# Stochastik

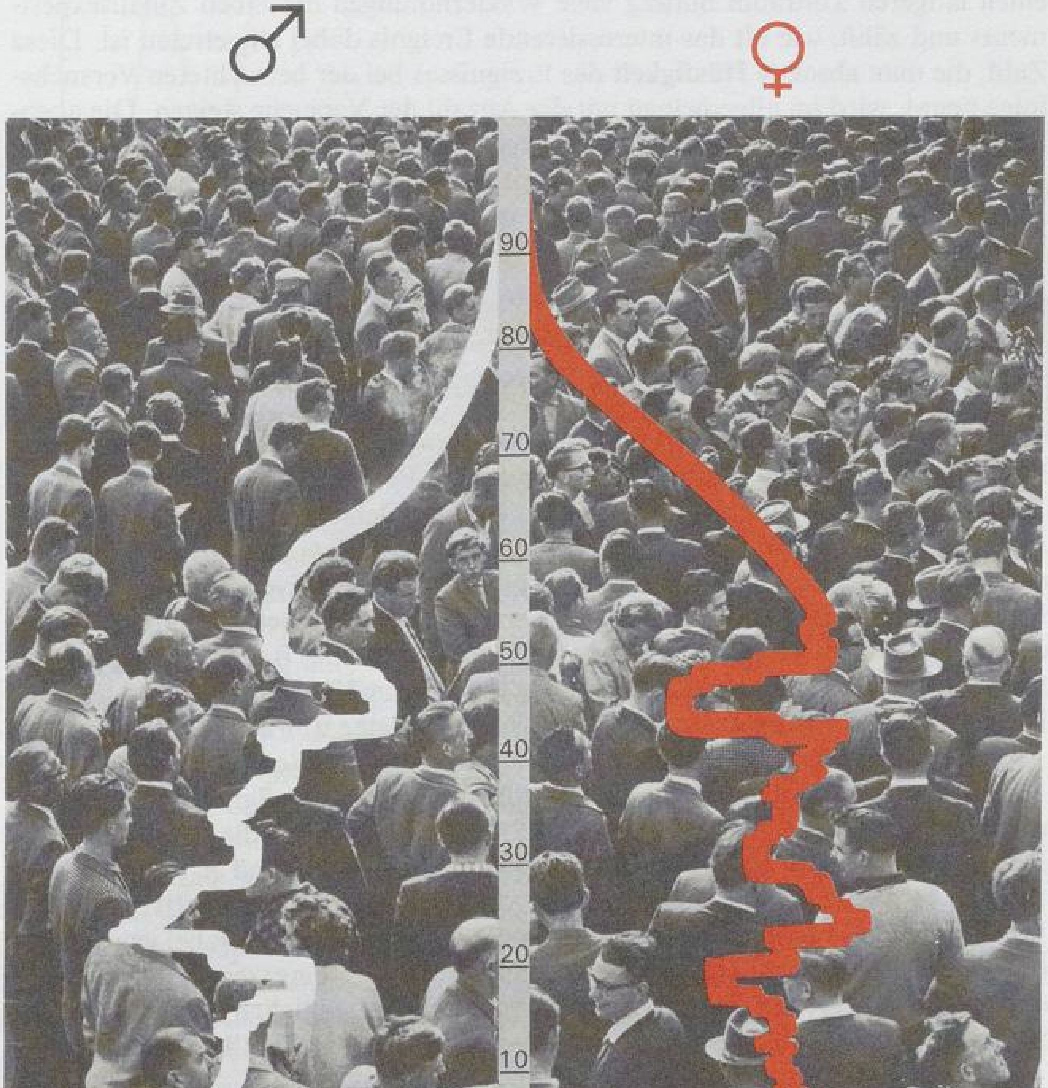
**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

4. Relative Häufigkeiten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

# 4. Relative Häufigkeiten




Altersaufbau der Wohnbevölkerung der Bundesrepublik Deutschland am 1. 1. 1967

# 4. Relative Häufigkeiten

## 4.1. Einführung

Gewinnt jemand beim Roulett mit einer transversale pleine, so erhält er mehr ausbezahlt als ein anderer, der bei gleichem Einsatz mit einem carré gewonnen hat. Die Spielbanken geben als Grund dafür an, daß ein carré »häufiger« auftritt als eine transversale pleine. Um diese Behauptung überprüfen zu können, braucht man ein Maß für die Häufigkeit eines Ereignisses. Dazu beobachtet man über einen längeren Zeitraum hinweg viele Wiederholungen desselben Zufallsexperiments und zählt, wie oft das interessierende Ereignis dabei eingetreten ist. Diese Zahl, die man **absolute Häufigkeit** des Ereignisses bei der betrachteten Versuchsfolge nennt, wird im allgemeinen mit der Anzahl der Versuche steigen. Die absolute Häufigkeit ist daher als Maß nicht geeignet. Ein brauchbares Maß ergibt sich jedoch, wenn man die absolute Häufigkeit relativiert, d.h., sie auf die Anzahl der Versuche bezieht. Dies geschieht, indem man die absolute Häufigkeit durch die Versuchsanzahl dividiert.

**Definition 30.1:** Tritt ein Ereignis $A$ bei $n$ Versuchen $k$-mal ein, so heißt $h_n(A) := \frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit** des Ereignisses $A$ in dieser Versuchsfolge.

Relative Häufigkeiten werden üblicherweise in Prozenten angegeben. Wer die Behauptung der Spielbanken nun mit Hilfe dieser Definition überprüfen möchte, kann sich z.B. anhand der von den Spielbanken veröffentlichten Ergebnislisten, den sog. Authentischen Roulette-Permanenzen, die relativen Häufigkeiten für ein carré und eine transversale pleine berechnen. So ergaben sich am Sonntag, dem 4. November 1962, am Tisch Nr. 1 des Spielcasinos Baden-Baden bei 346 Spielen 31mal die transversale pleine $\{16, 17, 18\}$ und 37mal das carré $\{4, 5, 7, 8\}$. Die relative Häufigkeit der besagten transversale pleine war also an diesem Tage $\frac{31}{346} = 8{,}96\%$, die relative Häufigkeit des besagten carrés jedoch $\frac{37}{346} = 10{,}69\%$.
Zur weiteren Veranschaulichung des Begriffs der relativen Häufigkeit greifen wir auf die Tabellen 10.1 und 11.1 zurück. So sind gemäß Tabelle 11.1 die relative Häufigkeit $h_{25}$ (»Adler«) $= \frac{11}{25} = 44\%$, $h_{50}$ (»Adler«) $= \frac{22}{50} = 44\%$ und $h_{75}$ (»Adler«) $=$ $= \frac{36}{75} = 48\%$ usw. Einen Überblick über die Abhängigkeit der relativen Häufigkeit $h_n$ (»Adler«) von $n$ bei dieser Versuchsfolge zeigt Figur 31.1. Dabei wurden nur die Werte der relativen Häufigkeit für Vielfache von 25 eingezeichnet und durch einen Streckenzug verbunden. Dieser Streckenzug soll lediglich die Entwicklung veranschaulichen, hat aber selbst keine Bedeutung für das Zufallsexperiment.

