, aber nicht $Q(2 | 2 | 1)$.
 a) n sei das Lot von E in P. Gib eine Gleichung von n an.
 b) m sei das Lot von E durch Q. Gib eine Gleichung von m an.
5. Stelle eine Normalform der Ebene F auf, die auf E: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ senkrecht steht und g enthält
 a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
6. Bestimme eine Gleichung der Gerade g , die $A(1 | 2 | 3)$ enthält und parallel ist zu E: $2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ und F: $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$.
7. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme eine Normalform der Ebene,
 a) die durch den Ursprung geht und parallel ist zu g und h
 b) die g enthält und senkrecht steht auf der Ebene von a).
- 8. $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$
 g liege in E und h in F. E und F bilden denselben Winkel wie g und h .
 Bestimme Normalformen von E und F, eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F und den Schnittwinkel von E und F.
- 9. $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 g liege in E und h in F. E und F haben denselben Abstand wie g und h .
 Bestimme Normalformen von E und F.
10. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von $A(3 | -1 | 4)$ und $B(7 | -5 | -2)$.
- 11. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von
 $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- 12. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von
 E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ und F: $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$,
 die durch den Ursprung geht.
13. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(1 | 1 | 1)$
 Bestimme den Abstand von Punkt P und Gerade g .

14. Welche Punkte der Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ haben
- vom Ursprung die Entfernung $2\sqrt{11}$?
 - von der x_1x_2 -Ebene den Abstand 3?
 - von der x_1 -Achse den Abstand 2,5?
 - von der Gerade $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Abstand $2\sqrt{3}$?
- 15. In welchen Punkten schneidet die Gerade $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ den Zylinder um die Achse $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Radius 6?
16. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P(14 | 6 | 3)$
- g ist Tangente einer Kugel um P .
Berechne Berührungspunkt A und Kugelradius r_a .
 - Auf g liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P . Berechne B und den Kugelradius r_b und die Schnittpunkte S von Kugel und Gerade.
 - Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und g berührt.
17. Spiegle den Punkt P an der Ebene E :
- $P(14 | 2 | 1), \quad E: 3x_1 - x_2 = 0$
 - $P(11 | 11 | 3), \quad E: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$
- 18. $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 30 = 0, \quad P(0 | 2 | 1)$
- E ist Tangentialebene einer Kugel k_a um P .
Berechne Berührungspunkt A und Kugelradius r_a .
 - In E liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P .
Berechne B und den Kugelradius r_b .
 - Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und E berührt.
 - E ist Symmetrieebene der Kugeln k_a (von **a**)) und k' .
Berechne den Mittelpunkt M' von k' .
 - Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die k_a und k' berühren?
 - Die Kugeln k_a und k' lassen sich durch eine Halbdrehung ineinander überführen. Beschreibe in Worten die möglichen Drehachsen.
 - E und die Kugel um P mit Radius 13 schneiden sich.
Berechne Mittelpunkt M und Radius ρ des Schnittkreises.

- 19. E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 81 = 0$, k ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 41
 - a) Berechne Mittelpunkt A und Radius ρ des Kreises, in dem sich E und k schneiden.
 - b) Verkleinert man den Schnittkreisradius von a) um 16, so ergibt sich ein Kreis, in dem sich E und Kugeln mit Radius 30 schneiden. Berechne die Mittelpunkte M dieser Kugeln.
 - c) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen von k, die zu E parallel sind.

• 20. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P(9 | -8 | 11)$

- a) Berechne Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, die durch P geht und ihren Mittelpunkt auf g hat.
- b) P sei die Ecke eines Quadrats, von dem eine Diagonale in g liege. Berechne die restlichen Quadratecken und eine Gleichung ihrer Ebene.
- c) Wo (Punktmenge, Gleichung!) liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die das Quadrat in b) berühren?

• 21. Spiegle die Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7 = 0$

- a) am Ursprung b) an der x_3 -Achse c) an der x_1x_2 -Ebene

• 22. Spiegle die Ebene E: $3x_1 + 2x_3 - 1 = 0$

- a) am Punkt $P(1 | 2 | 3)$ b) an der Gerade $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- c) an der Ebene F: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

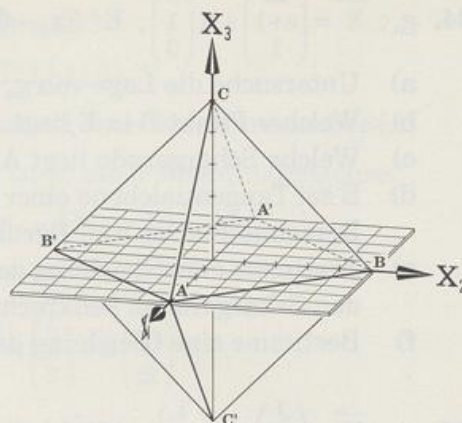
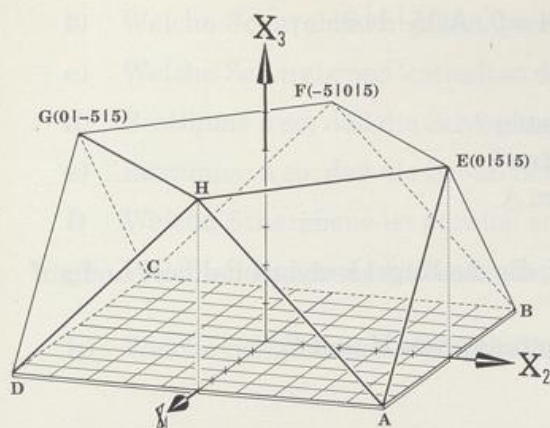
23. Berechne die Schnittwinkel φ von E und F:

