Stochastik

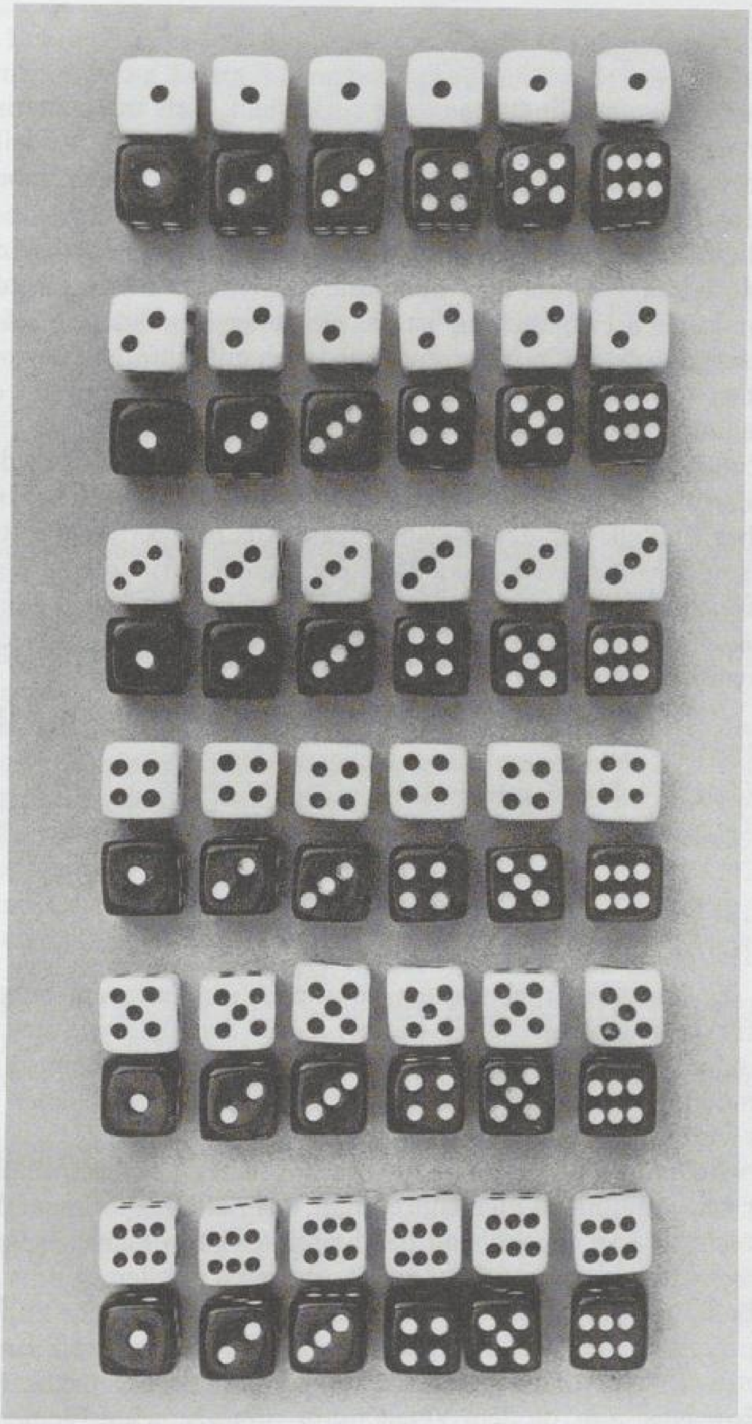
Barth, Friedrich

München, [20]03

2. Ergebnisräume

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

2. Ergebnisräume



Drei Dinge gibt es, die ich nicht unter Kontrolle habe: den Fall der Würfel, den Lauf des Kamo-Flusses und die aufrührerischen Mönche vom Berge Hiei.

Go-Shirakawa, 77. Kaiser von Japan (1156–1158)