Obwohl in Tabelle 11.1 die Aufeinanderfolge von »Adler« und »Zahl« regellos ist, erwartet man naiverweise aus Symmetriegründen, daß Zahl und Adler etwa gleich häufig auftreten, die relative Häufigkeit von »Adler« also etwa 50% sein müßte.
Figur 31.1 zeigt, daß die relative Häufigkeit für »Adler« tatsächlich um den Wert

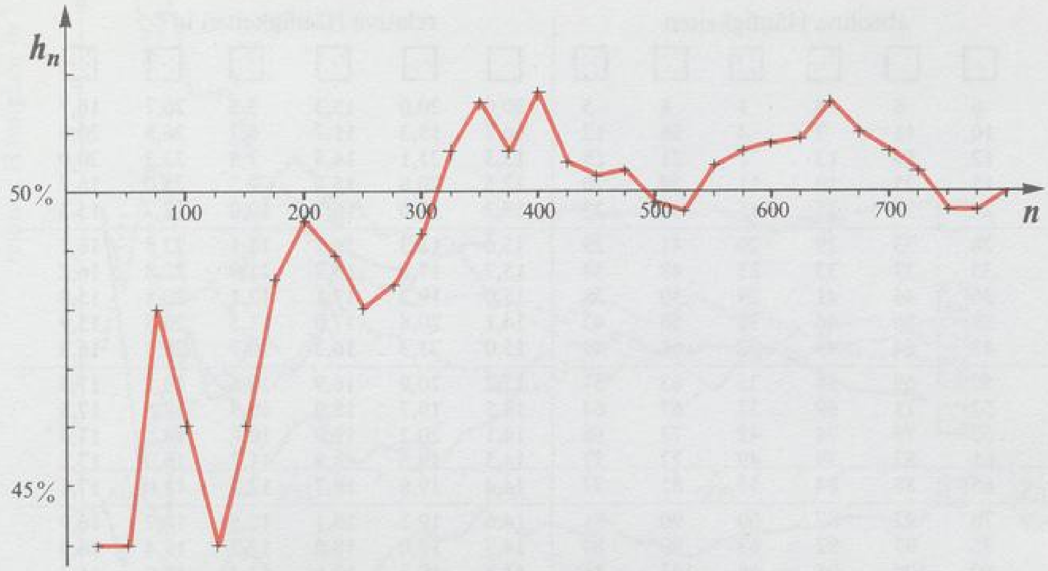



Fig. 31.1 Relative Häufigkeit $h_n$ (»Adler«) bei den 800 Münzenwürfen aus Tabelle 11.1

50% schwankt. Mit zunehmendem $n$ scheinen die Schwankungen kleiner zu werden, wenngleich immer wieder »Ausbrecher« auftreten. Trotzdem glaubt man daran, daß bei einer symmetrischen Münze die relative Häufigkeit für »Adler« sich immer weniger von dem Idealwert 50% unterscheidet, je größer die Anzahl der Versuche ist. So erhielt *Buffon** (1707–1788) für $h_{4040}$ (»Adler«) den Wert 50,69%, *K. Pearson*** (1857–1936) erzielte mit viel Geduld $h_{12000}$ (»Adler«) = 50,16% und $h_{24000}$ (»Adler«) = 50,05%.
Für dieses Verhalten der relativen Häufigkeit sagt man auch:
*»Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert.«*
Man kann vermuten, daß sich die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines bestimmten Ereignisses $A$ bei einem beliebig wiederholbaren Versuch mit zunehmender Versuchsanzahl $n$ *immer* um einen festen Wert stabilisiert. Im Laufe der Jahrhunderte haben die Erfahrungen gezeigt, daß diese Vermutung nicht zu Unrecht besteht. Sie ist also eine Erfahrungstatsache, die manchmal auch **Das empirische Gesetz der großen Zahlen** genannt wird. Die an sich überraschende Tatsache, daß auch das Zufallsgeschehen erkennbaren Gesetzen gehorcht***, ist die Grundlage der Stochastik, die diese Gesetzmäßigkeiten systematisch erforscht.
Ein weiteres Beispiel für die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten liefert uns die Serie von Würfelwürfen aus Tabelle 10.1. Wir berechnen dazu die absoluten und relativen Häufigkeiten der Augenzahlen nach 30, 60, ..., 1200 Würfen und geben sie in Tabelle 32.1 an; die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen werden durch Figur 33.1 veranschaulicht. Auch hier stellen wie in Figur 31.1 die Streckenzüge nur eine grobe Veranschaulichung der Entwicklung der relativen Häufigkeiten dar.