- a) E: $x_1 + 10x_2 + 9x_3 - 4 = 0$, F: $11x_1 + 19x_2 + 8x_3 - 4 = 0$
- b) E: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4 = 0$, F: $8x_1 + x_2 + 5x_3 - 4 = 0$
- c) E: $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$, F: $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 9 = 0$
- d) E: $x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 1 = 0$, F: $3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 1 = 0$

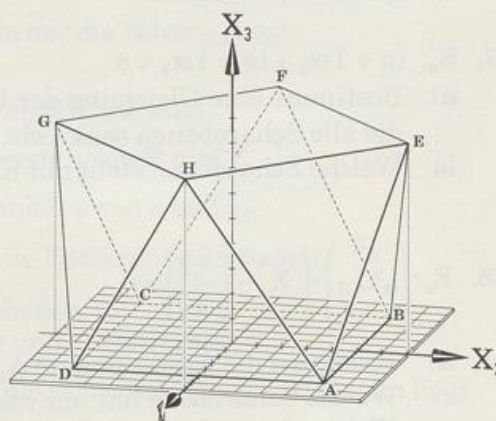
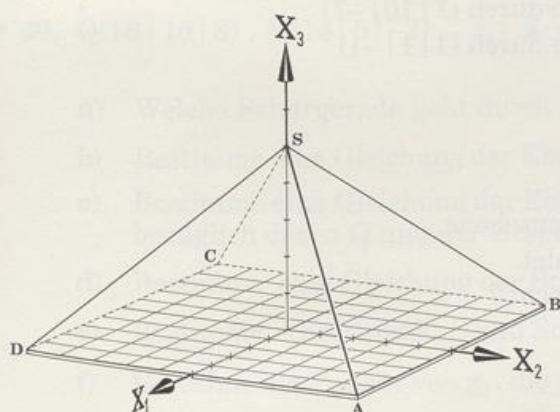
24. Berechne die Schnittwinkel φ von E und g:

- a) E: $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6 = 0$, $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b) E: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 13 = 0$, $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c) E: $-x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 0$, $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
- d) E: $x_1 + x_2 + 4x_3 + 111 = 0$, $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

25. Berechne die Schnittwinkel von E: $12x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 0$ und den
 a) Koordinatenachsen a) Koordinatenebenen
26. H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$, $A(-1 | 2 | 2)$, $B(3 | -3 | 1)$
 a) Bestimme eine Normalform der Ebene E, die auf H senkrecht steht und durch A und B geht.
 b) Bestimme eine Normalform der Ebene G, die AB in A senkrecht schneidet.
 c) Bestimme den Schnittwinkel φ von G und H.
 d) Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die durch B geht und parallel zu G und H ist.
 e) Bestimme den Schnittwinkel ψ von g und F: $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.
27. $A(3 | 1 | 3)$, $B(6 | 4 | 5)$, $C(7,5 | 1 | 6)$ und die Spitze $S(4 | 1 | 8)$ bilden ein Tetraeder.
 a) Berechne das Volumen.
 b) Berechne den Fußpunkt F der Höhe durch S und die Länge dieser Höhe.
 c) Berechne den Winkel α zwischen der Grundfläche und der Kante [AS].
 d) Berechne den Winkel β zwischen der Grundfläche und der Fläche [ACS].
28. $A(2 | -3 | 2)$, $B(-1 | 3 | 6)$, $C(5 | -5 | 0)$
 a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
 b) A' , B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in die x_1x_2 -Ebene. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$.
 c) Berechne den Winkel φ zwischen E_{ABC} und der x_1x_2 -Ebene.
29. E: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$, $A(1 | 2 | 4)$, $B(-2 | 2 | -9)$, $C(-2 | 7 | 9)$
 A' , B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in E.
 a) Bestimme die Bildpunkte A' , B' und C' .
 b) Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$.
 c) Bestimme den Winkel φ zwischen F und E_{ABC} und bestätige die Beziehung $F_{A'B'C'} = F_{ABC} \cdot \cos \varphi$.
- 30. Die sechs Punkte auf den Koordinatenachsen, die vom Ursprung die Entfernung k haben, bilden ein regelmäßiges Oktaeder. Berechne alle Winkel zwischen den Kanten, zwischen den Flächen und zwischen den Kanten und Flächen.
- 31. Bei dem Quaderstumpf ABCDEFGH sind Grundfläche ABCD und Deckfläche EFGH quadratisch. Berechne den Winkel zwischen
 a) den Seitenflächen HGF und HGD
 b) den Flächen AHD und AFE
 c) der Kante HD und der Deckfläche.



