Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Kugel und Kreis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

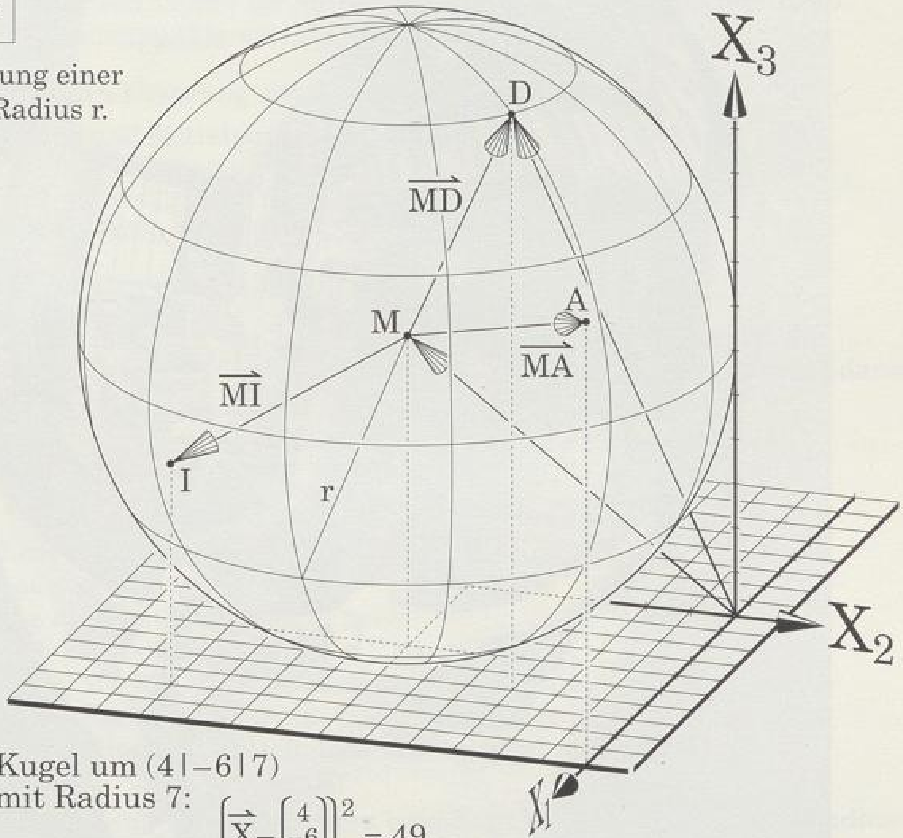
XII. Kugel

1. Kugel und Kreis

Was der Kreis in der Ebene ist, das ist die Kugel im Raum: Punkte X, die von einem Punkt M in derselben Entfernung r liegen, erfüllen die Gleichung $\overline{MX} = r$, mit Vektoren ausgedrückt $|\overrightarrow{MX}| = r$ oder $|\vec{X}-\vec{M}| = r$. Zum bequemeren Arbeiten zieht man eine Gleichung ohne Beträge vor: man quadriert beide Seiten $|\vec{X}-\vec{M}|^2 = r^2$, und schreibt nach der Regel $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$\boxed{(\vec{X}-\vec{M})^2 = r^2}$$

Das ist die Gleichung einer Kugel um M mit Radius r.



Kugel um (4 | −6 | 7) mit Radius 7: $\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}4\\-6\\7\end{pmatrix}\right)^2 = 49$