* Genaueres in Aufgabe 226/**22** und Aufgabe 369/**30**. – Siehe auch Seite 401.
** gesprochen: piəsn. Siehe Seite 420.
*** »Le hazard a des regles qui peuvent être connues«, schreibt *Montmort* (1678–1719) im Vorwort zu seinem *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (1708).

| absolute Häufigkeiten | | | | | | relative Häufigkeiten in % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
| 6 | 6 | 4 | 1 | 8 | 5 | 20,0 | 20,0 | 13,3 | 3,3 | 26,7 | 16,7 |
| 10 | 11 | 7 | 4 | 16 | 12 | 16,7 | 18,3 | 11,7 | 6,7 | 26,8 | 20,0 |
| 12 | 19 | 13 | 7 | 21 | 18 | 13,3 | 21,1 | 14,5 | 7,8 | 23,3 | 20,0 |
| 15 | 25 | 19 | 11 | 30 | 20 | 12,5 | 20,8 | 15,8 | 9,2 | 25,0 | 16,7 |
| 26 | 27 | 25 | 15 | 34 | 23 | 17,3 | 18,0 | 16,7 | 10,0 | 22,7 | 15,3 |
| 28 | 33 | 29 | 20 | 41 | 29 | 15,6 | 18,3 | 16,1 | 11,1 | 22,8 | 16,1 |
| 33 | 37 | 33 | 25 | 48 | 34 | 15,7 | 17,6 | 15,7 | 11,9 | 22,8 | 16,2 |
| 36 | 46 | 41 | 29 | 50 | 38 | 15,0 | 19,2 | 17,1 | 12,1 | 20,8 | 15,8 |
| 38 | 56 | 46 | 31 | 56 | 43 | 14,1 | 20,8 | 17,0 | 11,5 | 20,8 | 15,9 |
| 45 | 64 | 49 | 32 | 61 | 49 | 15,0 | 21,3 | 16,3 | 10,7 | 20,3 | 16,3 |
| 50 | 69 | 56 | 35 | 63 | 57 | 15,2 | 20,9 | 16,9 | 10,6 | 19,1 | 17,3 |
| 52 | 71 | 69 | 37 | 67 | 64 | 14,5 | 19,7 | 18,9 | 10,3 | 18,6 | 17,8 |
| 55 | 79 | 74 | 42 | 72 | 68 | 14,1 | 20,2 | 19,0 | 10,8 | 18,5 | 17,4 |
| 61 | 82 | 79 | 49 | 77 | 72 | 14,5 | 19,5 | 18,8 | 11,7 | 18,3 | 17,1 |
| 65 | 88 | 84 | 55 | 81 | 77 | 14,4 | 19,6 | 18,7 | 12,2 | 18,0 | 17,1 |
| 70 | 92 | 87 | 60 | 90 | 81 | 14,6 | 19,2 | 18,1 | 12,5 | 18,7 | 16,9 |
| 75 | 97 | 92 | 63 | 99 | 84 | 14,7 | 19,0 | 18,0 | 12,3 | 19,4 | 16,5 |
| 80 | 104 | 98 | 68 | 102 | 88 | 14,8 | 19,3 | 18,1 | 12,4 | 18,9 | 16,3 |
| 87 | 110 | 103 | 74 | 103 | 93 | 15,0 | 19,3 | 18,1 | 13,0 | 18,1 | 16,3 |
| 92 | 121 | 109 | 76 | 107 | 95 | 15,3 | 20,2 | 18,2 | 12,7 | 17,8 | 15,8 |
| 103 | 125 | 111 | 78 | 113 | 100 | 16,3 | 19,9 | 17,6 | 12,4 | 17,9 | 15,9 |
| 110 | 131 | 114 | 84 | 116 | 105 | 16,7 | 19,9 | 17,3 | 12,7 | 17,6 | 15,9 |
| 113 | 139 | 117 | 87 | 120 | 114 | 16,4 | 20,1 | 17,0 | 12,6 | 17,4 | 16,5 |
| 118 | 145 | 118 | 89 | 129 | 121 | 16,4 | 20,1 | 16,4 | 12,4 | 17,9 | 16,8 |
| 121 | 150 | 121 | 95 | 134 | 129 | 16,1 | 20,0 | 16,1 | 12,7 | 17,9 | 17,2 |
| 130 | 157 | 126 | 96 | 137 | 134 | 16,7 | 20,1 | 16,2 | 12,3 | 17,6 | 17,2 |
| 134 | 162 | 136 | 100 | 142 | 136 | 16,6 | 20,0 | 16,8 | 12,3 | 17,5 | 16,8 |
| 142 | 170 | 139 | 101 | 149 | 139 | 16,9 | 20,2 | 16,6 | 12,0 | 17,7 | 16,6 |
| 146 | 175 | 141 | 104 | 157 | 147 | 16,8 | 20,1 | 16,2 | 11,9 | 18,1 | 16,9 |
| 152 | 182 | 143 | 110 | 161 | 152 | 16,9 | 20,2 | 15,9 | 12,2 | 17,9 | 16,9 |
| 156 | 186 | 153 | 115 | 163 | 157 | 16,8 | 20,0 | 16,5 | 12,4 | 17,5 | 16,9 |
| 161 | 190 | 159 | 120 | 169 | 161 | 16,8 | 19,8 | 16,6 | 12,5 | 17,6 | 16,8 |
| 166 | 194 | 167 | 124 | 172 | 167 | 16,8 | 19,6 | 16,9 | 12,5 | 17,4 | 16,9 |
| 168 | 203 | 176 | 129 | 175 | 169 | 16,5 | 19,9 | 17,3 | 12,6 | 17,2 | 16,6 |
| 171 | 208 | 180 | 132 | 181 | 178 | 16,3 | 19,8 | 17,1 | 12,6 | 17,2 | 16,9 |
| 173 | 215 | 183 | 138 | 189 | 182 | 16,0 | 19,9 | 16,9 | 12,8 | 17,5 | 16,8 |
| 176 | 223 | 189 | 142 | 195 | 185 | 15,9 | 20,1 | 17,0 | 12,8 | 17,6 | 16,7 |
| 180 | 232 | 194 | 146 | 198 | 190 | 15,8 | 20,3 | 17,0 | 12,8 | 17,4 | 16,7 |
| 185 | 236 | 201 | 148 | 204 | 196 | 15,8 | 20,2 | 17,3 | 12,6 | 17,4 | 16,7 |
| 187 | 244 | 204 | 155 | 210 | 200 | 15,6 | 20,3 | 17,0 | 12,9 | 17,5 | 16,7 |

Tab. 32.1 Auswertung von Tabelle 10.1

Die Schreibweise $h_n(A)$ legt die falsche Vermutung nahe, daß der Wert $h_n(A)$ nur von der Versuchsanzahl $n$ abhängt, sonst aber für das Ereignis $A$ kennzeichnend ist. In Wirklichkeit hängt diese Zahl $h_n(A)$ auch noch von der konkret durchgeführten Versuchsfolge ab. So kann z. B. der Wert $h_{10}$ (»Adler«) je nach Versuchsfolge jeden der 11 Werte $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, 1$ annehmen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts fassen wir die 800 Münzenwürfe aus Tabelle 11.1 als 8 Versuchsfolgen zu je 100 Würfen auf. Im Bild ergeben sich damit 8 Streckenzüge für die relative Häufigkeit $h_n$ (»Adler«). Vergröbert sind sie in Figur 34.1 dargestellt, wo jeweils nur die Werte für die Vielfachen von 5 eingezeichnet sind, die in Tabelle 33.1 zusammengestellt wurden.

