Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Hesseform der Ebenengleichung

2. Hesse-Form der Ebenengleichung

Ist P ein Punkt der Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$, dann erfüllen seine Koordinaten die Gleichung und es gilt $E(P) = 2p_1 - 2p_2 + p_3 + 6 = 0$.
Liegt ein Punkt Q nicht in der Ebene E, dann ergibt sich für E(Q) eine positive oder negative Zahl.

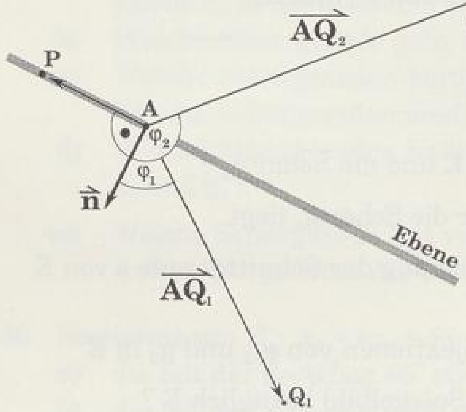
Beispiel:	$P(2 \mid 2 \mid -6)$,	$E(P) = 4 - 4 - 6 + 6 = 0$
	$Q_1(3 \mid -2 \mid 2)$,	$E(Q_1) = 6 + 4 + 2 + 6 = 18$
	$Q_2(-8 \mid 6 \mid -5)$,	$E(Q_2) = -16 - 12 - 5 - 6 = -27$

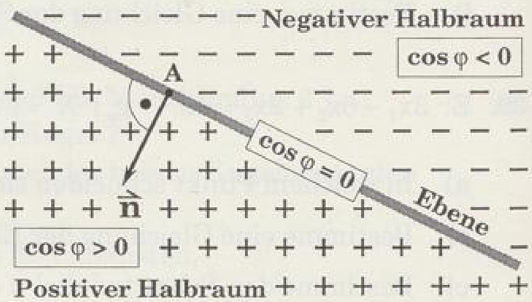
Um die Bedeutung des Vorzeichens zu verstehen, betrachten wir die vektorielle Normalform der Ebenengleichung:

$$E: \quad \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

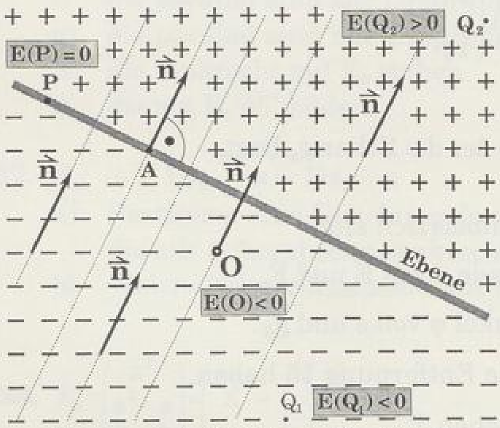
$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

$E(X) = n \cdot \overline{AX} \cdot \cos\varphi$, wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \overrightarrow{AX})$ ist.





cos φ legt das Vorzeichen von E(X) fest. Die Ebene E teilt den Raum in zwei Halbräume: Liegt Q in dem Halbraum, in den der Normalvektor zeigt, dann ist φ spitz, cos φ also positiv. Diesen Halbraum nennen wir positiven Halbraum.



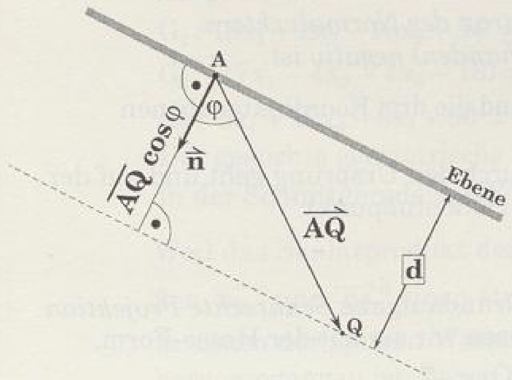
Ebene ist richtig orientiert

Unterscheidet man zwischen positivem und negativem Halbraum, dann nennt man die Ebene **orientiert**.

Enthält die Ebene E den Ursprung nicht, dann orientiert man sie gewöhnlich so, daß der Ursprung im negativen Halbraum liegt, das heißt $E(O) < 0$. In der Ebenengleichung E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ist $E(O) = n_0$. Ist also n_0 negativ, so ist die Ebene schon *richtig* orientiert. Ist n_0 positiv, so orientiert man die Ebene um, indem man ihre Gleichung mit -1 multipliziert.

