Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

3. Ereignisräume

3. Ereignisräume

On fait trop d'honneur à la roulette: elle n'a ni conscience ni mémoire.
Man tut dem Roulett zu viel Ehre an: Es hat weder Gewissen noch Gedächtnis.

Joseph Bertrand

3. Ereignisräume

3.1. Definition

Vielfach interessiert man sich bei Zufallsexperimenten nur für eine gewisse Fragestellung. Es genügt dann, einen Ergebnisraum zu betrachten, der auf diese Fragestellung zugeschnitten ist. Beim »Mensch ärgere dich nicht«-Spiel z. B. interessiert bei Spielbeginn nur der Ergebnisraum $\Omega_1 = \{\text{Sechs, Nicht-Sechs}\}$, später vielleicht $\Omega_2 = \{\text{Vier, Nicht-Vier}\}$, wenn man eine bestimmte Figur eines Gegners schlagen will. Möchte man aber mehrere Fragestellungen mit demselben Ergebnisraum behandeln, so muß man ihn fein genug konstruieren. Beim »Mensch-ärgere-dich-nicht«-Spiel wählt man $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; damit können alle Situationen dieses Spiels beschrieben werden. Das Ergebnis »Nicht-Sechs« aus Ω_1 stellt sich jetzt allerdings als die Teilmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ von Ω dar, ebenso das Ergebnis »Nicht-Vier« aus Ω_2 als eine andere Teilmenge von Ω, nämlich $\{1, 2, 3, 5, 6\}$. Um diese Teilmengen von Ω von den Elementen von Ω, den Ergebnissen, abzuheben, führt man für sie eine eigene Bezeichnung ein. Man nennt sie **Ereignisse.** Ereignisse sind also Mengen, die als Elemente gerade die Ergebnisse enthalten, bei deren Erscheinen das Ereignis eintritt. So tritt z. B. das Ereignis »Nicht-Sechs« ein, wenn als Ergebnis die Augenzahl 1 erscheint. Dasselbe gilt für die Augenzahlen 2, 3, 4 oder 5. Wir formulieren nun allgemein:

Definition 21.1:
1. Jede Teilmenge A des endlichen Ergebnisraums Ω heißt **Ereignis.**
2. A **tritt** genau dann **ein,** wenn sich ein Versuchsergebnis ω einstellt, das in A enthalten ist.
3. Die Menge aller Ereignisse heißt **Ereignisraum.**

Durch diese Definition wurde der umgangssprachliche Begriff »Ereignis« mathematisch präzisiert. Damit können wir unser mathematisches Modell des Zufallsgeschehens weiter entwickeln. Der mathematische Begriff *Ereignis* umfaßt auch Sonderfälle, an die man vielleicht zunächst nicht gedacht hat. Besonders ausgezeichnete Teilmengen sind bekanntlich die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge Ω. Da die leere Menge $\emptyset$ kein Element enthält, kann das Ereignis $\emptyset$ nicht eintreten; man nennt $\emptyset$ daher **unmögliches Ereignis.** Im Gegensatz dazu enthält Ω alle Versuchsergebnisse, tritt also immer ein. Man nennt Ω daher auch **sicheres Ereignis.** Eine Sonderstellung nehmen bei den von uns betrachteten endlichen Ergebnisräumen die einelementigen Ereignisse ein. Ein solches $E = \{\omega\}$ tritt genau dann ein, wenn das betreffende Versuchsergebnis ω erscheint. Wir nennen solche einelementigen Ereignisse auch **Elementarereignisse.** Dieser Name wird verständlich, wenn man bedenkt, daß jedes Ereignis $A \neq \emptyset$ eines endlichen Ergebnisraums Ω eindeutig als Vereinigung von Elementarereignissen darstellbar ist, d. h.

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

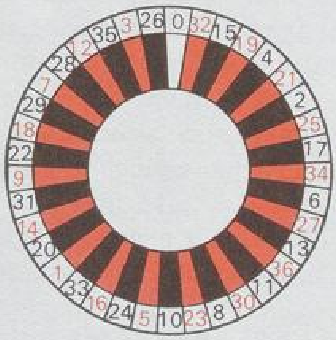
Beispiel: $A = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$.