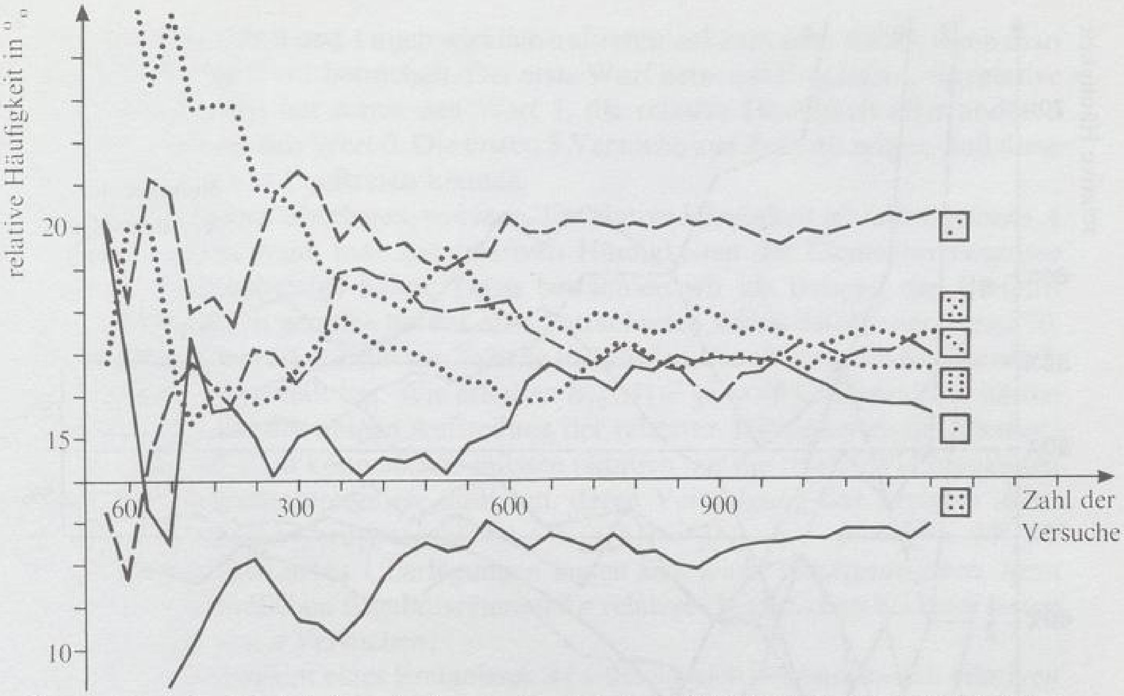



Fig. 33.1 Relative Häufigkeiten der Augenzahlen bei den 1200 Würfelwürfen von Tabelle 10.1

| Anzahl der Versuche in der Serie | Nummer der Versuchsserie 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 40,0 | 40,0 | 20,0 | 100,0 | 20,0 | 100,0 | 100,0 | 60,0 |
| 10 | 40,0 | 30,0 | 20,0 | 80,0 | 20,0 | 80,0 | 50,0 | 40,0 |
| 15 | 33,3 | 40,0 | 26,7 | 80,0 | 33,3 | 60,0 | 46,7 | 46,7 |
| 20 | 40,0 | 35,0 | 40,0 | 75,0 | 35,0 | 55,0 | 55,0 | 50,0 |
| 25 | 44,0 | 36,0 | 44,0 | 68,0 | 36,0 | 48,0 | 52,0 | 44,0 |
| 30 | 40,0 | 40,0 | 43,3 | 66,7 | 43,3 | 43,3 | 50,0 | 36,7 |
| 35 | 40,0 | 40,0 | 45,7 | 65,7 | 40,0 | 48,6 | 54,3 | 34,3 |
| 40 | 42,5 | 42,5 | 45,0 | 60,0 | 35,0 | 50,0 | 60,0 | 37,5 |
| 45 | 44,4 | 46,7 | 46,7 | 62,2 | 37,8 | 53,3 | 60,0 | 37,8 |
| 50 | 44,0 | 46,0 | 42,0 | 64,0 | 40,0 | 56,0 | 60,0 | 38,0 |
| 55 | 45,5 | 45,5 | 43,6 | 61,8 | 41,8 | 58,2 | 56,4 | 40,0 |
| 60 | 48,3 | 48,3 | 45,0 | 63,3 | 43,3 | 56,7 | 55,0 | 43,3 |
| 65 | 47,7 | 49,2 | 46,2 | 60,0 | 44,6 | 56,9 | 53,8 | 43,1 |
| 70 | 45,7 | 48,6 | 44,3 | 57,1 | 44,3 | 57,1 | 54,3 | 41,4 |
| 75 | 48,0 | 52,0 | 45,3 | 56,0 | 45,3 | 56,0 | 53,3 | 41,3 |
| 80 | 46,3 | 53,8 | 45,0 | 56,3 | 46,3 | 55,0 | 51,3 | 42,5 |
| 85 | 44,7 | 55,3 | 45,9 | 58,8 | 44,7 | 54,1 | 51,8 | 43,5 |
| 90 | 43,3 | 55,5 | 45,6 | 57,8 | 44,4 | 53,3 | 51,1 | 44,4 |
| 95 | 45,3 | 54,8 | 47,4 | 56,8 | 42,1 | 54,8 | 50,5 | 46,3 |
| 100 | 46,0 | 53,0 | 49,0 | 58,0 | 43,0 | 55,0 | 50,0 | 46,0 |

Tab. 33.1 Entwicklung der relativen Häufigkeiten (in %) bei je 100 Münzenwürfen in 8 Versuchsfolgen