Bei einer richtig orientierten Ebene weist der Normalvektor von der Ebene aus in den Halbraum, in dem der Ursprung nicht liegt – oder anders ausgedrückt – zeigt der Normalvektor vom Ursprung zur Ebene. Geht die Ebene durch den Ursprung, so sind beide Orientierungen richtig, das heißt gleichberechtigt.

Die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$ ist noch nicht richtig orientiert. Durch Multiplikation mit -1 orientieren wir sie um: E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$. Jetzt gilt $E(O) = -6 < 0$, $E(Q_1) = -18$ und $E(Q_2) = 27$. Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene, Q_1 und der Ursprung liegen auf derselben Seite.



Wir kennen jetzt die Bedeutung des Vorzeichens von E(Q) – was aber bedeutet der Betrag $|E(Q)|$?

$|E(Q)| = |\vec{n} \circ \overrightarrow{AQ}| = n \cdot \overline{AQ} \cdot |\cos\varphi|$. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$\overline{AQ} \cdot |\cos\varphi| = d$, das ist der Abstand von Punkt und Ebene. $|E(Q)| = n \cdot d$ ist also das Produkt des Abstands Punkt-Ebene und der Länge des Normalvektors.

Der Mathematiker Ludwig Otto HESSE (Königsberg 1811 bis 1874 München) hat vorgeschlagen, als Normalvektor in der richtig orientierten Ebenengleichung einen Einheitsvektor $\vec{n}^0$ zu verwenden. Setzt man in seine Ebenengleichung einen Punkt ein, so ergibt sich sofort der Abstand von Punkt und Ebene (bis aufs Vorzeichen). HESSE zu Ehren nennt man diese Form der Ebenengleichung **Hesse-Form** E_H; den zugehörigen Vektor $\vec{n}^0$ nennen wir kurz **Hesse-Vektor**.

Beispiel: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = 3$

Umorientierung E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

Normierung $E_H: -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2 = 0$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Punkte einsetzen $E_H(O) = -2$, E und O haben den Abstand 2

$E_H(Q_1) = -6$, E und Q_1 haben den Abstand 6

$E_H(Q_2) = 9$, E und Q_2 haben den Abstand 9

Zusammenfassung

Von E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ist

$$E_H: \quad \frac{-\operatorname{sgn}(n_0)}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$$

mit $n_0 \neq 0$ und $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

die **Hesse-Form** der Ebene E.

Ist $n_0 = 0$, dann sind $\pm\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$

die beiden Hesse-Formen der Ebene E.

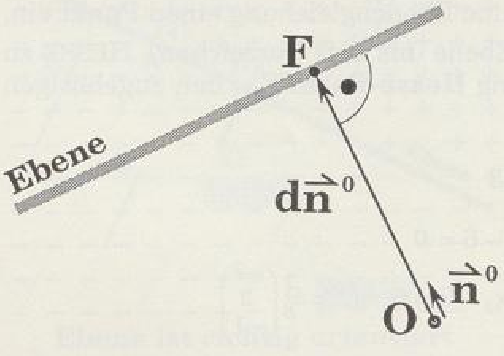
Abstand Punkt-Ebene: $d(Q,E) = |E_H(Q)|$

Erzeugung der Hesse-Form aus der allgemeinen Normalform in der Praxis:
Dividiere die Ebenengleichung durch den Betrag des Normalvektors.
Richte die Vorzeichen so ein, daß n_0 (falls vorhanden) negativ ist.

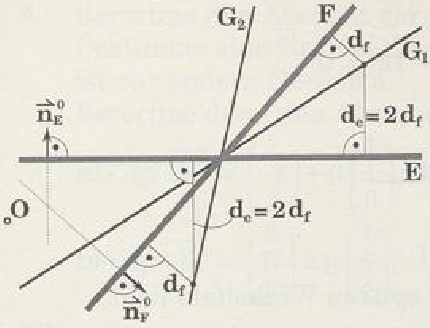
1. Beispiel: Die Ebene E: $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49 = 0$ und die drei Koordinatenebenen begrenzen ein Tetraeder.
Gesucht ist die Länge der Höhe, die durch den Ursprung geht und auf der Gegenfläche senkrecht steht, und der Höhenfußpunkt.

In dieser Aufgabe versteckt sich die Grundaufgabe *Senkrechte Projektion eines Punkts in eine Ebene.* Diesmal lösen wir sie mit der Hesse-Form.
E_H: $-\frac{1}{7}(2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49) = 0$, $E_H(O) = -7$,
Ebene und Ursprung haben den Abstand d = 7, und das ist die gesuchte Länge der Höhe.