2. Ergebnisräume

2.1. Grundbegriffe

Um Vorgänge und Situationen der wirklichen Welt mathematisch beschreiben zu können, muß man durch Abstraktion mathematische Modelle konstruieren, die die wesentlichen Eigenschaften der Wirklichkeit wiedergeben. Es ist dabei durchaus möglich, zu ein und derselben Realität verschiedene mathematische Modelle zu konstruieren. So können z. B. mechanische Vorgänge durch die klassische Mechanik *Newton*s oder durch die Relativitätstheorie *Einstein*s beschrieben werden. Je nach Fragestellung ist das eine oder das andere Modell zweckmäßig. Die Bewegung eines Kraftfahrzeugs wird man mit Hilfe der *Newton*-Mechanik beschreiben, während man die Bewegung eines Elektrons mit Hilfe der Relativitätstheorie untersuchen wird.
Das Zufallsgeschehen wird durch das mathematische Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, kurz der Stochastik, beschrieben. Dazu müssen zunächst Modelle für das jeweilige reale Zufallsexperiment entwickelt werden. Ein erster Schritt bei der Modellbildung besteht darin, die zu betrachtenden Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu einer mathematischen Menge zusammenzufassen. Es ist üblich, diese Menge als »Ergebnisraum« zu bezeichnen und durch Ω zu symbolisieren.
Beim Werfen mit einem Würfel können wir beispielsweise folgende Ergebnisräume betrachten:

$\Omega_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{Kante}, \text{Ecke}\}$
$\Omega_2 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\Omega_3 := \{6, \text{keine } 6\}$
$\Omega_4 := \{\text{gerade Augenzahl}, \text{ungerade Augenzahl}\} =: \{g, u\}$
$\Omega_5 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Auch Ω_5 kann als Ergebnisraum verwendet werden; man interessiert sich hier eben für die 6 genauso wenig wie bei Ω_2 für die Fälle »Kante« und »Ecke« aus Ω_1. Andererseits kann auch $\Omega_6 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ durchaus als Ergebnisraum verwendet werden, obwohl die Augenzahl 7 bei handelsüblichen Würfeln nie auftreten wird.
Man wird natürlich bei der Konstruktion eines Ergebnisraums darauf achten, daß er keine unnötigen Elemente enthält, das Zufallsexperiment der Fragestellung entsprechend aber hinreichend beschreibt. So kann man beispielsweise Ω_4 nicht verwenden, wenn es darauf ankommt, ob eine 6 gefallen ist oder nicht.
Eine Bedingung wird man an den Ergebnisraum aber auf alle Fälle stellen müssen: Jedem Ausgang des Zufallsexperiments darf nicht mehr als ein Element von Ω zugeordnet werden. So ist z. B. die Menge {gerade Augenzahl, Prim-Augenzahl} kein Ergebnisraum, da dem Versuchsausgang »2« beide Elemente dieser Menge zugeordnet wären.
Bei manchen Experimenten ist es naheliegend, Ergebnisräume mit unendlich vielen Elementen zu betrachten. Eine exakte Behandlung solcher Ergebnisräume

ist mathematisch aufwendig. Wir verzichten daher im folgenden auf sie und beschränken uns auf Ergebnisräume mit endlich vielen Elementen.

Definition 15.1: Eine Menge $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ heißt **Ergebnisraum** eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element ω_i aus Ω zugeordnet ist. Die ω_i heißen dann die **Ergebnisse** des Zufallsexperiments.

Wir haben gesehen, daß zu einem realen Zufallsexperiment verschiedene Ergebnisräume konstruiert werden können. Gewisse dieser Ergebnisräume hängen dabei auf einfache Weise voneinander ab. So sind z.B. die Ergebnisse von Ω_2 denen von Ω_4 auf folgende Art zugeordnet:

$$\Omega_2 = \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ \}$$

$$\Omega_4 = \{\ g\ ,\ u\ \}$$

Ω_4 nennt man eine **Vergröberung** von Ω_2 und umgekehrt Ω_2 eine **Verfeinerung** von Ω_4. Offensichtlich bedeutet eine Vergröberung einen Verlust an Information. Das Ergebnis »gerade« läßt nicht mehr erkennen, welche der Augenzahlen 2, 4 oder 6 gefallen ist. Diesen Informationsverlust nimmt man jedoch oft bewußt in Kauf, wenn die Fragestellung dies gestattet.

Da jeder Ergebnisraum durch einen Abstraktionsprozeß aus dem realen Zufallsexperiment gewonnen wird, ist es verständlich, daß umgekehrt zu einem mathematischen Ergebnisraum Ω durchaus verschiedene reale Zufallsexperimente gehören können. So kann $\Omega = \{0; 1\}$ aufgefaßt werden als Ergebnisraum folgender realer Zufallsexperimente:

a) Münzenwurf mit den Ergebnissen $0 :=$ »Wappen« und $1 :=$ »Zahl«

b) Würfelwurf mit den Ergebnissen $0 :=$ »gerade Augenzahl«, $1 :=$ »ungerade Augenzahl«