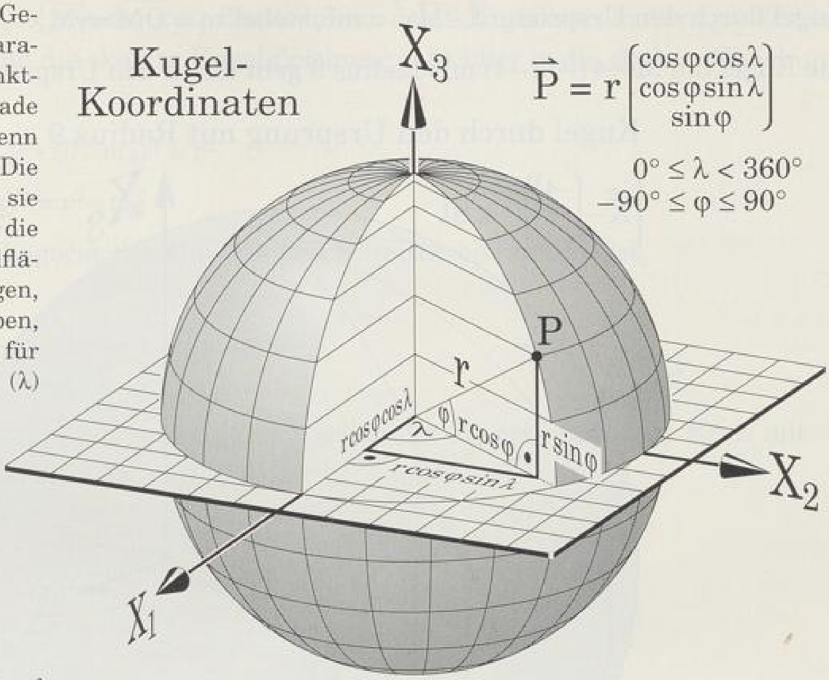
Für Punkte X innerhalb der Kugel gilt $(\vec{X}-\vec{M})^2 < r^2$,

für Punkte X außerhalb der Kugel gilt $(\vec{X}-\vec{M})^2 > r^2$.
Zum Beispiel liegt im Bild oben der Punkt I(8 | −10 | 5) innerhalb, A(10 | 0 | 10) außerhalb und D(6 | −3 | 13) auf der Kugel um (4 | −6 | 7) mit Radius 7.

Diese Art der Kugelgleichung ist eine skalare Gleichung, das heißt, sie beschreibt einen Zusammenhang zwischen den 3 Koordinaten eines jeden Kugelpunkts:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$.
(Auch die Normalform einer Ebene ist eine skalare Gleichung.)

Man kann die Punkte von Geraden und Ebenen mit Parametern ansteuern (Punktrichtungsformen). Die Gerade kommt mit einem aus, denn sie ist eindimensional. Die Ebene braucht zwei, denn sie ist zweidimensional. Und die Kugel? Um in der Kugelfläche an jeden Ort zu gelangen, genügen auch 2 Angaben, zum Beispiel die Winkel für die geografische Länge (λ) und Breite (φ):

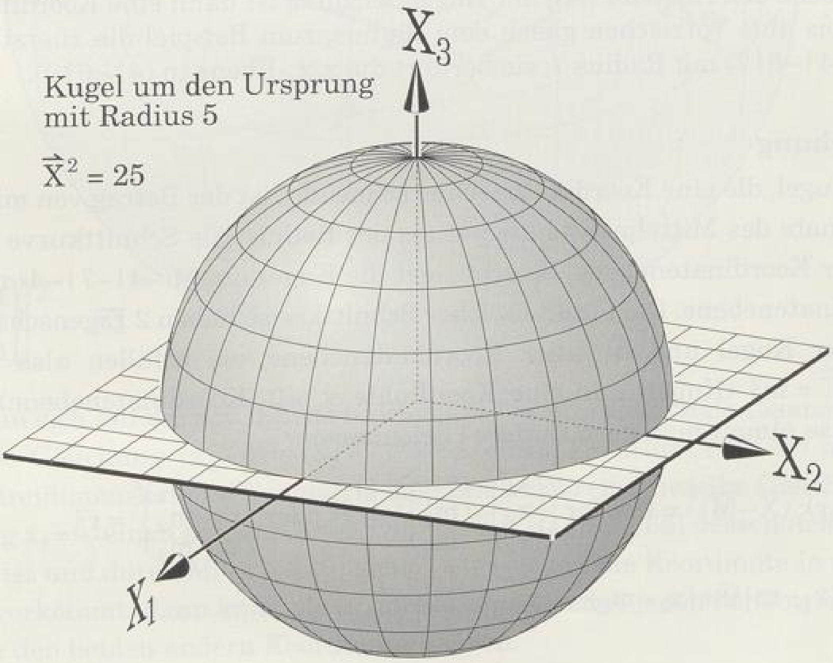
$$\vec{X} = \vec{M} + r\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\lambda\\ \cos\varphi\sin\lambda\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$