Um O in E zu projizieren, tragen wir den Hesse-Vektor $\vec{n}^0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-3\end{pmatrix}$
7mal von O aus ab und treffen auf den gesuchten Fußpunkt F:
$\vec{F} = \vec{O} + 7\vec{n}^0 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $F(-2|-6|-3)$



2. Beispiel: Gesucht ist der geometrische Ort G der Punkte, die von der Ebene
E: $7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18 = 0$ den doppelten Abstand haben wie von der Ebene
F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 12 = 0$.



$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0,\ F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$

Für die gesuchten Punkte X gilt: $|E_H(X)| = 2 \cdot |F_H(X)|$,

das heißt: $G_1: E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$ oder $G_2: E_H(X) = -2 \cdot F_H(X)$

$G_1: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = \frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \,||\, \cdot 9$

$G_1: 19x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 54 = 0$

$G_2: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = -\frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \,||\, \cdot 9$

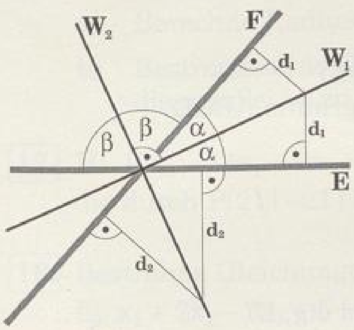
$G_2: 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 90 = 0$

Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei Ebenen G_1 und G_2, die sich in der Schnittgerade von E und F treffen.

Weil das Skalarprodukt der Hessevektoren $\overrightarrow{n_E}^{\,0}$ und $\overrightarrow{n_F}^{\,0}$ negativ ist, schließen $\overrightarrow{n_E}^{\,0}$ und $\overrightarrow{n_F}^{\,0}$ einen stumpfen Winkel ein, das heißt, der Ursprung liegt in einem der spitzen Winkelfelder von E und F. Weil G_1 aus $E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$ hervorgegangen ist, liegen die Punkte von G_1 in den Winkelfeldern, in denen sich die beiden positiven beziehungsweise negativen Halbräume überlappen. G_1 und O liegen also im selben Winkelfeld.

Winkelhalbierende Ebenen

Wichtiger Sonderfall der Aufgabe aus dem letzten Beispiel:
Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Ebenen E und F denselben Abstand haben.
Er besteht aus den beiden winkelhalbierenden Ebenen W_1 und W_2.
Für die gesuchten Punkte X gilt: $|E_H(X)| = |F_H(X)|$, das heißt,
$W_1: E_H(X) = F_H(X)$ oder $W_2: E_H(X) = -F_H(X)$, anders geschrieben
$W_1: E_H(X) - F_H(X) = 0$ oder $W_2: E_H(X) + F_H(X) = 0$.



Für die Ebenen E und F des letzten Beispiels mit
$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0, \quad F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$
ergibt sich $W_1: \; 13x_1 - x_2 - 10x_3 + 18 = 0$
$W_2: \; x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 54 = 0$
Wie sichs gehört, stehen W_1 und W_2 aufeinander senkrecht:

$$\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Um zu entscheiden, welche winkelhalbierende Ebene im spitzen Winkelfeld liegt, berechnen wir den Winkel α zwischen E und W_1:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_E}|\,|\overrightarrow{n_1}|} = \frac{135}{9\sqrt{270}} = \frac{5}{\sqrt{30}}, \qquad \alpha = 24{,}1^\circ$$

und den Winkel β zwischen F und W_2: $\beta = 90^\circ - \alpha = 65{,}9^\circ$.
Also halbiert W_1 das spitze und W_2 das stumpfe Winkelfeld von E und F.

Aufgaben

1. Gib die Hesse-Form an

a) $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0$ b) $6x_1 + 8x_3 = -50$
c) $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0$ d) $3x_3 = 3$
e) $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$ f) $x_1 = 0$

2. Gib die Hesse-Form der Ebene E an,
die durch A(1 | 1 | 5) , B(9 | 1 | 1) und C(11 | 4 | –1) geht.

3. Welchen Abstand haben der Ursprung, A(12 | 2 | –2) , B(1 | 0 | –2) und C(–9 | 1 | 2) von der Ebene E: $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$?