c) Ziehen aus einer Urne mit roten und schwarzen Kugeln mit den Ergebnissen $0 :=$ »rot« und $1 :=$ »schwarz«

d) Qualitätskontrolle mit den Ergebnissen $0 :=$ »unbrauchbar« und $1 :=$ »brauchbar«

e) Ziehen eines Loses mit den Ergebnissen $0 :=$ »Niete« und $1 :=$ »Treffer«

2.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

2.2.1. Ziehen ohne Zurücklegen

Wir denken uns eine Urne mit 8 Kugeln, von denen 4 rot, 3 schwarz und 1 grün sind (Figur 15.1). Wir entnehmen der Urne eine Kugel und notieren ihre Farbe. Dann entnehmen wir eine weitere Kugel und notieren ebenfalls ihre Farbe. Da die jeweils entnommene Kugel nicht in die Urne zurückgelegt wurde, nennt

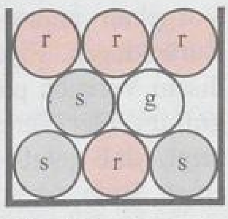


Fig. 15.1 Urne

man diesen Vorgang **Ziehen ohne Zurücklegen.** In einem **Baumdiagramm** können wir die Ergebnisse dieses zweistufigen Experiments ablesen und zugleich sehen, wie sie zustande kommen können. Zum Zeichnen des Baumdiagramms (Figur 16.1) zerlegt man das Zufallsexperiment in seine Stufen und notiert die möglichen Teilergebnisse jeder Stufe. Dabei ist zu beachten, daß die Teilergebnisse einer Stufe vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe abhängig sind. So kann z. B. beim 2. Zug keine grüne Kugel mehr gezogen werden, wenn beim 1. Zug bereits die grüne Kugel gezogen wurde. Als zusätzliche Information kann man jeweils den Urneninhalt, hier als Zahlentripel, angeben.

Eine andere Möglichkeit, einen Ergebnisraum für dieses Zufallsexperiment zu gewinnen, ist die **Mehrfeldertafel** (Figur 16.2). Ω_2 enthält aufgrund seiner systematischen Konstruktion auch das Ergebnis gg, das jedoch ebenso wie die 7 beim Würfeln nicht auftreten kann. Dennoch ist Ω_2 ein zulässiger Ergebnisraum.

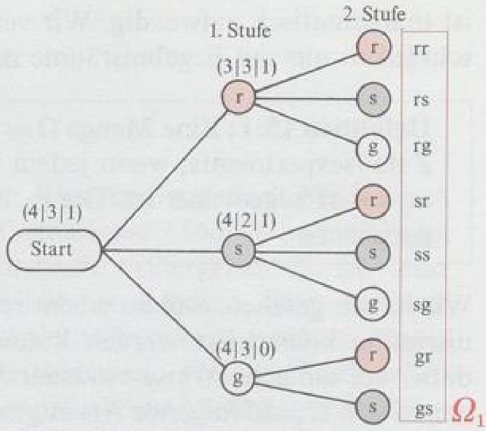


Fig. 16.1 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

		2. Zug		
		r	s	g
1. Zug	r	rr	rs	rg
	s	sr	ss	sg
	g	gr	gs	gg

Ω_2

Fig. 16.2 Mehrfeldertafel für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

2.2.2. Ziehen mit Zurücklegen

Aus der Urne von Figur 15.1 sollen wieder 2 Kugeln entnommen werden. Diesmal jedoch wird nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt, der Urneninhalt gut durchgemischt und anschließend eine Kugel entnommen. Ein solches Vorgehen nennt man **Ziehen mit Zurücklegen.** Figur 16.3 zeigt ein zu disem Versuch passendes Baumdiagramm. Der Vergleich mit Fig. 16.1 zeigt, daß jetzt die Teilergebnisse einer Stufe nicht mehr vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe

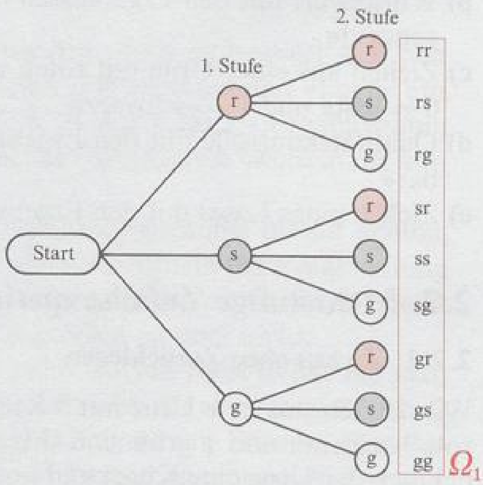


Fig. 16.3 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

abhängen. Die Angabe des Urneninhalts erübrigt sich in diesem Baumdiagramm, da er sich ja während des Experiments nicht ändert.
Die Konstruktion einer Mehrfeldertafel für diesen Versuch führt wiederum zu Figur 16.2, wobei jetzt das Feld gg einem möglichen Ergebnis entspricht.