Die vorhin gezeigte Kugel um M(4|−6|7) mit Radius 7 läßt sich also skalar beschreiben

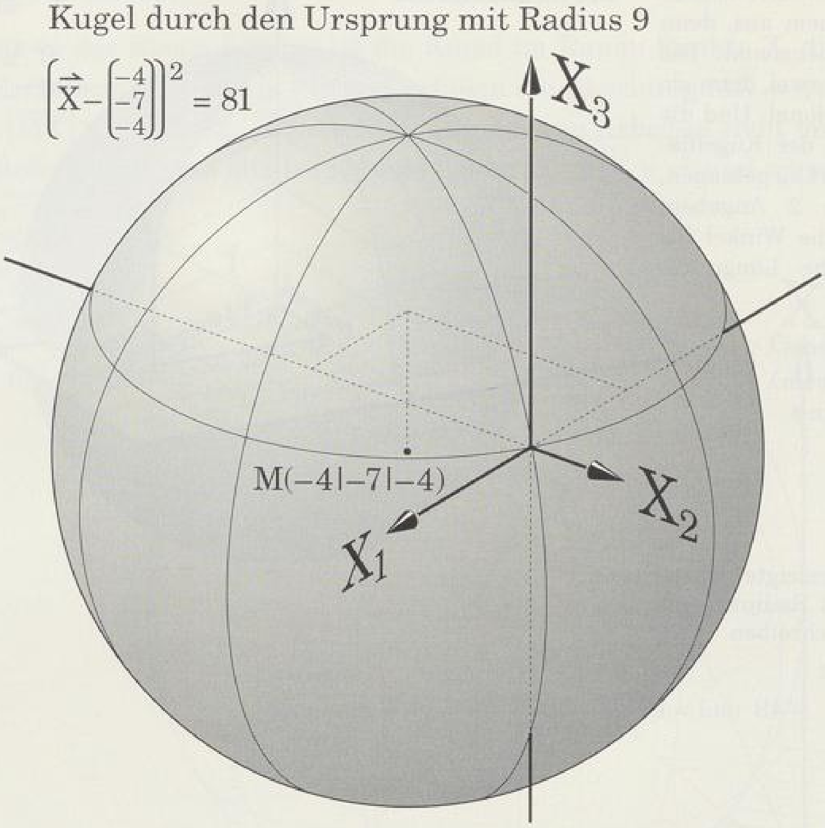
mit $\left(\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\ -6\\ 7\end{pmatrix}\right)^2 = 49$ und vektoriell mit $\vec{X} = \begin{pmatrix}4\\ -6\\ 7\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\lambda\\ \cos\varphi\sin\lambda\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$.

Besondere Kugeln



Kugel durch den Ursprung$(\vec{X}-\vec{M})^2 = m^2$, wobei $m = \overline{OM} = |\vec{M}|$

Die Kugel um M(–4 | –7 | –4) mit Radius 9 geht durch den Ursprung, denn $|\vec{M}| = 9$.



Bei einer Kugel, die eine Koordinatenebene berührt, hat der Mittelpunkt von dieser Koordinatenebene den Abstand r. In der Kugelgleichung ist dann eine Koordinate des Mittelpunkts bis aufs Vorzeichen gleich dem Radius, zum Beispiel die zuerst vorgestellte Kugel um (4 | –6 | 7) mit Radius 7; sie berührt die x_1x_2-Ebene in (4 | –6 | 0).

Kreisgleichung

Bei einer Kugel, die eine Koordinatenebene schneidet, ist der Betrag von mindestens einer Koordinate des Mittelpunkts kleiner als der Radius. Als Schnittkurve entsteht ein Kreis in der Koordinatenebene. So schneidet die Kugel um M(–4 | –7 | –4) mit Radius 9 jede Koordinatenebene. Die Punkte solcher Schnittkreise haben 2 Eigenschaften: Sie liegen auf der Kugel und in einer Koordinatenebene; sie erfüllen also 2 Gleichungen: $(\vec{X}-\vec{M})^2 = m^2$ (Kugel) und eine Koordinate $x_i = 0$ (Koordinatenebene). Für solche Schnittkreise nimmt man gern skalare Gleichungen.

