Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

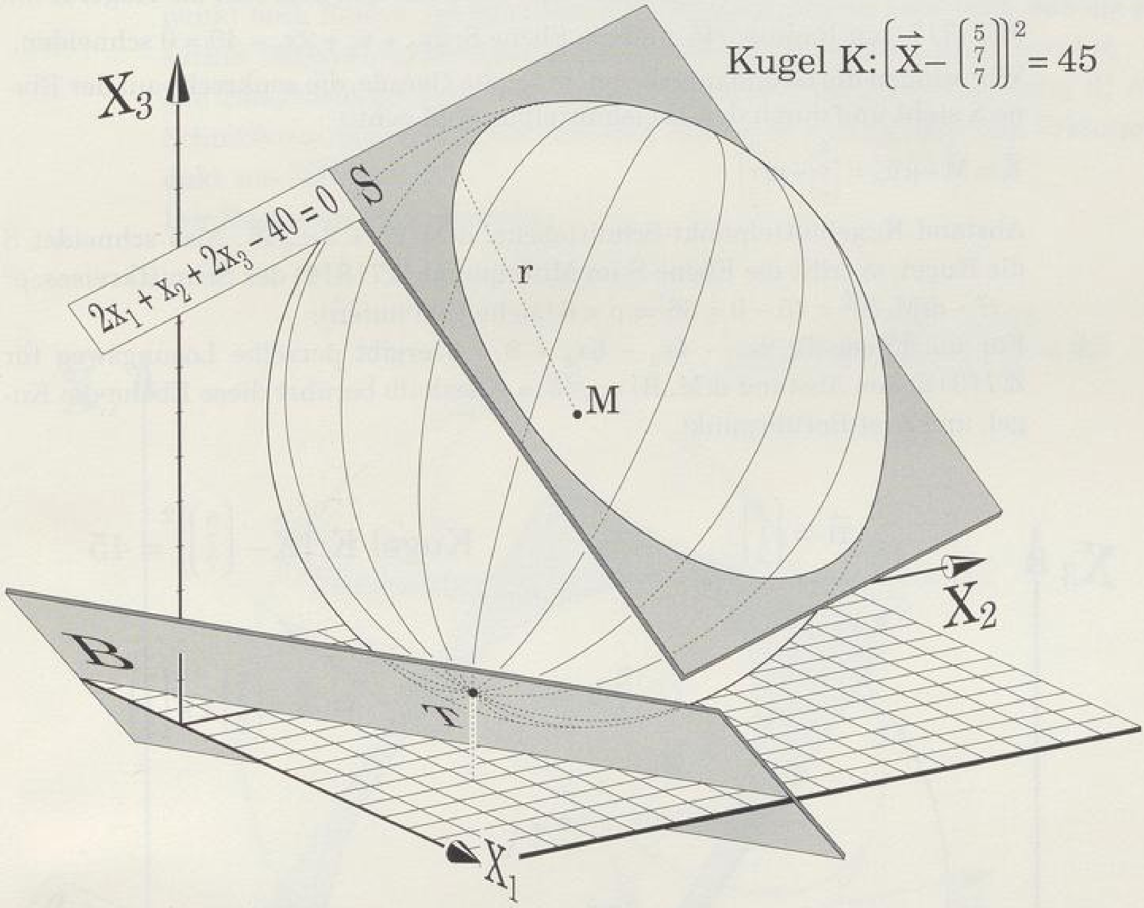
3. Kugel und Ebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

3. Kugel und Ebene

Ähnlich wie bei der Lage von Kugel und Gerade unterscheiden wir die 3 Fälle:

- genau ein gemeinsamer Punkt: Berührung; die Ebene ist **Tangentialebene**
- unendlich viele gemeinsame Punkte: Schnittkreis; die Ebene ist **Schnittebene**
- kein gemeinsamer Punkt; die Ebene ist **Passantebene**.