Man beachte im übrigen, daß man zwischen dem Ergebnis ω und dem Elementarereignis $\{\omega\}$ unterscheidet.
Da bei endlichen Ergebnisräumen Ω jede Teilmenge von Ω ein Ereignis ist, gilt dort auch, daß der Ereignisraum die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ des Ergebnisraums Ω ist. (Bei unendlichen Ergebnisräumen ist es leider viel komplizierter.)
Eine aus n Elementen bestehende Menge hat 2^n Teilmengen. Aus $|\Omega| = n$ ergibt sich damit für die Mächtigkeit des Ereignisraums der Wert $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^n$.

Ein Beweis der oben aufgeführten Behauptung kann folgendermaßen geführt werden. Es sei $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jede Teilmenge A von Ω läßt sich eineindeutig durch eine n-stellige Dualzahl beschreiben. Dabei bedeute 1 an der i-ten Stelle, daß das Element a_i in der Teilmenge A enthalten ist; 0 an der i-ten Stelle heißt dann natürlich, daß $a_i \notin A$ ist. So wird z. B. die Teilmenge $\{a_2, a_3, a_5\}$ durch die Dualzahl $011010\ldots0$ beschrieben.
Diese Dualzahlen sind die ganzen Zahlen von 0 bis zu einer größten Zahl N, die als Dualzahl an jeder der n Stellen eine 1 stehen hat, also $N = 111\ldots1$. Da sich die natürlichen Zahlen selber abzählen, sind dies $N + 1$ Zahlen. $N + 1$ schreibt sich als Dualzahl als 1, gefolgt von n Nullen, also $N + 1 = 1000\ldots0$. Das ist aber die natürliche Zahl 2^n. Somit gibt es 2^n Teilmengen von Ω, was zu zeigen war.

3.2. Ereignisalgebra

Ein Ereignis kommt selten allein! Umgangssprachlich werden Ereignisse durch die Wörter »und« und »oder« zu neuen Ereignissen zusammengesetzt. So lassen sich die Ereignisse »Es schneit« bzw. »Es stürmt« zum Ereignis »Schneesturm«, d.h. zu »Es schneit und es stürmt« zusammensetzen. Wie wirkt sich eine solche Zusammensetzung von Ereignissen im mathematischen Modell aus?
Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir das in den Spielkasinos verbreitete Glücksspiel Roulett.* Eine Kugel fällt in eines der Fächer einer drehbaren Scheibe, die von 0 bis 36 numeriert sind; 18 der Zahlen von 1 bis 36 sind rot, die anderen 18 schwarz, die 0 ist andersfarbig (siehe Figur 22.1). Man setzt auf dem Spielbrett (= tableau) Chips bestimmten Werts auf eine Zahl oder eine Zahlenkombination,



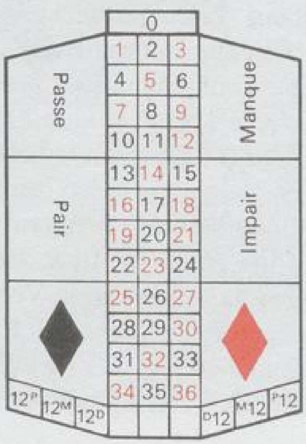


Fig. 22.1 Rad und Spielbrett des Rouletts

* Das Roulett ist wohl chinesischen Ursprungs. Die Idee, in eine sich drehende Zahlenscheibe eine Kugel zu werfen, scheint Anfang des 18. Jahrhunderts aufgekommen zu sein. 1734 veröffentlichte *M. Giradier* 6 neu erfundene Spiele, die alle auf diesem Prinzip beruhten. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstand in Paris die noch heute gültige Form des Roulettspiels.

