Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

3. Normalformen von Geraden

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

19. E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$, F: $6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von E und F denselben Abstand haben.

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstand von E halb so groß ist wie der von F.

20. E: $4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18 = 0$, F: $4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36 = 0$

a) Gib eine Gleichung der Ebene S an, die von E und F denselben Abstand hat.

b) Gib Gleichungen der Ebenen G und H an, deren Abstand von F doppelt so groß ist wie der von E.

c) Zeichne den Ursprung und die Ebenen E, F, S, G und H (als Strecken) mit den richtigen Abständen im Maßstab: $1 \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.

• **21.** E: $3x_1 - 4x_3 = 0$, F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt in der von E und F gebildeten Rinne hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung).
Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

: 22. E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$, F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$, G: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4 = 0$
Eine Kugel vom Radius 3 liegt in dem von E, F und G gebildeten Pyramiden-Trichter (der Trichter enthält die positive x_3-Achse). Wo liegt ihr Mittelpunkt M ?

: 23. E: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt auf der Ebene E hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der der Kugelmittelpunkt läuft, wenn er in $S(0|0|m)$ startet.

3. Normalformen von Geraden

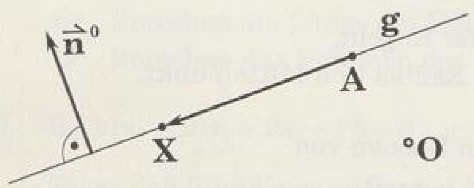
Für Geraden und Ebenen im Raum gibt es Parametergleichungen – eine Normalform aber ist nur bei Ebenen möglich, weil Geraden keine eindeutigen Normalrichtungen haben. Deshalb gibt es auch keine Hesse-Form von Geraden im Raum. In der Geometrie der Ebene ist das anders. Hier kann man der Gerade eine Normalrichtung genau so zuordnen wie einer Ebene im Raum. Mit zweidimensionalen Vektoren geschrieben sieht das so aus:

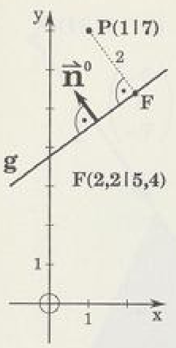
$$g\colon\ \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

$$n_x x + n_y y + n_0 = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor und $A(a_x | a_y)$ ein Punkt der Gerade g.





Wie im Raum findet man die Hesse-Form durch Normieren und Orientieren:

$$g_H: \frac{-\text{sgn}(n_0)}{n}(n_x x + n_y y + n_0) = 0$$

Wieder gilt für den Abstand Punkt-Gerade: $|g_H(X)| = d(P, g)$

Beispiel: Welchen Abstand haben $P(1|7)$ und $g: 3x - 4y + 15 = 0$?

$g_H: -\frac{1}{5}(3x - 4y + 15) = 0, \qquad g_H(P) = -\frac{1}{5}(-10) = 2$

P und g haben den Abstand 2, g liegt zwischen P und O.

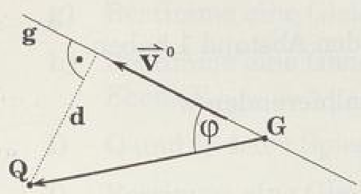
Subtrahiert man von $\vec{P}$ das 2fache des Hesse-Vektors, dann trifft man auf die senkrechte Projektion F von P auf g:

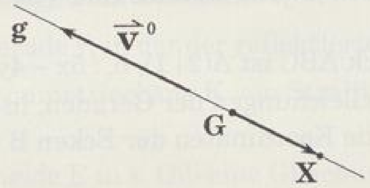
$$\vec{F} = \vec{P} - 2\left[-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}11/5\\27/5\end{pmatrix}, \quad F(2{,}2\,|\,5{,}4)$$

**** Plücker-Form**

Der Mathematiker Julius PLÜCKER (Elberfeld 1801 bis 1868 Bonn) hat eine Form der Gleichung einer Gerade g im Raum angegeben, bei der man ähnlich wie bei der Hesse-Form der Ebene durch Einsetzen eines Punkts Q gleich den Abstand d(Q, g) bekommt. Ist $\vec{v}^{\,0}$ ein Einheitsvektor in Geradenrichtung, so erfüllen die Punkte X der Gerade die (parameterlose!) Gleichung:

$g_P: \vec{v}^{\,0} \times \overrightarrow{GX} = \vec{o}$ Plücker-Form der Geradengleichung





Für den Abstand d(Q, g) Punkt-Gerade gilt dann: $\sin\varphi = \frac{d(Q, g)}{\overline{GQ}}$,

also $d(Q, g) = \overline{GQ}\sin\varphi = |\vec{v}^{\,0}| \cdot |\overrightarrow{GQ}| \cdot \sin\varphi = |\vec{v}^{\,0} \times \overrightarrow{GQ}| =: |g_P(Q)|$

Beispiel: Welchen Abstand haben Q(0 | −2 | 1) und g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$?

$$\vec{v}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\quad g_P: \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x_1-5\\x_2-2\\x_3-6\end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$d(Q, G) = \left|\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-4\\-5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{17}}\left|\begin{pmatrix}22\\-5\\-18\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{833} = \sqrt{49} = 7$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Gib die Hesse-Form der Geraden a bis f an

a) a: $-3x + 4y + 15 = 0$ **b)** b: $x + y = 1$ **c)** c: $-2y = 0$

d) d: $x + 0{,}75y = 0{,}25$ **e)** e: $y = mx + t$ **f)** f: $\overrightarrow{X} = \binom{1}{1} + \mu\binom{5}{12}$

$\boxed{2.}$ g: $\overrightarrow{X} = \binom{4}{5} + \mu\binom{12}{5}$, A(0,5 | −3,5)

a) Berechne den Abstand von A und g.

b) Berechne die Gleichung der Lotgerade von g durch A.

c) Berechne den Lotfußpunkt F von **b)** und die Länge des Lots $\overline{AF}$.

$\boxed{3.}$ **a)** Berechne den Abstand von Ursprung und Gerade g: $3x + 4y = 12$.

b) Berechne den Abstand von b: $3x + 4y = 24$, c: $3x + 4y + 24 = 0$ und d: $6x + 8y = 24$.

4. Bestimme eine Gleichung der Gerade h durch H(3 | −4) parallel zur Gerade g: $3x = 5(y + 1)$.

5. Bestimme eine Gleichung der Gerade, die durch G(−12 | 5) geht und vom Ursprung den Abstand 13 hat.

6. Bestimme Gleichungen der Geraden p und q, die von der Gerade g: $3x + 4y + 12 = 0$ den Abstand 0,5 haben.

7. Gib die Punkte auf h: $y = x + 2$ an, die von g: $-3x + 4y = 3$ den Abstand 1 haben.

• **8.** Gib die Punkte an, die von g: $x + 7y = 0$ und der Winkelhalbierenden w des 1. Quadranten jeweils den Abstand $\sqrt{50}$ haben.

9. In einem Dreieck ABC ist A(2 | 1), $h_c: 5x - 4y = 7$ und $h_b: 3x + 4y = 11$.

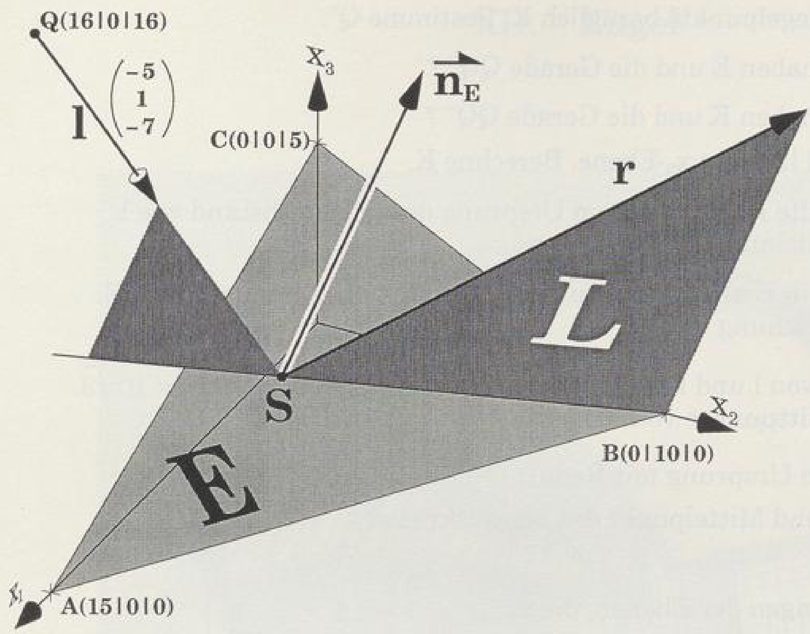
a) Bestimme Gleichungen der Geraden, in denen die Seiten liegen.