Lagebestimmung

Die Frage, welcher Fall vorliegt, klärt man durch Lösen der Grundaufgabe: Abstand Punkt-Ebene. Man berechnet den Abstand d(M, E) von Kugelmittelpunkt M und Ebene E und vergleicht ihn mit dem Kugelradius r:

- $d(M, E) = r \Rightarrow$ E ist Tangentialebene
- $d(M, E) < r \Rightarrow$ E ist Schnittebene
- $d(M, E) > r \Rightarrow$ E ist Passantebene

Solche Aufgaben haben wir früher schon gelöst. Bleiben noch die gemeinsamen Punkte. Den Berührpunkt findet man auch mit dieser Grundaufgabe. Die Gleichung des Schnittkreises können wir mit unsern Mitteln nicht aufstellen. Allgemein läuft das Ganze so ab:

- $d(M, E) = \overline{MZ}$ berechnen, Z ist die senkrechte Projektion von M in E

- $d(M, E) > r$, die Ebene E ist Passantebene,
  Z ist der Ebenenpunkt, der der Kugel am nächsten liegt
- $d(M, E) = r$, die Ebene E ist Tangentialebene, Z ist der Berührpunkt – fertig!
- $d(M, E) < r$, die Ebene E ist Schnittebene, Z ist der Schnittkreis-Mittelpunkt,
  Pythagoras liefert den Schnittkreis-Radius ρ: $\rho^2 = r^2 - d(M,E)^2$

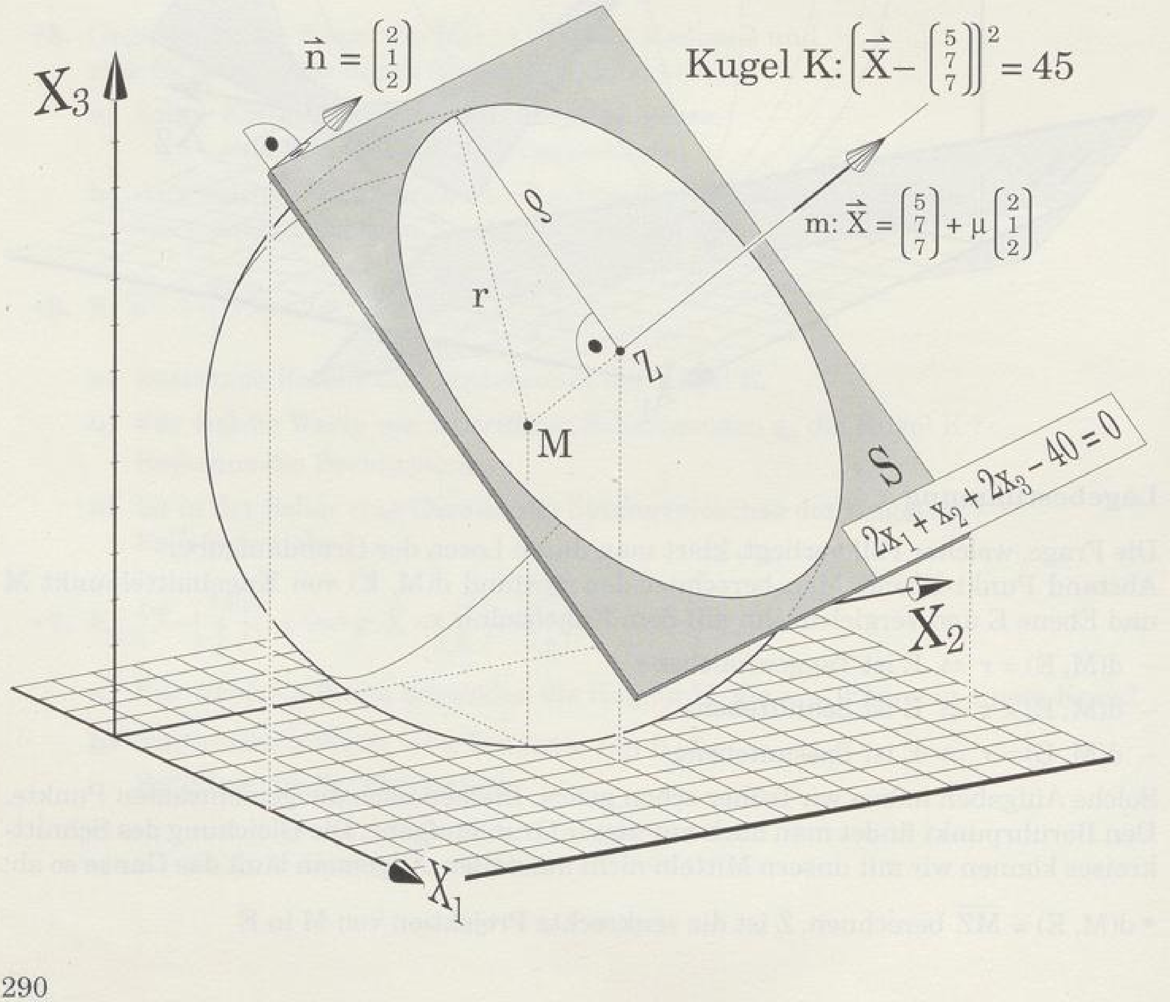
Beispiel: Berechne Mittelpunkt Z und Radius ρ des Kreises, in dem sich die Kugel K um $M(5|7|7)$ mit Radius $\sqrt{45}$ und die Ebene $S: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 40 = 0$ schneiden.