d. h. in unserer Sprechweise auf das Eintreten eines Ereignisses. Um alle wichtigen Ereignisse dieses Spiels beschreiben zu können, wählen wir als Ergebnisraum Ω die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$. Wie bei jedem Glücksspiel unterscheidet man zwischen Auszahlung und Gewinn. Auszahlung ist der Betrag, den der Spieler nach gewonnenem Spiel erhält, und es gilt:

$$\boxed{\text{Gewinn} = \text{Auszahlung minus Einsatz}}$$

Einen Überblick über die möglichen Ereignisse beim Roulettspiel gibt die folgende Aufstellung. Dabei ist noch zu beachten: Fällt die Kugel auf die 0, so wird die 0 bei plein, carré und à cheval wie eine normale Zahl behandelt; alle anderen Einsätze verfallen der Bank, in manchen Spielkasinos jedoch nur zur Hälfte.

Setzmöglichkeiten		Teilmenge von Ω	Auszahlung	Gewinn
Name	Beschreibung		als Vielfaches des Einsatzes	
plein	eine Zahl	z. B. $\{7\}$	36	35
à cheval	2 angrenzende Zahlen	z. B. $\{13, 16\}$	18	17
transversale pleine	Querreihe von 3 Zahlen	z. B. $\{25, 26, 27\}$	12	11
transversale simple	2 benachbarte Querreihen	z. B. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	6	5
carré	4 Zahlen, deren Felder in einem Punkt zusammenstoßen, bzw. die ersten 4 Zahlen	z. B. $\{14, 15, 17, 18\}$ bzw. $\{0, 1, 2, 3\}$	9	8
colonne	Längsreihe von 12 Zahlen	z. B. $\{1, 4, 7, \ldots, 34\}$	3	2
douze premier	das erste Dutzend	$\{1, 2, \ldots, 12\}$	3	2
douze milieu	das mittlere Dutzend	$\{13, 14, \ldots, 24\}$	3	2
douze dernier	das letzte Dutzend	$\{25, 26, \ldots, 36\}$	3	2
pair	alle geraden Zahlen außer 0	$\{2, 4, \ldots, 36\}$	2	1
impair	alle ungeraden Zahlen	$\{1, 3, \ldots, 35\}$	2	1
rouge	alle roten Zahlen	$\{1, 3, \ldots, 36\}$	2	1
noir	alle schwarzen Zahlen	$\{2, 4, \ldots, 35\}$	2	1
manque	die 1. Hälfte	$\{1, 2, \ldots, 18\}$	2	1
passe	die 2. Hälfte	$\{19, 20, \ldots, 36\}$	2	1

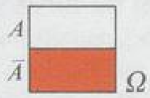
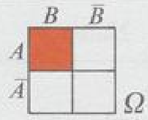
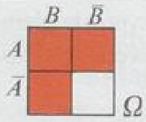
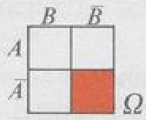
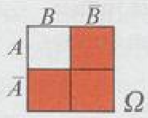
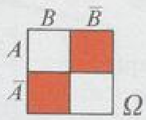
Für einen Spieler, der 2 Chips verschieden gesetzt hat, sind zwei Ereignisse interessant. Nehmen wir an, er setzt auf die carrés $\{4, 5, 7, 8\}$ und $\{5, 6, 8, 9\}$. Dann können für ihn folgende Möglichkeiten eintreten:

a) Er gewinnt mit beiden Chips. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{5, 8\}$, die man offenbar als Schnittmenge der beiden carré-Mengen erhält. (Sein Gewinn ist der 8fache Einsatz.)

b) Er gewinnt überhaupt etwas, d. h., Chip 1 oder Chip 2 gewinnt. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, die man offenbar als Vereinigungsmenge der beiden carré-Mengen erhält. (Sein Gewinn ist der 3,5fache Einsatz, wenn genau einer der Chips gewinnt, oder der 8fache Einsatz, wenn beide Chips gewinnen.)

c) Er gewinnt nicht. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{0, 1, 2, 3, 10, 11, \ldots, 36\}$, die man offenbar als Komplementmenge zur Menge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ erhält. (Sein Gewinn ist der $[-1]$fache Einsatz. Negativer Gewinn = Verlust!)