Kugel K(M,r): $(\vec{X}-\vec{M})^2 = r^2$ oder $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}\right)^2 = r^2$ oder $\begin{pmatrix}x_1-m_1\\x_2-m_2\\x_3-m_3\end{pmatrix}^2 = r^2$

das ergibt $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2 = r^2$.

Die Kugelpunkte $(x_1 | x_2 | x_3)$ in der x_1x_2-Ebene bilden den Schnittkreis in der x_1x_2-Ebene; für sie gilt $(x_1 | x_2 | 0)$, und die skalare Kugelgleichung geht über in die skalare Gleichung für den Schnittkreis

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (0 - m_3)^2 = r^2$$

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 - m_3^2$$

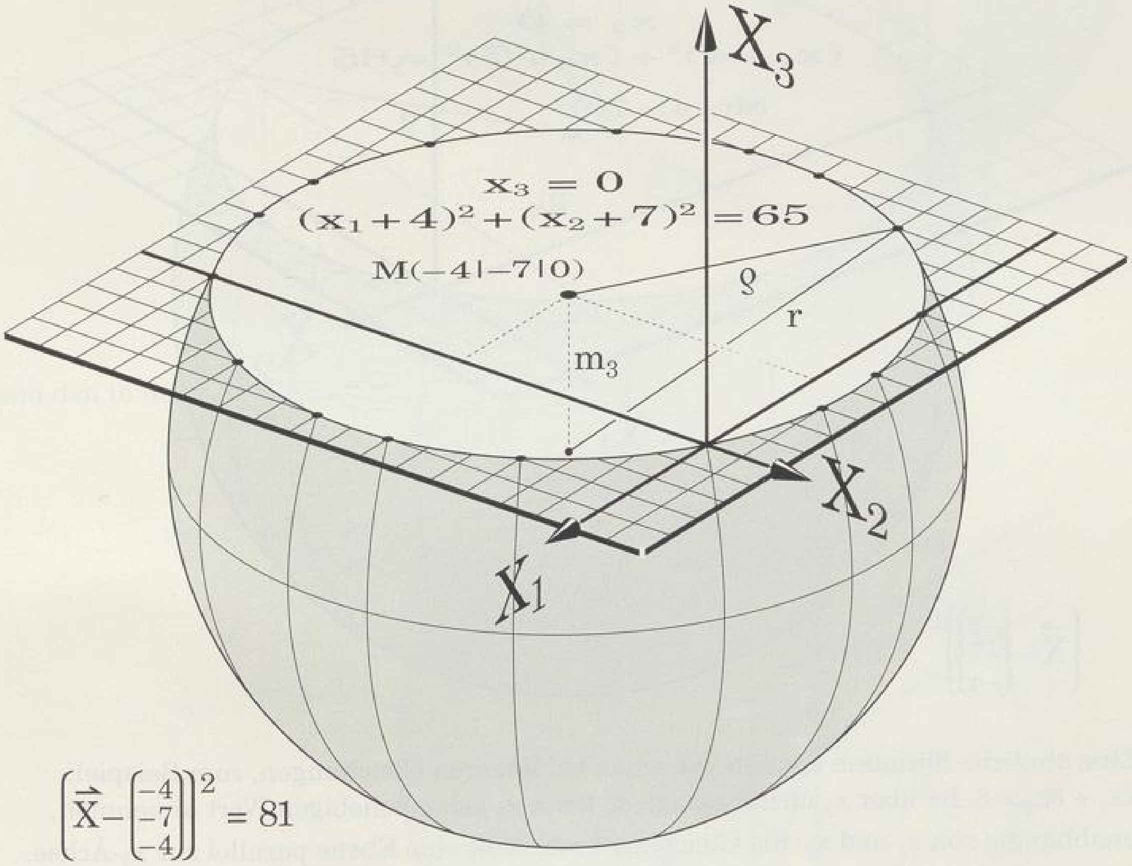
wobei $r^2 - m_3{}^2$ nach Pythagoras das Quadrat des Schnittkreisradius ρ ist, also $r^2 - m_3{}^2 = \rho^2$.