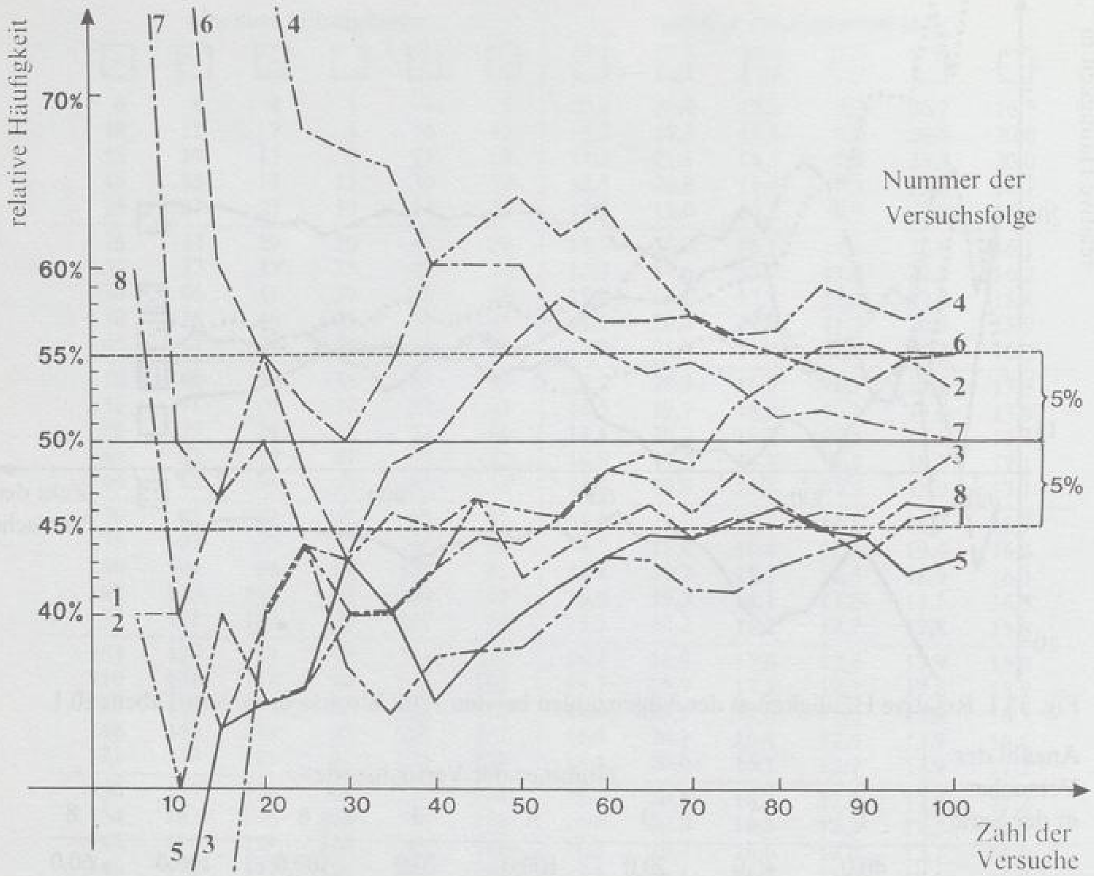



Fig. 34.1 Relative Häufigkeit von »Adler« bei je 100 Münzenwürfen in Abhängigkeit von der Versuchsfolge

## 4.2. Eigenschaften der relativen Häufigkeit

Wir betrachten die erste Zeile von Tabelle 10.1. Sie stellt die Ergebnisse einer Folge von 30 Versuchen (Würfelwurf) dar. Die relativen Häufigkeiten der Ereignisse $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

| Ereignis | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{4\}$ | $\{5\}$ | $\{6\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| relative Häufigkeit | $\frac{6}{30}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{4}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{8}{30}$ | $\frac{5}{30}$ |

Diese relativen Häufigkeiten sind positive rationale Zahlen unter 1.
Allgemein kann man sagen: Tritt das Ereignis $A$ bei $n$ Versuchen $k$-mal ein, so gilt offenbar $0 \leqq k \leqq n$ und damit $0 \leqq \frac{k}{n} \leqq 1$. Also:

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses $A$ in einer Versuchsfolge der Länge $n$ ist eine rationale Zahl aus dem Intervall $[0; 1]$, d.h.

(1) $$\boxed{0 \leqq h_n(A) \leqq 1}$$

Daß die Grenzfälle 0 und 1 auch wirklich auftreten, erkennt man sofort, wenn man den trivialen Fall $n = 1$ betrachtet. Der erste Wurf hatte das Ergebnis 4, die relative Häufigkeit $h_1(\{4\})$ hat somit den Wert 1, die relative Häufigkeit aller anderen Ereignisse jedoch den Wert 0. Die ersten 3 Versuche aus Zeile 10 zeigen, daß diese Werte auch für $n > 1$ auftreten können.
Wir wollen uns nun überlegen, wie man die relative Häufigkeit eines Ereignisses $A$ berechnen kann, wenn man die relativen Häufigkeiten der Elementarereignisse bei dieser Versuchsfolge kennt. Dazu betrachten wir als Beispiel das Ereignis $A :=$ »Augenzahl ist gerade« bei der oben betrachteten Versuchsfolge der Länge 30. Wir müssen in der ersten Zeile von Tabelle 10.1 zählen, wie oft eines der Ergebnisse 2, 4 oder 6 sich eingestellt hat. Wir erhalten $h_{30}(A) = \frac{12}{30} = 40\%$. Diese Zahl hätten wir aber auch aus der obigen Aufstellung der relativen Häufigkeiten der Elementarereignisse erhalten können. Wir müssen nämlich nur die relativen Häufigkeiten derjenigen Elementarereignisse addieren, deren Vereinigung das Ereignis $A$ ergibt, also $h_{30}(A) = h_{30}(\{2\}) + h_{30}(\{4\}) + h_{30}(\{6\}) = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} + \frac{5}{30} = \frac{12}{30} = 40\%$.
Die eben durchgeführten Überlegungen lassen sich leicht verallgemeinern. Man erhält dann in endlichen Ergebnisräumen für relative Häufigkeiten bei einer festen Versuchsfolge von $n$ Versuchen:
Die relative Häufigkeit eines Ereignisses $A\,(\neq \emptyset)$ ist gleich der Summe der relativen Häufigkeiten derjenigen Elementarereignisse, deren Vereinigung $A$ ist; in Zeichen

(2) $$\boxed{h_n(A) = \sum_{\omega \in A} h_n(\{\omega\})}$$

Wir wenden uns nun den Ereignissen $\emptyset$ und $\Omega$ zu.
Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ tritt nie ein; in Definition 30.1 ist also $k = 0$, woraus folgt