Unser Beispiel zeigt, daß sich umgangssprachliche Verknüpfungen von Ereignissen im mathematischen Modell ebenfalls ausdrücken lassen.
Die folgende Übersicht gibt uns für zwei Ereignisse A und B einige solche Möglichkeiten zusammenfassend an.

Sprechweisen	Term im mathematischen Modell	Veranschaulichung
Gegenereignis zu A; Nicht das Ereignis A	$\bar{A}$	
Ereignis A und Ereignis B; Beide Ereignisse; Sowohl A als auch B	$A \cap B$	
Ereignis A oder Ereignis B; Mindestens eines der Ereignisse	$A \cup B$	
Keines der Ereignisse; Weder A noch B	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$	
Höchstens eines der Ereignisse; Nicht beide Ereignisse	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	
Genau eines der Ereignisse; Entweder A oder B	$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$	

Durch die Mengenoperationen *Schnitt* ($\cap$), *Vereinigung* ($\cup$) und *Komplement* ($^-$) lassen sich alle aufgeführten Verknüpfungen von Ereignissen darstellen. Jede solche Verknüpfung liefert wieder eine Teilmenge von Ω, also ein Ereignis. Man sagt deshalb auch, der Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist bezüglich der Operationen $\cap$, $\cup$ und $^-$ abgeschlossen.
Da die Ereignisse im mathematischen Modell Mengen sind, gehorchen sie auch den Gesetzen der Mengenalgebra, die man in diesem Zusammenhang auch **Ereignisalgebra** nennt.
Wir erinnern in der folgenden Übersicht an einige wichtige Gesetze der Mengenalgebra.

Für alle $A, B, C \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:

Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze		
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C$		$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C$
Distributivgesetze		
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotenzgesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Absorptionsgesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Gesetze von *De Morgan**	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Neutrale Elemente	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \emptyset = A$
Dominante Elemente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$A \cup \bar{A} = \Omega$ $\quad \bar{\bar{A}} = A$

A und $\bar{A}$ können nicht gleichzeitig eintreten, weil $A \cap \bar{A} = \emptyset$, also das unmögliche Ereignis ist. Es gibt aber neben $\bar{A}$ auch noch weitere Ereignisse (nämlich alle Teilmengen von $\bar{A}$), die nicht gleichzeitig mit A eintreten können. Man sagt allgemein:

Definition 25.1:
a) Die Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **disjunkt** genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$.
b) Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen **unvereinbar** oder **disjunkt,** wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h., wenn $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ gilt. Sie heißen **paarweise unvereinbar** oder **paarweise disjunkt,** wenn die Schnittmenge aus je zwei von ihnen leer ist, d.h., wenn für alle $i \neq j$ gilt: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Die Ereignisse A und $\bar{A}$ zerlegen gewissermaßen Ω in 2 disjunkte Mengen. Diese Vorstellung läßt sich verallgemeinern zu

Definition 25.2: Eine Menge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißt **Zerlegung** des Ergebnisraums Ω, wenn die Ereignisse A_i paarweise unvereinbar sind und wenn ihre Vereinigung Ω ergibt, d.h.

$A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Aufgaben

Zu 3.2.

1. Jemand hat drei Lose gekauft. Wir unterscheiden Niete (0) und Treffer (1).
a) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_1, wenn die Lose unterschieden (z. B. numeriert) werden?
b) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_2, wenn die Lose nicht unterschieden werden?

* Siehe Seite 403.

c) Gib für die Ereignisse A, B, C, D und E die Ergebnismengen aus Ω_1 bzw. Ω_2 an
$A :=$ »Mindestens ein Los ist ein Treffer«,
$B :=$ »Höchstens ein Los ist ein Treffer«,
$C :=$ »Jedes Los ist ein Treffer«,
$D :=$ »Das 1. und das 3. Los sind Treffer«,
$E :=$ »Das 1. und das 3. Los sind Treffer, und das 2. Los ist eine Niete«.

d) Beschreibe umgangssprachlich in jedem der beiden Fälle, soweit möglich, das Gegenereignis zu den Ereignissen aus **c)** und gib die Ergebnismengen an.