Wir wenden die Grundaufgabe an. m sei die Gerade, die senkrecht auf der Ebene S steht und durch den Kugelmittelpunkt M geht:

$\vec{X} = \vec{M} + \mu\vec{n_S} = \begin{pmatrix}5\\7\\7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Abstand Kugelmittelpunkt-Schnittebene: $d(M, Z) = 3 < \sqrt{45}$. Also schneidet S die Kugel. m trifft die Ebene S im Mittelpunkt $Z(7|8|9)$ des Schnittkreises. $\rho^2 = r^2 - d(M, S)^2 = 45 - 9 = 36 \Rightarrow \rho = 6$ (siehe Bild unten).

Für die Ebene $B: 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 8 = 0$ ergibt derselbe Lösungsweg für $Z(7|3|2)$ den Abstand $d(M, B) = \sqrt{45} = r$, deshalb berührt diese Ebene die Kugel, und Z ist Berührpunkt.



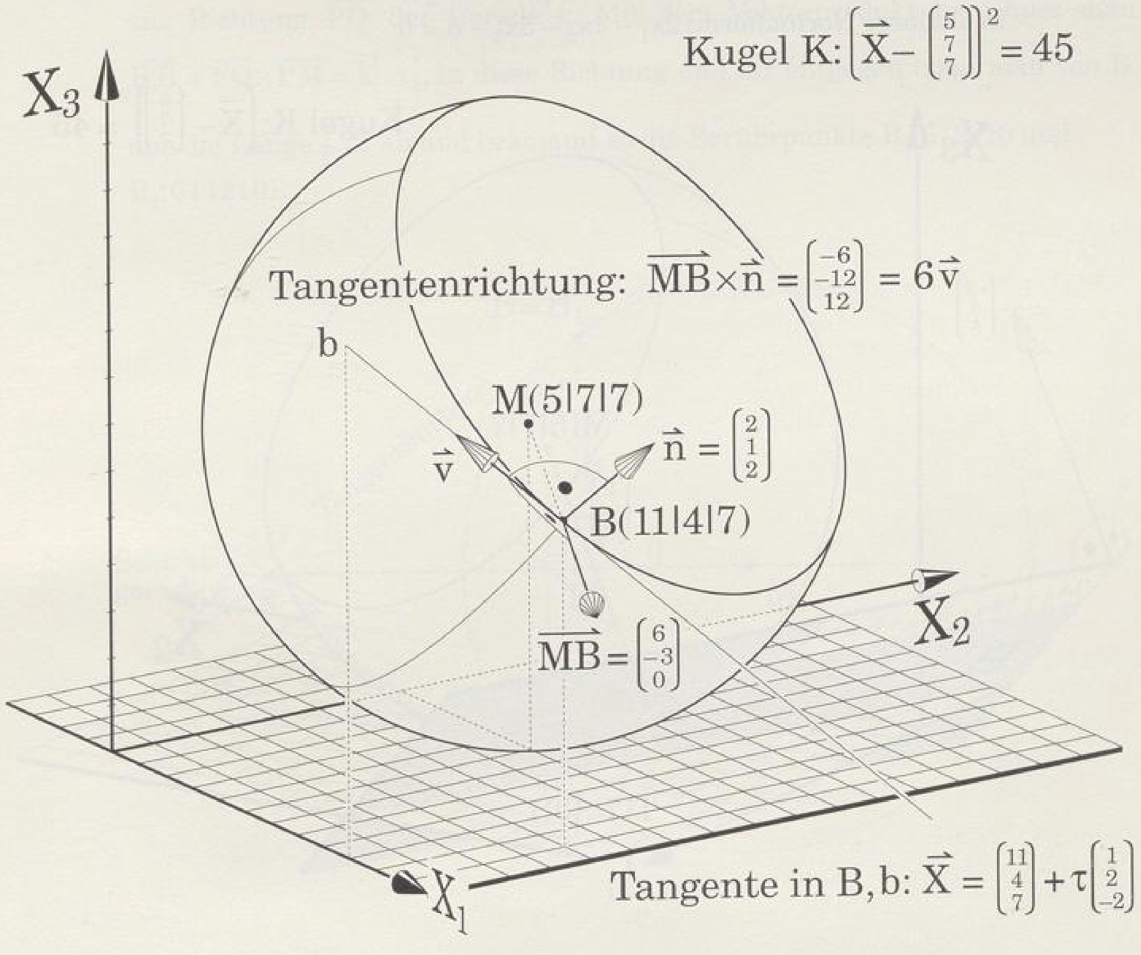
Zum Schnittkreis noch eine Aufgabe. Auch hier braucht man die Kugelgleichung nicht, dafür aber ...