(3) $$\boxed{h_n(\emptyset) = 0}$$

Für das sichere Ereignis $\Omega$ gilt andererseits $k = n$, weil es bei jedem Versuch eintritt. Somit gilt

(4) $$\boxed{h_n(\Omega) = 1}$$

$A$ und $B$ seien nun 2 Ereignisse bei derselben Versuchsfolge, deren relative Häufigkeiten $h_n(A)$ und $h_n(B)$ bekannt sind. Kann man damit die relative Häufigkeit des Ereignisses »$A$ oder $B$« $= A \cup B$ bei dieser Versuchsfolge berechnen? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir bei den obigen 30 Würfelwürfen die Ereignisse $A :=$ »Augenzahl ist gerade« und $B :=$ »Augenzahl ist von 1 und 6 verschieden«. $h_{30}(A)$ war 40%. Aufgrund von Eigenschaft (2) errechnen wir für

$$\begin{aligned} h_{30}(B) &= h_{30}(\{2\}) + h_{30}(\{3\}) + h_{30}(\{4\}) + h_{30}(\{5\}) = \\ &= \tfrac{6}{30} + \tfrac{4}{30} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{8}{30} = \\ &= \tfrac{19}{30} = 63\tfrac{1}{3}\%. \end{aligned}$$

Der naive Vorschlag, die relative Häufigkeit von $A \cup B$ als Summe der relativen Häufigkeiten von $A$ bzw. $B$ zu berechnen, schlägt fehl, da sich hier für die Summe der Wert $\frac{31}{30} = 103\frac{1}{3}\%$ ergibt. Man sieht aber auch sofort, woran das liegt: Die Ergebnisse 2 und 4 treten sowohl in $A$ als auch in $B$ auf, die relativen Häufigkeiten der zugehörigen Elementarereignisse $\{2\}$ bzw. $\{4\}$ wurden also bei der Summenbildung doppelt gezählt. Um diesen Fehler zu korrigieren, müssen wir diese relativen Häufigkeiten vom Summenwert $\frac{31}{30}$ subtrahieren; wir erhalten also $h_{30}(A \cup B) = \frac{31}{30} - (\frac{6}{30} + \frac{1}{30}) = \frac{24}{30} = 80\%$. Dieser Wert ist richtig, wie wir durch direkte Berechnung von $h_{30}(A \cup B)$ überprüfen können:

$$h_{30}(A \cup B) = h_{30}(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \tfrac{6}{30} + \tfrac{4}{30} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{8}{30} + \tfrac{5}{30} = \tfrac{24}{30} = 80\%.$$

Was wir am Beispiel gesehen haben, gilt aber sogar allgemein:
In einer festen Versuchsfolge ist die relative Häufigkeit des Ereignisses »$A$ oder $B$« gleich der Summe der relativen Häufigkeiten der beiden Ereignisse abzüglich der relativen Häufigkeit des Ereignisses »$A$ und $B$«, kurz

$$(5) \qquad \boxed{h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)}$$

**Beweis:** Bezeichnen wir mit $k(A \cup B)$ die absolute Häufigkeit des Ereignisses $A \cup B$ in der Serie von $n$ Versuchen, so erkennt man an Hand von Figur 36.1 leicht, daß für die absoluten Häufigkeiten $k(A \cup B)$, $k(A)$, $k(B)$ und $k(A \cap \mathrm{B})$ gilt:

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$$

Dividiert man diese Gleichung durch $n$, so erhält man die Behauptung.

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $k(A \cap B)$ | $k(A \cap \bar{B})$ | $k(A)$ |
| $\bar{A}$ | $k(\bar{A} \cap B)$ | $k(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $k(\bar{A})$ |
| | $k(B)$ | $k(\bar{B})$ | |

Fig. 36.1 Mehrfeldertafel der absoluten Häufigkeiten. $k(M)$ bedeutet die absolute Häufigkeit des Ereignisses $M$ in der Versuchsserie.

Sind $A$ und $B$ unvereinbare Ereignisse, d.h., ist $A \cap B = \emptyset$, so wird aus (5)

$$(6) \qquad \boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)}$$

Ist im besonderen $B = \bar{A}$, $B$ also das Gegenereignis zu $A$, so ergibt (6) wegen $A \cap \bar{A} = \emptyset$:

$h_n(A \cup \bar{A}) = h_n(A) + h_n(\bar{A})$. Andererseits ist nach (4)
$h_n(A \cup \bar{A}) = h_n(\Omega) = 1$. Somit gilt

$$(7) \qquad \boxed{h_n(\bar{A}) = 1 - h_n(A)}$$

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses und die seines Gegenereignisses ergeben in einer festen Versuchsfolge stets 100%.
An einem **Beispiel** wollen wir zeigen, wie man mit Hilfe der Eigenschaften der relativen Häufigkeiten eine Mehrfeldertafel erstellen und damit zusammenhängende Aufgaben lösen kann.

Am 31. 12. 1973 hatte die Bundesrepublik Deutschland $n = 62\,101\,400$ Einwohner. Davon waren 29713800 männlich und davon wieder 20002000 volljährig. Insgesamt waren 43151600 Einwohner volljährig.
Aus diesen Daten können wir die relativen Häufigkeiten für die Ereignisse
$♂$ := »Ein beliebig herausgegriffener Einwohner ist männlich« und
$V$ := »Ein beliebig herausgegriffener Einwohner ist volljährig« berechnen:

$$h_n(♂) = \tfrac{29\,713\,800}{62\,101\,400} = 47{,}8\%, \qquad h_n(V) = \tfrac{43\,151\,600}{62\,101\,400} = 69{,}5\%.$$

Für das Ereignis, daß ein beliebig herausgegriffener Einwohner männlich und volljährig ist, erhalten wir $h_n(♂ \cap V) = \frac{20\,002\,000}{62\,101\,400} = 32{,}2\%$.