b) Berechne die Koordinaten der Ecken B und C.

10. g: $x + y = 2$, h: $7x + y + 7 = 0$

a) Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von g und h.

a) Bestimme Gleichungen der Geraden, deren Punkte jeweils von h einen dreimal so großen Abstand haben wie von g.



11. Im ersten Oktanten liegt eine ebene, dreieckige, spiegelnde Glasscheibe ABC. Von Q aus trifft ein Laserstrahl l auf die Glasscherbe (siehe Bild).

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Spiegelfläche liegt.

b) Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E.

c) Berechne den Winkel φ zwischen Laserstrahl l und E.
Berechne den Einfallswinkel α.

d) In welchem Punkt S trifft der Strahl aufs Glas?

e) Bestimme eine Gleichung des Einfallslots e.

f) L sei die Ebene, in der der ein- und ausfallende Strahl liegen.
Bestimme eine Gleichung von L.

g) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und L.

h) Bestimme eine Gleichung der senkrechten Projektion $l_\perp$ von Strahl l in die Ebene E.

i) Q und Q' seien Spiegelpunkte bezüglich E. Bestimme Q'.

j) Bestimme eine Gleichung der Gerade r, in der der reflektierte Strahl liegt.

k) Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene K von Strahl l und reflektiertem Strahl r.

l) Die Symmetrieebene von **k)** schneide E in s. Gib eine Gleichung von s an.

m) Welchen Winkel schließen $l_\perp$ und s ein?

n) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade n von L und K.

o) Welchen Winkel schließen n und $l_\perp$, n und s ein?

p) Q und Q'' seien Spiegelpunkte bezüglich K. Bestimme Q''.

q) Welchen Abstand haben E und die Gerade QQ'' ?

r) Welchen Abstand haben K und die Gerade QQ'' ?

s) U liege in E, K und in der x_1x_2-Ebene. Berechne K.

t) Die Ebene H enthalte l und habe vom Ursprung denselben Abstand wie l. Bestimme eine Gleichung von H.

u) Die Gerade g liege in E und habe vom Ursprung denselben Abstand wie E. Bestimme eine Gleichung von g.

v) Der Schnittpunkt von l und r sei Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $10\sqrt{3}$. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Geradenkreuzung.

w) Eine Kugel um den Ursprung mit Radius $\frac{50}{7}$ schneide E. Berechne Radius und Mittelpunkt des Schnittkreises.

12. a) Bestimme Gleichungen der Ebenen, die zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel sind und vom Punkt $Q(0\,|\,0\,|\,7)$ den Abstand 3 haben.

b) g_c sind Ursprungsgeraden durch $(1\,|\,-1\,|\,c)$. Welche Gerade schneidet die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16 = 0$ nicht ? Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen der Richtung von g_c und den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?

c) Die Ebene F enthalte die x_3-Achse und die Geradenschar g_c von **b)**. Bestimme eine Gleichung von F.

d) E und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P.
α) Berechne das Volumen von P.
β) Berechne die Oberfläche von P.
γ) Zeige, daß F Symmetrieebene von P ist.
δ) Prüfe, ob $S(3\,|\,-3\,|\,3)$ und $T(3\,|\,-3\,|\,5)$ in der Pyramide liegen.
ε) Es gibt eine Kugel in P, die alle vier Seitenflächen berührt. Berechne Radius und Mittelpunkt dieser Kugel.

e) Welche Schargeraden von g_c berühren eine Kugel um $M(2\,|\,-2\,|\,2)$ mit Radius 2 ? Berechne die Berührpunkte.