*Beispiel: Zeige: Der Punkt B(11 | 7 | 7) liegt auf dem Schnittkreis der Kugel um M(5 | 7 | 7) mit Radius $\sqrt{45}$ und der Ebene S: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 40 = 0$. Bestimme eine Gleichung der Schnittkreis-Tangente b in B.

Obwohl die Aufgabe viel vom Schnittkreis handelt, braucht man weder Mittelpunkt noch Radius des Schnittkreises. Wichtig aber ist zu wissen, daß die gesuchte Tangente in der Schnittkreis-Ebene S liegt **und** die Kugel berührt.

Die Tangentenrichtung $\vec{v}$ ist deshalb senkrecht zur Normalrichtung $\vec{n_s}$ der Schnittkreis-Ebene **und** zur Richtung $\overrightarrow{MB}$. $\vec{v}$ ist also parallel zum Vektorprodukt von $\overrightarrow{MB}$ und $\vec{n_s}$.

Der Rest steht im Bild unten.



Gleichung der Tangentialebene

Gegeben ist eine Kugel um M mit Radius r und ein Punkt T auf ihr.
Gesucht ist die Gleichung der Ebene B, die die Kugel in T berührt.

Die Tangentialebene B geht durch T: $\vec{n}\circ(\vec{X}-\vec{T}) = 0$

und hat die Normalrichtung $\vec{n} = \overrightarrow{MT} = \vec{T}-\vec{M}$.

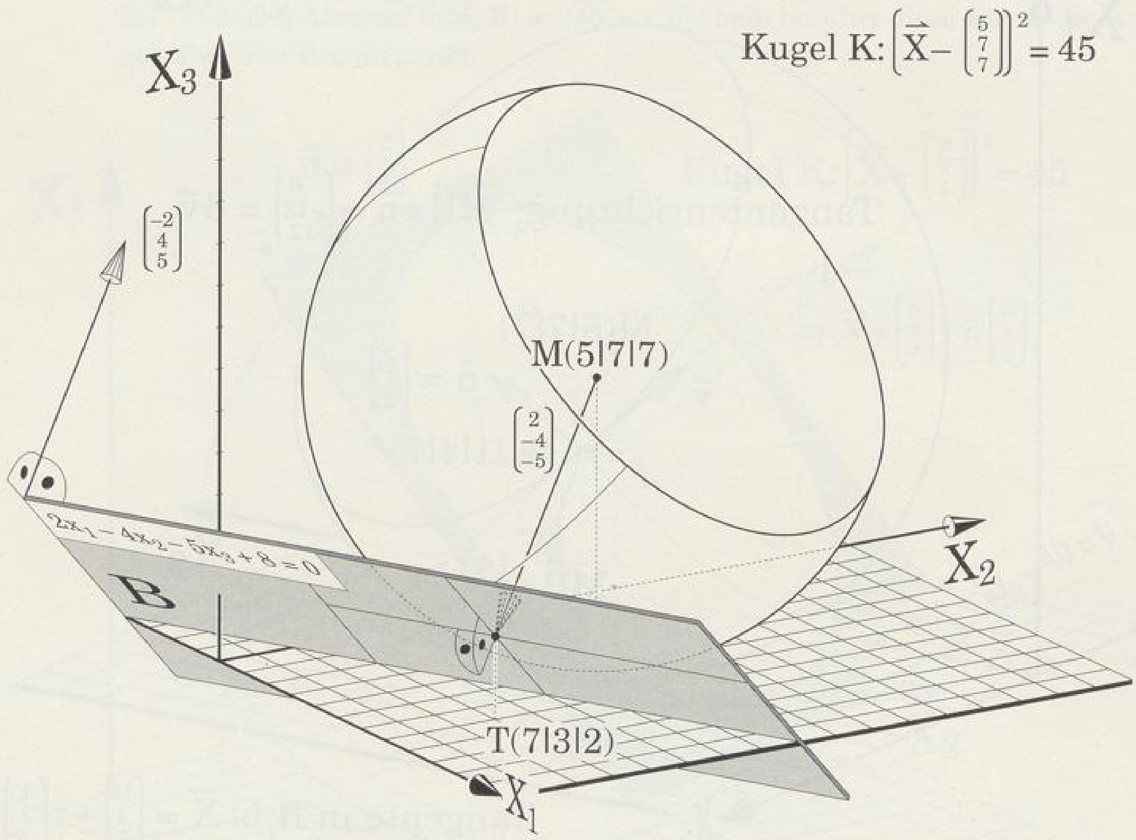
Gleichung der Tangentialebene B: $(\vec{T}-\vec{M})\circ(\vec{X}-\vec{T}) = 0$