Diese gegebenen Zahlen sind in der Mehrfeldertafel (Figur 37.1) schwarz eingetragen. Die restlichen Zahlen berechnen wir unter Verwendung der Eigenschaften der relativen Häufigkeit.

$$h_n(\bar V) = 1 - h_n(V) = \\ = 1 - 0{,}695 = 30{,}5\%$$

$$h_n(♀) = 1 - h_n(♂) = \\ = 1 - 0{,}478 = 52{,}2\%$$

| | $V$ | $\bar V$ | |
|---|---|---|---|
| $♂$ | 32,2% | 15,6% | 47,8% |
| $♀$ | 37,3% | 14,9% | 52,2% |
| | 69,5% | 30,5% | |

Fig. 37.1 Mehrfeldertafel der relativen Häufigkeiten

Weil $V$ die Vereinigung der unvereinbaren Ereignisse $V \cap ♂$ und $V \cap ♀$ ist, gilt nach (6):

$h_n(V) = h_n(V \cap ♂) + h_n(V \cap ♀)$; also ist
$h_n(V \cap ♀) = h_n(V) - h_n(V \cap ♂) = 69{,}5\% - 32{,}2\% = 37{,}3\%$.

Analog erhalten wir

$$h_n(\bar V \cap ♂) = h_n(♂) - h_n(V \cap ♂) = 47{,}8\% - 32{,}2\% = 15{,}6\%$$

und

$$h_n(\bar V \cap ♀) = h_n(♀) - h_n(V \cap ♀) = 52{,}2\% - 37{,}3\% = 14{,}9\%.$$

Damit ist die Vierfeldertafel gefüllt.
Jede weitere einschlägige Fragestellung läßt sich nun direkt aus der Vierfeldertafel beantworten; zum Beispiel:

$$h_n(V \cup ♀) = h_n(V) + h_n(\bar V \cap ♀) = 69{,}5\% + 14{,}9\% = 84{,}4\%$$

oder auch

$$h_n(V \cup ♀) = h_n(♀) + h_n(V \cap ♂) = 52{,}2\% + 32{,}2\% = 84{,}4\%$$

oder umständlicher mit Eigenschaft (5)

$$h_n(V \cup ♀) = h_n(V) + h_n(♀) - h_n(V \cap ♀) = 69{,}5\% + 52{,}2\% - 37{,}3\% = 84{,}4\%.$$

## Aufgaben

### Zu 4.1.

1. Bei einer Mathematikschulaufgabe ergab sich für die Noten folgende Verteilung:

| Note | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 2 | 4 | 5 | 8 | 7 | 1 |

Berechne die relative Häufigkeit der einzelnen Noten.

2. Im amtlichen Fernsprechbuch 25 (Ausgabe 1971/72) findet man auf S.776 in der 3. Spalte bei den Telefonnummern folgende Ziffernverteilung:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 32 | 25 | 34 | 35 | 24 | 35 | 36 | 35 | 16 |

Berechne die relative Häufigkeit der einzelnen Ziffern.

3. Berechne die relative Häufigkeit der Substantive unter den Wörtern der Gedichte: »An den Mond« von *J. W. v. Goethe*, »Der Herbst des Einsamen« von *G. Trakl*.

4. Bestimme die relative Häufigkeit der Primzahlen
   **a)** zwischen 1 und 100, 101 und 200, ..., 901 und 1000,
   **b)** zwischen 1 und 100, 1 und 200, ..., 1 und 1000.

5. Würfle 100mal mit einem Würfel und bestimme die relative Häufigkeit der Augenzahl 6
   **a)** für die ersten 20 Würfe; für die zweiten 20 Würfe; ...; für die fünften 20 Würfe.
   **b)** für die ersten 20 Würfe; für die ersten 40 Würfe; ...; für die 100 Würfe.

6. Werte Tabelle 10.1 folgendermaßen aus: Bestimme die relative Häufigkeit der Augenzahl 6
   **a)** für die ersten 150 Würfe; für die zweiten 150 Würfe; ...; für die achten 150 Würfe.
   **b)** für die ersten 150 Würfe; für die ersten 300 Würfe; ...; für die 1200 Würfe.

7. Im Zahlenlotto* »6 aus 49« ergab sich nach 1225 Veranstaltungen nebenstehende Tabelle der absoluten Häufigkeiten der gezogenen Zahlen ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl.
   **a)** Berechne die relativen Häufigkeiten von 13, 29 und 49 nach der Tabelle.
   **b)** Nimm an, jede der Zahlen 1 bis 49 sei gleich oft gezogen worden. Berechne dann die relative Häufigkeit für jede Zahl.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>151 | 2<br>158 | 3<br>158 | 4<br>142 | 5<br>140 | 6<br>151 | 7<br>139 |
| 8<br>143 | 9<br>165 | 10<br>137 | 11<br>139 | 12<br>144 | 13<br>121 | 14<br>145 |
| 15<br>136 | 16<br>144 | 17<br>154 | 18<br>147 | 19<br>155 | 20<br>145 | 21<br>164 |
| 22<br>155 | 23<br>150 | 24<br>141 | 25<br>160 | 26<br>164 | 27<br>144 | 28<br>131 |
| 29<br>150 | 30<br>146 | 31<br>163 | 32<br>175 | 33<br>153 | 34<br>139 | 35<br>147 |
| 36<br>163 | 37<br>139 | 38<br>163 | 39<br>163 | 40<br>159 | 41<br>147 | 42<br>146 |
| 43<br>153 | 44<br>145 | 45<br>152 | 46<br>155 | 47<br>139 | 48<br>159 | 49<br>171 |

* Sowohl das aus dem Niederländischen stammende *Lotterie* wie auch das italienische *Lotto* werden vom germanischen *lot = Los* abgeleitet. Ursprünglich bezeichneten beide Wörter dasselbe, wohingegen heute unter Lotto das *Lotto di Genova*, das Genueser Zahlenlotto verstanden wird. Bei einer Lotterie werden vor der Ausspielung die zu verteilende Waren- oder Geldmenge, die Anzahl der zu verkaufenden Lose und deren Preise festgesetzt. Beim Lotto hingegen bestimmen Anzahl und Art der Wetten erst den Gewinn.
Die frühesten Warenlotterien wurden in den Niederlanden abgehalten; erstmals nachweisbar ist die vom Rat der Stadt Sluis (Flandern) am 9.4.1445 veranstaltete Ziehung. In Deutschland liefen diese Verlosungen unter dem Namen (Glücks-)Hafen. Der frühest belegte ist der anläßlich des Tiburtius-Schießens 1467 vom Rat der Stadt München eingerichtete Hafen. Die erste Lotterie, in der nur Geldpreise ausgesetzt waren, veranstaltete 1504 der Rat der Stadt Zürich zur Deckung der Unkosten des »Freischießens« (Schützenfest vom 12.8.–16.9.1504).
Über die Entstehung des Zahlenlottos gibt es keine gesicherten Quellen. In Rom war es üblich, so lesen wir bei *Andrea Alciati* (1492–1550), daß auf die Wahl eines Papstes oder die von Kardinälen Wetten abgeschlossen wurden; ersteres verbot 1562 *Pius IV.* durch eine Bulle. In Genua kam es nach dem Staatsstreich des *Fiesco* (1547) schließlich