4. Welchen Abstand haben der Ursprung, A(1 | –2 | 2) und B(1 | 1 | –1) von der Ebene E:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

5. E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0$
F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$
G: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$
H: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12 = 0$

Zeichne den Ursprung, die Ebenen E bis H (als Strecken) mit den richtigen Abständen, die Normal- und Hesse-Vektoren von E bis H mit den richtigen Längen, Maßstab: 1 ≙ 0,5cm.

6. A(1 | 0 | –2) , B(–1 | 4 | –2) , C(0 | 6 | 0) , D(? | ? | ?) , S(3 | 3 | –3)
Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche das Parallelogramm ABCD.
a) Berechne die Länge der Höhe h.
b) Berechne das Volumen der Pyramide.

7. E: $11x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 75 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.
Zeige, daß E und g parallel sind, und berechne den Abstand d(g, E).

8. Berechne den Abstand der windschiefen Geraden so:
Bestimme eine Normalgleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel ist zur andern Gerade h.
Berechne dann den Abstand, den irgendein Punkt von h und die Ebene E haben.

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. Stelle Gleichungen der Ebenen auf,
die von E: $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 55 = 0$ den Abstand 33 haben.

10. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte,
die von der Ebene E: $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 7$ den Abstand 1 haben.

11. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die in der Ebene E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12$ liegen und von der Ebene F: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ den Abstand 3 haben.

12. E: $15x_1 + 12x_2 - 16x_3 = 15$, F: $-9x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 35$
Welche Punkte der x_3-Achse haben von E und F denselben Abstand ?

• **13.** E: $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11$, g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 39 \\ 61 \\ -23 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$

Eine Kugel K mit Radius 22 bewegt sich so, daß ihr Mittelpunkt auf g wandert.

a) In welchen Punkten berührt die Kugel die Ebene ?
Wo ist dann jeweils der Kugelmittelpunkt ?

b) Wo ist der Mittelpunkt des größten Schnittkreises von K und E ?

14. $g_\perp$ sei die senkrechte Projektion von g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$
in die Ebene E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4 = 0$.
Bestimme den Schnittpunkt von g und $g_\perp$ und eine Gleichung von $g_\perp$.

15. Die Punkte P(13 | −6 | 6) und P' seien symmetrisch bezüglich
der Ebene E: $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$. Berechne P'.

16. T: $3x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$ sei Tangentialebene einer Kugel K um M(7 | −1 | −12).

a) Berechne Radius und Berührpunkt von K.

b) Bestimme eine Gleichung der anderen Tangentialebene T' von K,
die parallel ist zu T.

17. H: $10x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 1$ halbiere die kleinste aller Kugeln,
die durch P(21 | −21 | 5) gehen. Berechne ihren Radius und Mittelpunkt.

18. Bestimme Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen von
E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ und F: $5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4 = 0$.

19. E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$, F: $6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von E und F denselben Abstand haben.

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstand von E halb so groß ist wie der von F.

20. E: $4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18 = 0$, F: $4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36 = 0$

a) Gib eine Gleichung der Ebene S an, die von E und F denselben Abstand hat.

b) Gib Gleichungen der Ebenen G und H an, deren Abstand von F doppelt so groß ist wie der von E.

c) Zeichne den Ursprung und die Ebenen E, F, S, G und H (als Strecken) mit den richtigen Abständen im Maßstab: $1 \mathrel{\hat{=}} 1$cm.

• **21.** E: $3x_1 - 4x_3 = 0$, F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt in der von E und F gebildeten Rinne hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung).
Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

•• **22.** E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$, F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$, G: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4 = 0$
Eine Kugel vom Radius 3 liegt in dem von E, F und G gebildeten Pyramiden-Trichter (der Trichter enthält die positive x_3-Achse). Wo liegt ihr Mittelpunkt M ?

•• **23.** E: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt auf der Ebene E hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der der Kugelmittelpunkt läuft, wenn er in $S(0 \mid 0 \mid m)$ startet.

3. Normalformen von Geraden

Für Geraden und Ebenen im Raum gibt es Parametergleichungen – eine Normalform aber ist nur bei Ebenen möglich, weil Geraden keine eindeutigen Normalrichtungen haben. Deshalb gibt es auch keine Hesse-Form von Geraden im Raum. In der Geometrie der Ebene ist das anders. Hier kann man der Gerade eine Normalrichtung genau so zuordnen wie einer Ebene im Raum. Mit zweidimensionalen Vektoren geschrieben sieht das so aus:

$$g\colon\ \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

$$n_x x + n_y y + n_0 = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor und $A(a_x \mid a_y)$ ein Punkt der Gerade g.