- 32. ABCDS ist eine vierseitige gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Berechne den Winkel zwischen
- Grund- und Seitenfläche
 - zwei Seitenflächen mit gemeinsamer Kante
 - zwei Seitenflächen ohne gemeinsame Kante.
- 33. Der Körper ABCDEFGH entsteht so: man verdreht zwei kongruente Quadrate 45° gegeneinander und verschiebt eines so weit nach oben, bis die Seitenkanten so lang sind wie die Quadratseiten.
- Bestätige die Koordinaten von $H(5\sqrt{2} | 0 | 5\sqrt{2\sqrt{2}})$.
 - Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und einer Seitenfläche mit gemeinsamer Kante.
 - Berechne den Winkel zwischen zwei Dreieckflächen mit gemeinsamer Kante.



- 34. $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4 = 0$, $A(15 | 1 | 3)$
- Untersuche die Lage von g_a und E .
 - Welcher Punkt B in E liegt A am nächsten?
 - Welche Schargerade liegt A am nächsten?
 - E sei Tangentialebene einer Kugel k um A .
Berechne Radius und Berührungspunkt.
 - Bestimme eine Gleichung der Ebene H , die die Kugel k von **d**) halbiert und auf den Schargeraden senkrecht steht.
 - Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von H und E .
35. $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, $M(-1 | 0 | -1)$
- Beschreibe in Worten die Geradenschar und bestimme eine Gleichung der Ebene E , in der die Schargeraden liegen.
 - Welche Schargerade geht durch M ?
 - Welche Schargeraden berühren eine Kugel um M mit Radius 2?
Welche Schargeraden sind Sekanten der Kugel?
 - Welche Schargeraden halbieren die Winkel der beiden Kugeltangenten g_0 und g_4 ?
 - Welche Schargerade hat vom Ursprung den kleinsten, welche den größten Abstand?
- 36. Bestimme von $E_a: x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 - 6 = 0$ die Büschelebenen,
- die mit der x_1 -Achse 45° einschließen
 - die mit der x_1x_2 -Ebene 60° einschließen
 - die mit der x_2x_3 -Ebene 30° einschließen
 - die 30° mit der Ursprungsgerade durch $(-6 | 7 | 1)$ einschließen
 - die senkrecht sind zur Gerade durch $(2 | 4 | 2)$ und $(4 | 0 | 0)$
 - die parallel sind zur Ursprungsgerade durch $(1 | 10 | -7)$
 - die parallel sind zur Ursprungsgerade durch $(1 | 1 | -1)$
 - die senkrecht auf E_0 stehen
 - die mit E_1 45° bilden.
- 37. $E_a: (a+1)x_1 + (a-1)x_2 = a$
- Bestimme eine Gleichung der Ursprungsebene, die alle Scharebenen senkrecht schneidet.
 - Welche Scharebene steht auf E_t senkrecht?
- 38. $E_a: \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 - a \\ a - 4 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$
- Bestimme die Achsenpunkte A_1 , A_2 und A_3 von E_a .
Welche Scharebene hat nur einen Achsenpunkt, wie liegt sie?
Welche Scharebenen haben nur zwei Achsenpunkte, wie liegen sie?

- b) Welche Scharebenen gehen durch den Ursprung ?
- c) Welche Scharebenen enthalten den Punkt $P(1 \mid 1 \mid 6)$?
- d) Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenebene.
- e) Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenachse.
- f) Welche Scharebene ist parallel zu $F: x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 10 = 0$?
- g) Welche Scharebene ist senkrecht zu $G: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$?
- h) Welche Scharebenen sind parallel zu $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$?
- i) Welche Scharebenen sind senkrecht zu $S: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?
- j) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E_2 und E_4 .
- 39. $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 42$, $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a \\ a \end{pmatrix}$
- a) In welchem Punkt schneiden sich die Ebene E und die Schar g_a ?
- b) Bestimme eine Gleichung der Ebene F , in der die Schar g_a liegt.
- c) Bestimme den Schnittwinkel φ und eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F .
- d) Bestimme Gleichungen der senkrechten Projektionen von g_{-2} und g_2 in E .
- e) Welche Schargerade ist identisch mit ihrem Spiegelbild bezüglich E ?
- f) E ist Symmetrieebene der Schargeraden g_a und $g_{a'}$.
Drücke a' mit a aus.
- 40. $Q(16 \mid 16 \mid 8)$, $M(14 \mid 5 \mid -2)$ $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- a) Welche Schargerade geht durch Q ?
- b) Bestimme eine Gleichung der Ebene E , in der die Schar g_a liegt.
- c) Bestimme eine Gleichung der Ebene F ,
bezüglich deren Q und der Ursprung symmetrisch sind.
- d) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F .
- e) Bestimme Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von s und g_0 .
- f) Berechne die Punkte von g_0 , die von M die Entfernung 15 haben.
- g) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen T ,
die eine Kugel um M mit Radius 15 in Q und O berühren.
- h) Bestimme eine Gleichung der Gerade t , die in beiden Tangentialebenen liegt.
- i) Berechne den Abstand d von t und g_0 .