2.2.3. n-Tupel als Ergebnisse

Manche Zufallsexperimente sind aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig.** Unsere obigen Beispiele zeigten 2stufige Zufallsexperimente.
Andererseits lassen sich oft komplizierte Zufallsexperimente dadurch übersichtlicher darstellen, daß man sie durch ein mehrstufiges Zufallsexperiment ersetzt. Zieht man etwa aus der Urne von Figur 15.1 die beiden Kugeln nicht nacheinander, sondern gleichzeitig, so ist das ein anderes reales Zufallsexperiment. Dieses läßt sich jedoch durch das Hintereinanderziehen ohne Zurücklegen ersetzen.*
Wir wollen diesen Ersetzungsvorgang am Experiment »Gleichzeitiges Werfen von 2 Würfeln« nochmals verdeutlichen. Man findet einen Ergebnisraum für dieses Experiment leicht dadurch, daß man es durch das 2stufige Experiment »Werfen des 1. Würfels, anschließend Werfen des 2. Würfels« ersetzt. Alle Ergebnisse notiert man als Paare $(a|b)$, kurz auch ab, wobei a die Augenzahl des 1. Würfels und b die Augenzahl des 2. Würfels ist. Allgemein können wir folgende Regel formulieren:

Regel:
Die Ergebnisse eines n-stufigen Experiments sind n-Tupel $(a_1|a_2|\dots|a_n)$, kurz auch $a_1 a_2 \dots a_n$, wobei a_i irgendein Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. Ω ist dann die Menge aller dieser n-Tupel. Jedes der n-Tupel stellt genau einen **Pfad** durch den Baum vom Start bis zu einem Endpunkt dar.

Aufgaben

Zu 2.1.

1. In einer Klinik wird eine Statistik über das Geschlecht von Neugeborenen geführt. Wie heißt ein Ergebnisraum bei
a) Einzelkindern;
b) Zwillingen (eineiig);
c) Zwillingen (zweieiig), wenn das erstgeborene Kind zuerst notiert wird;
d) Drillingen?
Gib jeweils die Mächtigkeit des Ergebnisraums an.

2. Münze und Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie lautet ein Ergebnisraum? Wie viele Elemente enthält er?

* Eine solche Ersetzung ist zwar plausibel, aber nicht selbstverständlich. Wir werden später auf Seite 106 noch darauf zurückkommen.

3. Der Gewinner bei einer Lotterie darf aus 5 Schallplatten (p, q, r, s, t) 3 auswählen. Gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an, wenn
a) beliebig ausgewählt werden darf;
b) grundsätzlich s gewählt werden muß;
c) bei Wahl von p stets auch q gewählt werden muß.

4. In einer Urne liegen vier mit 1 bis 4 numerierte Kugeln. Man zieht zwei Kugeln auf einmal. Gib einen Ergebnisraum an.

5. Wie lautet beim Zahlenlotto »6 aus 49« ein Ergebnisraum zum Zufallsexperiment
a) Ziehen der 6 Lottozahlen,
b) Ziehen der 6 Lottozahlen mit Zusatzzahl?
Die Urne enthält hier 49 Kugeln, die von 1 bis 49 numeriert sind.

6. Beim Werfen zweier Würfel bietet jemand folgende Mengen als Ergebnisräume an, wobei A die Augensumme der beiden Würfel bedeutet. Entscheide jeweils, ob wirklich ein Ergebnisraum vorliegt, und gib seine Mächtigkeit an.
a) $\Omega = \{(1|1); (1|2); (1|3); \ldots; (6|5); (6|6)\} = \{(a|b) | 1 \leqq a, b \leqq 6\}$
b) $\Omega = \{(1|1); (1|2); (1|3); \ldots; (5|6); (6|6)\} = \{(a|b) | 1 \leqq a \leqq b \leqq 6\}$
c) $\Omega = \{A$ ist prim; $A = 9$; A ist gerade, aber nicht $2\}$
d) $\Omega = \{A$ ist prim; A ist durch 3 teilbar$\}$
e) $\Omega = \{A$ ist durch 2 teilbar; A ist durch 3 teilbar; A ist durch 5 teilbar$\}$
f) $\Omega = \{A$ ist kleiner als 7; A ist größer als $7\}$

Zu 2.2.