2. Eine Münze wird dreimal geworfen. Man unterscheidet Wappen (w) und Zahl (z). Wir betrachten folgende Ereignisse:
$A :=$ »Beim ersten Wurf erscheint Wappen«
$B :=$ »Beim dritten Wurf erscheint Zahl«

a) Gib die Ergebnismengen zu A und B an.

b) Beschreibe folgende Ereignisse in Worten und gib die zugehörigen Ergebnismengen an:
$A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$; $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap \bar{B}$.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $A \cup B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$?

d) Gib das Gegenereignis zu $\{www\}$ in Worten und als Ergebnismenge an.

Bild 26.1 Ergebnisse beim 3fachen Münzenwurf

3. Bei einem Wurf mit zwei Würfeln werde die Augensumme als Ergebnis notiert.

a) Gib einen Ergebnisraum Ω und seine Mächtigkeit an.

b) Beschreibe die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω:
$A :=$ »Die Augensumme ist prim.«
$B :=$ »Die Augensumme ist 1.«
$C :=$ »Die Augensumme ist gerade.«
$D :=$ »Die Augensumme ist nicht 6.«
$E :=$ »Die Augensumme ist 7.«
$F :=$ »Die Augensumme liegt zwischen 0 und 7.«

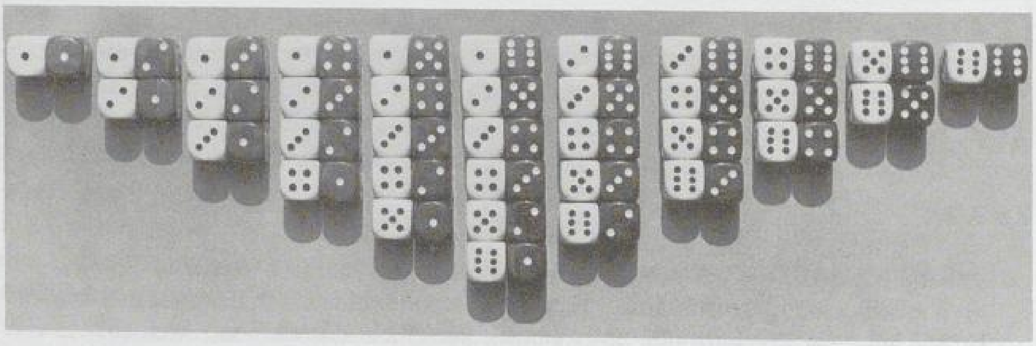


Bild 26.2 Augensummen zweier Würfel

4. Aus einer Lieferung werden 4 Stücke zur Prüfung entnommen. Sie werden auf brauchbar (1) bzw. unbrauchbar (0) hin untersucht.

a) Gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an.

b) Beschreibe folgende Ereignisse durch Ergebnismengen:
$A :=$ »Das dritte Stück ist unbrauchbar.«
$B :=$ »Genau das dritte Stück ist unbrauchbar.«
$C :=$ »Mindestens zwei Stücke sind brauchbar.«
$D :=$ »Genau drei Stücke sind brauchbar.«
$E :=$ »Kein Stück ist brauchbar.«

5. Zu einer Party erwartet Susanne 2 Mädchen und 3 Jungen. Die 5 Gäste treffen nacheinander ein. Beschreibe folgende Ereignisse durch Ergebnismengen:
$A :=$ »Der erste Gast ist ein Mädchen.«
$B :=$ »Unter den ersten drei Gästen sind die zwei Mädchen.«
$C :=$ »Der letzte Gast ist kein Junge.«

6. A, B, C seien drei beliebige Ereignisse. Beschreibe durch Terme der Ereignisalgebra

a) A und B, aber nicht C	**b)** Alle drei	**c)** Nur A
•**d)** Höchstens eines	**e)** Mindestens eines	**f)** Höchstens zwei
g) Mindestens zwei	**h)** Genau eines	**i)** Genau zwei
j) Keines	**k)** Nur A und B	**l)** Nur C nicht