Gleichung eines Kreises in der x_1x_2-Ebene:

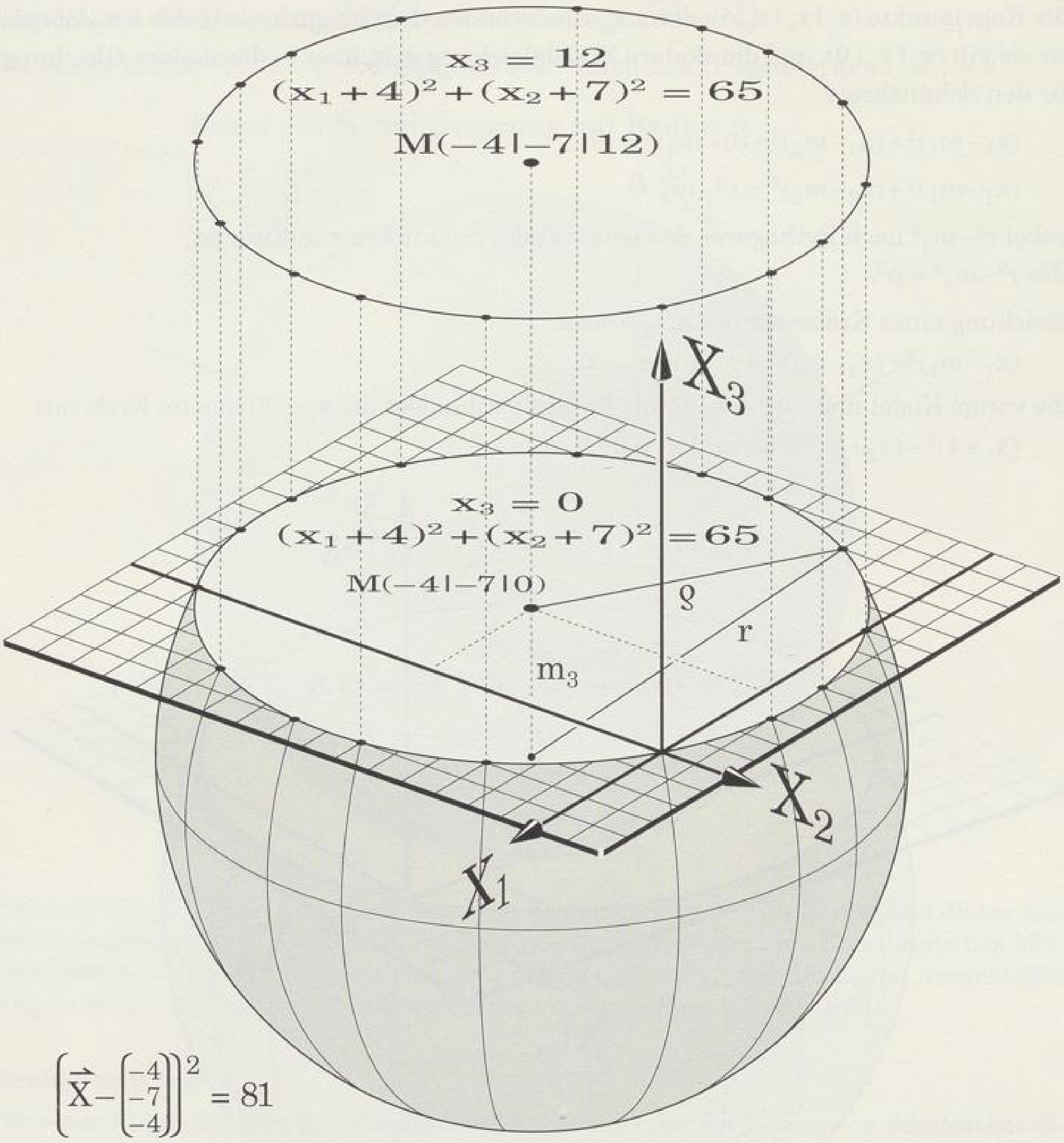
$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = \rho^2 \text{ und } x_3 = 0$$

Die vorige Kugel um $(-4 | -7 | -4)$ mit Radius 9 schneidet die x_1x_2-Ebene im Kreis mit

$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 7)^2 = 65 \text{ und } x_3 = 0$$