7. In einer Urne befinden sich 1 goldene, 2 rote und 3 schwarze Kugeln. Man zieht nacheinander 2 Kugeln
a) ohne Zurücklegen, **b)** mit Zurücklegen der Kugel nach jedem Zug.
Zeichne jeweils ein Baumdiagramm, gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an.

8. Eine Münze (A = Adler; Z = Zahl) wird dreimal geworfen. Zeichne ein Baumdiagramm.

9. 3 Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie kann dieses Experiment als mehrstufiges Experiment gedeutet werden? (Vgl. Aufgabe **8**)

•10. Der italienische Mathematiker *Luca Pacioli* (um 1445–1517)* behandelte 1494 in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* (fol. 197r) die Aufgabe, den Einsatz bei vorzeitigem Spielabbruch »gerecht« aufzuteilen, die unter den Namen *problème des partis* oder auch *problem of points* berühmt wurde**:

> »Eine Brigade spielt Ball. Eine Partie ist 10 Punkte wert; Sieger ist diejenige Mannschaft, die zuerst 60 Punkte erreicht. Jede Mannschaft setzt 5 Dukaten ein. Durch unvorhergesehene Umstände kann das Spiel nicht zu Ende gebracht werden. Die eine Seite hat 50 Punkte, die andere 20 erzielt. Man möchte wissen, welcher Teil des Einsatzes jeder Seite zufällt.«

Sei nun A bzw. B der Anteil des gesamten Einsatzes, der Mannschaft A bzw. B zugesprochen werden soll. Beide Seiten – so wird stillschweigend angenommen – seien gleich geschickt.
a) *Pacioli* sagt, er habe viele falsche Meinungen gefunden. Nach langer Rechnung behauptet er, die richtige Lösung sei, den Einsatz im Verhältnis des Spielstandes bei Abbruch aufzuteilen, also $A : B = 5 : 2$.
b) *Gerolamo Cardano* (1501–1576) bemerkte 1539, daß, wie selbst ein Knabe leicht einsehen könne, nicht der Spielstand bei Abbruch entscheidend sei für die gerechte Verteilung, sondern daß es auf die Anzahlen a bzw. b der den Seiten A bzw. B noch

* Siehe Seite 394ff.
** Das Problem findet sich bereits in italienischen mathematischen Manuskripten, das älteste aus dem Jahre 1380, und ist vermutlich arabischen Ursprungs. – *le parti* = der Anteil.

fehlende Siege bis zum Erreichen der n Siege ankomme*. Dann überlegt er, daß eine zweite Partie nur gewonnen werden kann, wenn die vorausgehende erste gewonnen wurde, eine 3. Partie nur, wenn die vorausgehende 1. und 2. Partie gewonnen wurden. Also ist zum Gewinn der a-ten Partie nötig, die 1., 2., …, $(a-1)$-te und schließlich die a-te Partie zu gewinnen. Der Einsatz ist somit im Verhältnis

$$A:B=(1+2+\ldots+b):(1+2+\ldots+a)$$

aufzuteilen. Welche Aufteilung ergibt sich damit für die Aufgabe von *Pacioli*?

c) *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) kritisierte 1556** die Lösung von *Pacioli*: Hätte Mannschaft B nämlich noch keine Partie gewonnen, so würde sie gar nichts erhalten,

> »was zutiefst ungerecht sei. Deshalb sage ich, daß es sich eher um ein juristisches als um ein mathematisches Problem handelt. […] Am wenigsten wird es Streit geben, so scheint mir,«