Beispiel: Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene, die die Kugel um M(5|7|7) in T(7|3|2) berührt.

$$\overrightarrow{MT} = \vec{T}-\vec{M} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix},$$

$$\text{Gleichung der Tangentialebene: } \begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}7\\3\\2\end{pmatrix}\right) = 0,$$

in skalarer Normalform: $2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 8 = 0$.

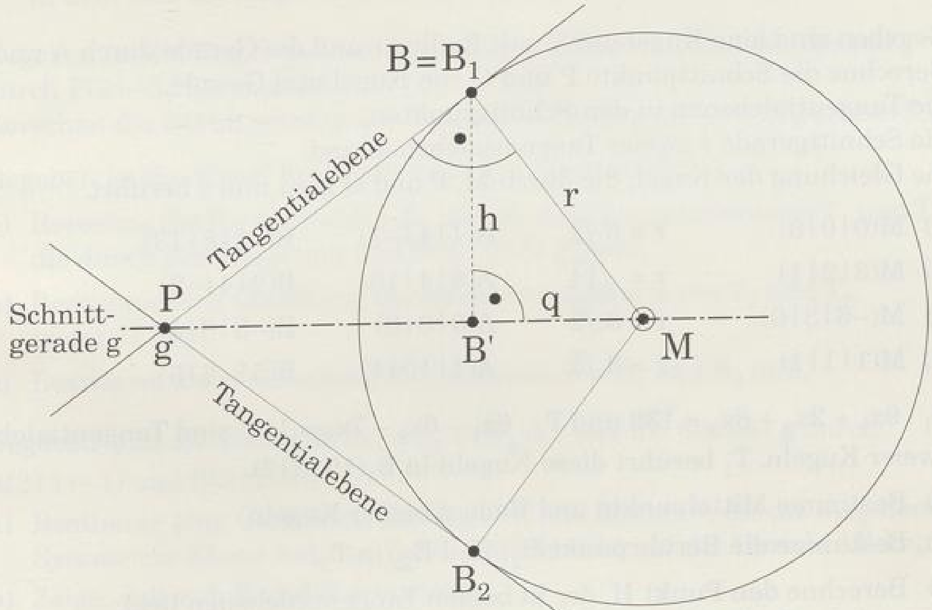


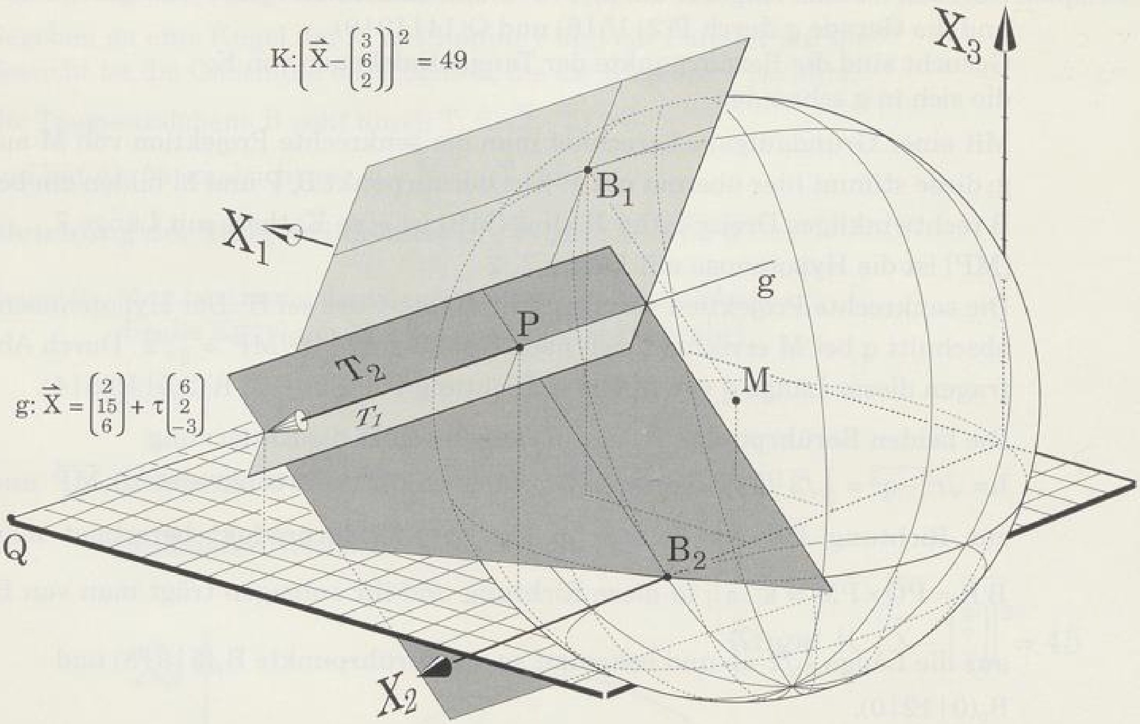
*Beispiel: Gegeben ist eine Kugel K um M(3 | 6 | 2) mit Radius 7
und die Gerade g durch P(2 | 15 | 6) und Q(14 | 19 | 0).
Gesucht sind die Berührpunkte der Tangentialebenen von K,
die sich in g schneiden.

Mit einer Grundaufgabe berechnet man die senkrechte Projektion von M auf g; diese stimmt hier überein mit P. Ein Berührpunkt B, P und M bilden ein bei B rechtwinkliges Dreieck: Der Radius [MB] ist eine Kathete mit Länge 7, [MP] ist die Hypotenuse mit Länge $7\sqrt{2}$.

Die senkrechte Projektion von B auf die Hypotenuse sei B'. Der Hypotenusenabschnitt q bei M errechnet sich nach Euklid zu $q = r^2/\overline{MP} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$. Durch Abtragen dieser Länge q von M aus in Richtung P ergibt sich B'(2,5 | 10,5 | 4).

Die beiden Berührpunkte B_1 und B_2 haben von B' die Entfernung $h = \sqrt{r^2 - q^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ (Pythagoras!). Die Richtung $\overrightarrow{B'B}$ ist senkrecht zu $\overrightarrow{MP}$ und zur Richtung $\overrightarrow{PQ}$ der Gerade g. Mit dem Vektorprodukt berechnet man $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PM} = k\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$; in diese Richtung und ihr entgegen trägt man von B' aus die Länge $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ ab und bekommt so die Berührpunkte $B_1(5 | 9 | 8)$ und $B_2(0 | 12 | 0)$.