**8.** In den Aufgaben zum 1. Kapitel hast du selbst Zufallsexperimente durchgeführt. Bestimme nun die relativen Häufigkeiten der dort angesprochenen Ereignisse

**a)** bei Aufgabe **1**: $h_{100}$ (»Augensumme 2 bis 10«)
$h_{100}$ (»Augensumme 11«)
$h_{100}$ (»Augensumme 12«)

**b)** bei Aufgabe **2**: $h_{100}$ (»Augensumme nicht [9 oder 10]«)
$h_{100}$ (»Augensumme 9«)
$h_{100}$ (»Augensumme 10«)

**c)** bei Aufgabe **3**: $h_{25}$ (»Mindestens eine 6«)
$h_{25}$ (»Mindestens ein Sechser-Pasch«)

## Zu 4.2.

**9.** In einem Studentenheim wohnen 200 Studenten. 165 von ihnen sprechen Englisch, 73 Französisch, 49 sprechen beide Sprachen. Wie groß ist die relative Häufigkeit der Studenten, die **a)** mindestens eine, **b)** keine der beiden Sprachen sprechen?

**10.** Bestimme die relative Häufigkeit der natürlichen Zahlen von 1 bis 100, die
**a)** durch 2, **b)** durch 3, **c)** durch 2 und 3, **d)** durch 2 oder 3 teilbar sind.

**11.** 52% aller Deutschen sind Frauen. 67% aller deutschen Männer schnarchen.* Wie groß ist die relative Häufigkeit der schnarchenden Männer unter den Deutschen?

**•12.** In 38% aller deutschen Haushalte leben Kinder. 13% aller deutschen Haushalte haben einen Kanarienvogel.* Zwischen welchen Grenzen liegt die relative Häufigkeit der Haushalte, die weder Kinder noch einen Kanarienvogel haben?

**13.** Bei einer Großuntersuchung an 27392 Personen ergab sich folgende Verteilung der Blutgruppenzugehörigkeit**:
Träger des Antigens A: 13915 Träger des Antigens B: 2849
Personen, die weder Antigen A noch Antigen B besitzen: 11724 (Blutgruppe 0)
Mit $A$ bzw. $B$ bezeichnen wir das Ereignis »Die untersuchte Person ist Träger des Antigens A (bzw. B)«. $O$ bedeute das Ereignis, daß die Person weder Träger des Antigens A noch Träger des Antigens B ist.

**a)** Zeichne eine Mehrfeldertafel für die relativen Häufigkeiten bei der Großuntersuchung.

**b)** Bestimme die relativen Häufigkeiten der Ereignisse
**1)** $A$, $B$ und $O$ **2)** $A \cap B$ und $A \cup B$ **3)** $A \cup O$ **4)** $\bar{A}$ **5)** $\overline{A \cap B}$ **6)** $\bar{A} \cap \bar{B}$

zur endgültigen Verfassung von 1576: Halbjährlich mußten jeweils fünf der auf zwei Jahre gewählten 20 Ratgeber des Dogen durch Losentscheid – Namenszettel im Glücksrad – aus den mindestens 40jährigen Mitgliedern des 120köpfigen Kleinen Rats ersetzt werden. Dabei soll angeblich dem Ratsherrn *Benedetto Gentile* 1620 die Idee gekommen sein, daß jedermann bei ihm auf einen oder gar zwei Namen der (etwa 110 bis 120) Wahlfähigen Geld setzen konnte. Belegt hingegen ist, daß in Genua am 22. 9. 1643 ein solches Wettspiel unter dem Namen *Seminario* erstmalig offiziell erlaubt wurde. Da sich dieses wesentlich schneller abwickeln ließ als eine Lotterie – die Ziehung der 400000 Lose der ersten englischen Lotterie unter *Elisabeth I.* beispielsweise dauerte vom 11. Januar bis zum 6. Mai 1569, wobei Tag und Nacht gezogen wurde –, verbreitete es sich rasch in Italien, wobei man irgendwann dazu überging, statt der Namen nur Zahlen zu ziehen, die einer Namensliste zugeordnet waren: 1665 Mailand (5 von 100 Aktionären der Ambrosiusbank), 1670 Rom, 1674 Turin (5 aus 100 Mädchennamen, die dann eine Aussteuer gewannen), 1682 Neapel, wo zum erstenmal eine Liste mit 90 Mädchennamen verwandt wird. Genua stellte erst 1735 auf »5 aus 90« um, und in dieser Form verbreitete sich das Spiel unter dem Namen *Lotto di Genova* in Europa: Bayern machte 1735 den Anfang, 1751 folgte Österreich, 1757 Frankreich und 1763 Preußen, wo es bereits 1810 wieder verboten wurde. Mit seinem Ende in Bayern 1861 war es aus allen deutschen Ländern verschwunden, nur Österreich konnte sich nie zu einem Verbot durchringen. 1953 führte man in Berlin ein Lotto »5 aus 90« ein, 1955 hingegen das Spiel »6 aus 49« in Nordrhein-Westfalen, Bayern, Schleswig-Holstein und Hamburg. 1959 schlossen sich alle damaligen Bundesländer und Berlin zum Deutschen Lottoblock »6 aus 49« zusammen. Das am 28. 4. 1982 eingeführte »7 aus 38« wurde wegen nachlassenden Interesses zum letzten Mal am 28. 5. 1986 gezogen. In den neuen Bundesländern lief das alte DDR-System am 30. 9. 1992 aus.

* Deutschland in Zahlen 1972/73, heyne-Kompaktwissen 10.

** *Karl Landsteiner* (14.5.1868 Wien – 26.6.1943 New York) erhielt 1930 den Nobelpreis für Medizin für sein 1901 entdecktes AB0-System der Blutgruppen.