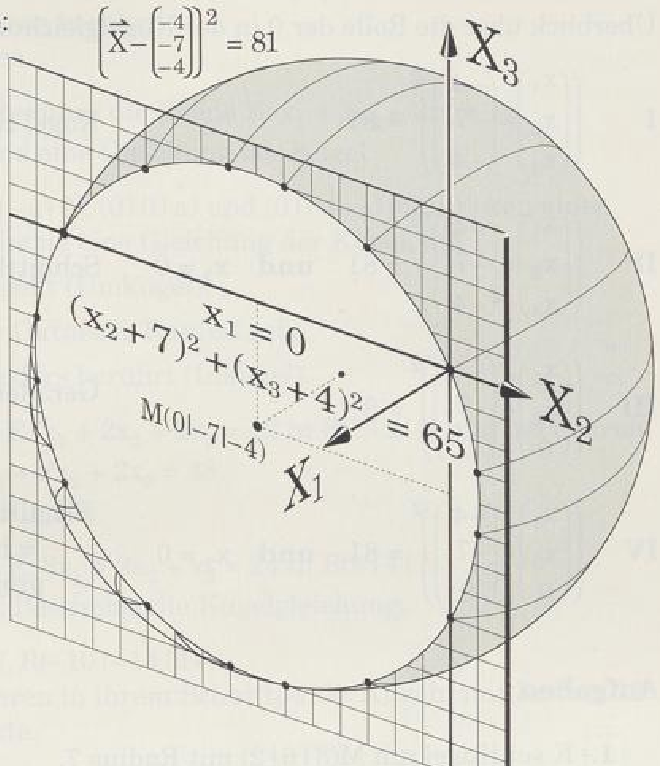


Nur wenn man sich auf die x_1x_2-Ebene beschränkt (zweidimensionale Geometrie), dann beschreibt die Gleichung $(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 7)^2 = 65$ einen Kreis um $(-4 | -7)$ mit Radius $\sqrt{65}$. In der dreidimensionalen Geometrie dagegen beschreibt dieselbe Gleichung (ohne die Bedingung $x_3 = 0$) einen geraden Kreiszylinder mit Radius $\sqrt{65}$, dessen Achse parallel zur x_3-Achse ist und durch $M(-4 | -7 | 0)$ geht. Denn wenn eine Koordinate in einer Gleichung nicht vorkommt, dann kann sie in der Raumgeometrie jeden beliebigen Wert unabhängig von den beiden andern Koordinaten haben.

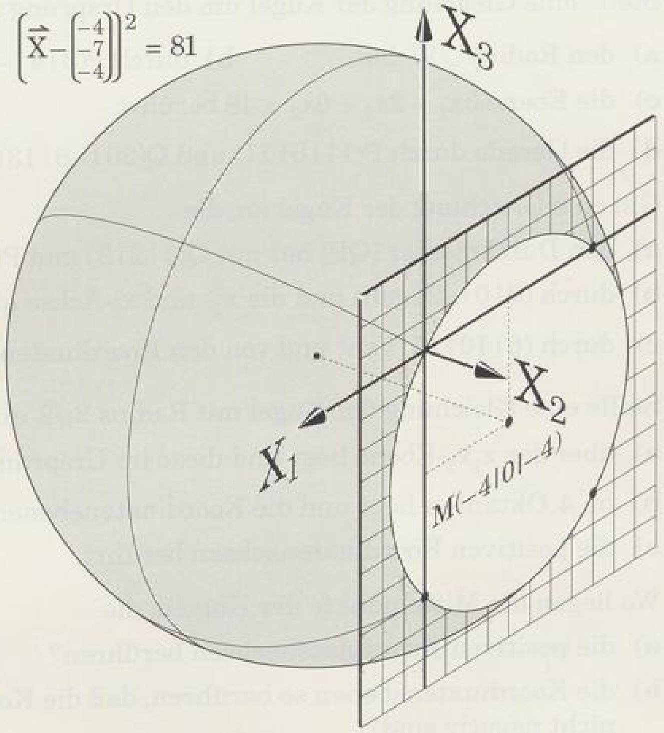


Eine ähnliche Situation kennen wir schon bei linearen Gleichungen, zum Beispiel: $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ist über x_3 nichts gesagt, so kann x_3 jeden beliebigen Wert annehmen, unabhängig von x_1 und x_2: die Gleichung beschreibt eine Ebene parallel zur x_3-Achse. Ist aber auch noch $x_3 = 0$, so beschreibt die Gleichung eine Gerade in der x_1x_2-Ebene.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch die beiden andern Schnittkreise: den in der x_2x_3-Ebene:



und den in der x_1x_3-Ebene:



Kugel-Kreis-Zylinder

Überblick über die Rolle der 0 in der Kugelgleichung

I $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$ — Kugel K um $(-4|-7|-4)$ mit Radius 9

II $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$ **und** $x_3 = 0$ — Schnittkreis von K und der x_1x_2-Ebene

III $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$ — Gerader Kreiszylinder Z mit Radius 9 parallel zur x_3-Achse

IV $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$ **und** $x_3 = 0$ — Schnittkreis von Z und der x_1x_2-Ebene = in die x_1x_2-Ebene senkrecht projizierter Umriß der Kugel K

Aufgaben

1. K sei Kugel um $M(3|6|2)$ mit Radius 7.
Welche der folgenden Punkte liegen in, auf oder außerhalb der Kugel?
$A(5|9|8)$, $B(-1|0|0)$, $C(0|0|0)$, $D(1|1|1)$, $E(3|6|2)$, $F(3|6|-5)$, $G(0|0|4)$

2. Stelle eine Gleichung der Kugel um den Ursprung auf, die

a) den Radius $\sqrt{17}$ hat. **b)** durch $P(3|4|-12)$ geht.

c) die Ebene $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 49$ berührt.

d) die Gerade durch $P(11|0|11)$ und $Q(20|-6|13)$ berührt.

3. Gib eine Gleichung der Kugel an, die

a) den Durchmesser [QP] hat mit $Q(1|2|3)$ und $P(5|6|7)$

b) durch $(0|0|-2)$ geht und die x_1- und x_2-Achse als Symmetrieachsen hat.

c) durch $(6|10|15)$ geht und von den Koordinatenebenen halbiert wird.

4. Stelle eine Gleichung der Kugel mit Radius $2\sqrt{2}$ auf, die

a) über der x_1x_2-Ebene liegt und diese im Ursprung berührt.

b) im 4. Oktanten liegt und die Koordinatenebenen berührt.

c) die positiven Koordinatenachsen berührt.

5. Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die

a) die positiven Koordinatenachsen berühren?

b) die Koordinatenebenen so berühren, daß die Koordinaten der Berührpunkte nicht negativ sind?

•**6.** Kugeln mit Radius 9 schneiden die x_1x_2-Ebene in einem Kreis mit Radius $4\sqrt{2}$, der 2 negative Koordinatenachsen berührt.
Bestimme die Kugelgleichungen.

7. Eine Kugel um den Ursprung berühre die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$.
Bestimme den Berührpunkt und eine Gleichung der Kugel.

•**8.** $(a|0|0)$, $(-a|0|0)$, $(0|a|0)$, $(0|-a|0)$, $(0|0|a)$ und $(0|0|-a)$ sind Ecken eines regelmäßigen Oktaeders. Bestimme eine Gleichung der Kugel, die

a) durch die Oktaeder-Ecken geht (Umkugel).

b) durch die Mittelpunkte der Oktaeder-Kanten geht.

c) die Seitenflächen des Oktaeders berührt (Inkugel).

•**9.** Eine Kugel berühre die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$ in $B(2|2|?)$ und habe ihren Mittelpunkt in der Ebene F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 48$.
Bestimme eine Gleichung der Kugel.

•**10.** Eine Kugel berühre die Ebene E: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$ in $B(4|4|?)$ und gehe durch den Ursprung. Bestimme die Kugelgleichung.

•**11.** $P(-12|-14|12)$, $Q(-3|-20|14)$, $R(-10|-14|14)$.
Die Geraden PQ und PR berühren in ihrem Schnittpunkt Kugeln mit Radius 22.
Berechne die Kugelmittelpunkte.

•**12.** Bestimme Gleichungen der Kugeln mit Radius 11, die die Ebene $2x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 18$ berühren und ihren Mittelpunkt auf der Gerade durch $(5|5|-11)$ und $(10|16|-16)$ haben.