7. Für eine Lieferung von 4 Motoren definiert man folgende Ereignisse:
$A :=$ »Mindestens ein Motor ist defekt« $B :=$ »Höchstens ein Motor ist defekt«

a) Interpretiere folgende Ereignisse:
1) $\bar{A}$ **2)** $\bar{B}$ **3)** $A \cap B$ **4)** $A \cup B$ **5)** $A \setminus B$ **6)** $B \setminus A$ **7)** $A \cup \bar{B}$
8) $\bar{A} \cup B$ **9)** $\bar{A} \cap \bar{B}$ **10)** $\bar{A} \cup \bar{B}$

b) Zeichne ein Mengendiagramm und verwende dabei als Elemente von Ω Quadrupel aus 0 und 1, wobei 0 bedeute, daß der entsprechende Motor defekt ist. 1011 heißt dann etwa »Der zweite Motor ist defekt; die anderen sind in Ordnung«.

c) Stelle die Mengen aus **a)** durch die Elemente von Ω nach **b)** dar.

8. Die Herren Huber (H), Meier (M) und Schmid (S) kandidieren für den Posten des Betriebsratsvorsitzenden. Die Ereignisse A, B, C werden definiert gemäß
$A :=$ »Herr Huber wird erster«,
$B :=$ »Herr Meier wird nicht letzter« und
$C :=$ »Herr Schmid wird letzter«.

a) Zeichne ein Diagramm von Ω. Stelle dabei die Wahlergebnisse als Tripel aus H, M und S dar.

•**b)** Schreibe mit Hilfe von A, B und C die Ereignisse $E :=$ »Huber wird letzter« und $F :=$ »Huber wird zweiter«.

c) Interpretiere die folgenden Ereignisse:
1) $A \cap B \cap C$; **2)** $\overline{A \cup B \cup C}$; **3)** $A \cup (B \cap \bar{C})$; **4)** $(A \cup B) \cap \bar{C}$.

9. Drei Briefe werden in drei Umschläge gesteckt. A_i sei das Ereignis »Brief i steckt im Umschlag i«.
Interpretiere folgende Ereignisse

a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ **b)** $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ **c)** $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ **d)** $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$

e) $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$

10. Untersuche auf Unvereinbarkeit alle Paare von Ereignissen aus
a) Aufgabe **1. c)**, **b)** Aufgabe **3. b)**, **c)** Aufgabe **4. b)**.

11. Untersuche, ob folgende Ereignisse unvereinbar sind:
a) A und $\overline{A \cup B}$; **b)** A und $\overline{A \cap B}$; **c)** A und $\bar{A} \cap B$; **d)** $\overline{A \cup B}$ und $\bar{A} \cap B$.

12. Prüfe die Gültigkeit folgender Behauptungen:
a) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, \bar{B}$ unvereinbar
b) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ unvereinbar
c) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, \bar{B}$ nicht unvereinbar
d) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ nicht unvereinbar.
Gib gegebenenfalls Gegenbeispiele an.

•**13.** **a)** Zeige: Die Ereignisse A, $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cap B$ bilden eine Zerlegung von Ω. Fertige dazu eine Skizze an.
b) Die Fußballmannschaften I und II spielen gegeneinander. A bedeute »I siegt«; B bedeute »II siegt«. Interpretiere die Ereignisse aus **a)**.

14. An einem Wettbewerb nehmen n Sportler teil. A_i sei das Ereignis »Der Sportler mit der Startnummer i erreicht den i-ten Platz«.
Interpretiere folgende Ereignisse:

a) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

c) $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ **d)** $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ **e)** $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap \bigcap_{k \neq i} \bar{A}_k)$.

Bild 28.1 Antike Spielmarke (= Chip) mit den Inschriften Casus Sortis = *Wechselfälle des Glücks* und *Wer spielt möge genügend einsetzen*. Außerdem zeigt die Spielmarke die 4 astragali des Venuswurfes.