Aufgaben

1. Gegeben sind eine Kugel um M mit Radius r und die Gerade durch A und B.
Berechne die Schnittpunkte P und Q von Kugel und Gerade,
die Tangentialebenen in den Schnittpunkten,
die Schnittgerade s zweier Tangentialebenen und
die Gleichung der Kugel, die durch M, P und Q geht und s berührt.

a)	M(0 | 0 | 0)	$r = 6\sqrt{2}$	A(1 | 4 | –1)	B(–1 | 8 | 13)
b)	M(3 | 2 | 1)	$r = \sqrt{14}$	A(6 | 4 | 10)	B(2 | 4 | –2)
c)	M(–6 | 3 | 0)	$r = 3\sqrt{2}$	A(0 | 0 | 0)	B(–8 | 8 | 4)
d)	M(1 | 1 | 1)	$r = 3\sqrt{3}$	A(1 | 10 | 1)	B(5 | –6 | 5)

•2. $T_1 : 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 138$ und $T_2 : 6x_1 - 6x_2 - 7x_3 = 114$ sind Tangentialebenen zweier Kugeln. T_1 berührt diese Kugeln in $B_1(10 \mid 3 \mid ?)$.

a) Bestimme Mittelpunkte und Radien beider Kugeln.

b) Bestimme die Berührpunkt B_{21} und B_{22} in T_2.

c) Berechne den Punkt H, der in beiden Tangentialebenen liegt und von B_1 die kleinste Entfernung hat.

3. Die Ebene T_1 durch A(4 | 41 | –6), B(0 | 16 | 6) und C(0 | 0 | 14) berührt eine Kugel K um M(1 | 2 | 3).

a) Berechne den Kugelradius und den Berührpunkt.

b) Stelle eine Gleichung der Ebene E auf, die auch durch A und B geht und die Kugel halbiert.

c) Stelle eine Gleichung der Ebene T_2 auf, die auch durch A und B geht und die Kugel berührt.

4. Gegeben ist die Ebenenschar E_a: $x_1 + x_2 + x_3 - a = 0$, sowie die Punkte $P(-2|2|0)$ und $Q(-6|6|2)$. [PQ] ist Durchmesser der Kugel K.
   a) Bestimme eine Gleichung von K.
   b) Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die [PQ] als Sehne haben?
   c) Für welche a-Werte schneiden sich K und E_a in einem Kreis ?
   d) Für welchen a-Wert hat der Kugelmittelpunkt von E_a den Abstand $\sqrt{3}$?
   e) Berechne Mittelpunkt M_4 und Radius r_4 des Kreises, in dem sich K und die Ebene E_4 schneiden.

•5. Bestimme die Mittelpunkte der Kugeln mit Radius 26, die die Ebene T: $3x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 24 = 0$ berühren und von den Ebenen E: $9x_1 - 12x_2 - 2x_3 = 0$ und F: $15x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 51 = 0$ halbiert werden.

•6. Gegeben ist die Kugel um $M(2|-2|1)$ mit Radius 3.
   a) $(a|-a|a)$ und $(2|-2|-8)$ bestimmen eine Geradenschar. Welche Schargeraden (a=?) berühren die Kugel?
   b) Bestimme Radius und Mittelpunkt des Kreises, in dem sich die Kugel und die x_1x_2-Ebene schneiden.

••7. Gegeben ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 9 und die Gerade g durch $P(3|-3|12)$ und $Q(11|1|11)$.
Berechne die Berührpunkte der Tangentialebenen, die sich in g schneiden.

••8. Gegeben ist die Kugel K um $M(-14|-21|7)$ mit Radius 7.
   a) Berechne die Berührpunkte B_1 und B_2 der Tangentialebenen T_1 und T_2 von K, die durch den Ursprung und $P(3|-2|0)$ gehen.
   b) Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene S von T_1 und T_2, in der M liegt.
   c) Bestimme die senkrechten Projektionen von B_1 und B_2 in S.

•9. Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ und die Gerade g durch $A(2|1|-1)$ und $B(3|2|-3)$.
   a) Bestimme eine Gleichung der Kugel K mit Radius 5, die die x_1x_3-Ebene als Symmetrie-Ebene hat und deren Mittelpunkt auf der Gerade AB liegt.
   b) Zeige, daß sich E und K schneiden.
   c) Berechne Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises k.
   d) Zeige, daß $S(1|4|-2)$ gemeinsamer Punkt von E und K ist.
   e) Bestimme eine Gleichung der Ebene T, die K in S berührt.
   f) Die Kugeln K und K' liegen symmetrisch zur Ebene T. Bestimme eine Gleichung von K'.
   g) Bestimme eine Gleichung der Tangente t in E, die den Schnittkreis k in S berührt.