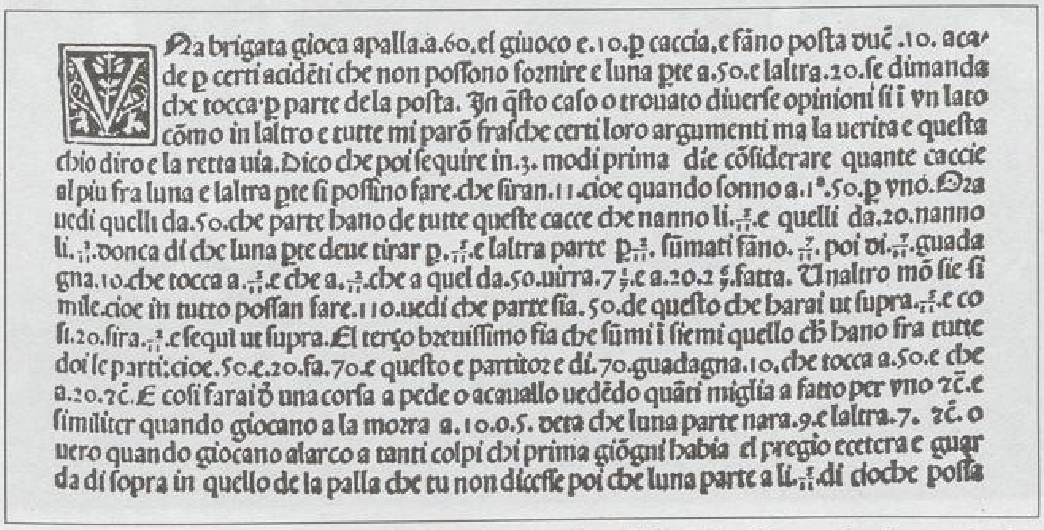
wenn man den Einsatz im Verhältnis $A:B=(n+b-a):(n+a-b)$

aufteilt. Sei nämlich $a \leqq b$. Dann liegt A um $b-a$ vor B. Der Seite A gebührt also $\frac{b-a}{n}$ des Einsatzes von B und $\frac{n}{n}$ des eigenen Einsatzes, d.h. $\frac{n+b-a}{2n}$ des gesamten Einsatzes. B hingegen verbleibt $\frac{n-(b-a)}{n}$ des eigenen Einsatzes.

Welches Verhältnis schlägt *Tartaglia* also für *Paciolis* Problem vor?

d) Zeichne ein Baumdiagramm, das die noch fehlenden möglichen Partien darstellt. Wie würdest du das Geld aufteilen?

e) Dem französischen Mathematiker *Pierre de Fermat* (1601–1665) gelang 1654 die Lösung des Problems sinngemäß durch Betrachten eines Baums, der alle denkbaren Verläufe bei weiteren 4 Partien darstellt. Warum nahm er gerade 4 Partien? Welchen Vorschlag zur Aufteilung des Geldes hat *Fermat* wohl gemacht?
Auf ganz andere Art gelangte *Blaise Pascal* (1623–1662) im selben Jahre zur gleichen Lösung. (Siehe Aufgabe 269/**66**).



Na brigata gioca apalla.a.60.el giuoco e.10.p caccia.e fano posta duc.10. acade p certi acideti che non possono fornire e luna pte a.50.e laltra.20.se dimanda che tocca p parte de la posta. In qsto caso o trouato diuerse opinioni si i vn lato como in laltro e tutte mi paro frasche certi loro argumenti ma la uerita e questa chio diro e la retta uia. Dico che poi sequire in.3. modi prima die cosiderare quante caccie al piu fra luna e laltra pte si possino fare.che siran.11.cioe quando sonno a.10.50.p vno. Ora uedi quelli da.50.che parte hano de tutte queste cacce che nanno li.5/11.e quelli da.20.nanno li.2/11.donca di che luna pte deue tirar p.5/11.e laltra parte p.2/11. sumati fano.7/11. poi di.7/11.guadagna.10.che tocca a.5/11.e che a.2/11.che a quel da.50.uirra.7 1/7.e a.20.2 6/7.fatta. Unaltro mo sie similecioe in tutto possan fare.110.uedi che parte sia.50.de questo che harai ut supra.5/11.e cosi.20.sira.2/11.e sequi ut supra. El terço breuissimo sia che sumi i siemi quello ch hano fra tutte doi le parti:cioe.50.e.20.fa.70.e questo e partitore e di.70.guadagna.10.che tocca a.50.e che a.20.7c. E cosi farai d una corsa a pede o acauallo uededo quati miglia a fatto per vno 7c.e similiter quando giocano a la morra a.10.o.5. deta che luna parte nara.9.e laltra.7. 7c. o uero quando giocano alarco a tanti colpi chi prima giogni habia el pregio eccetera e guarda di sopra in quello de la palla che tu non dicesse poi che luna parte a li.5/11.di cioche possa

Bild 19.1 Ausschnitt aus folio 197ʳ der *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* des *Luca Pacioli* mit dem problème des partis

* *Practica Arithmetice*, Cap. LXI, 13, 14 und Cap. ult., 5.
** *General Trattato di numeri, et misure*, I, folium 265 r.