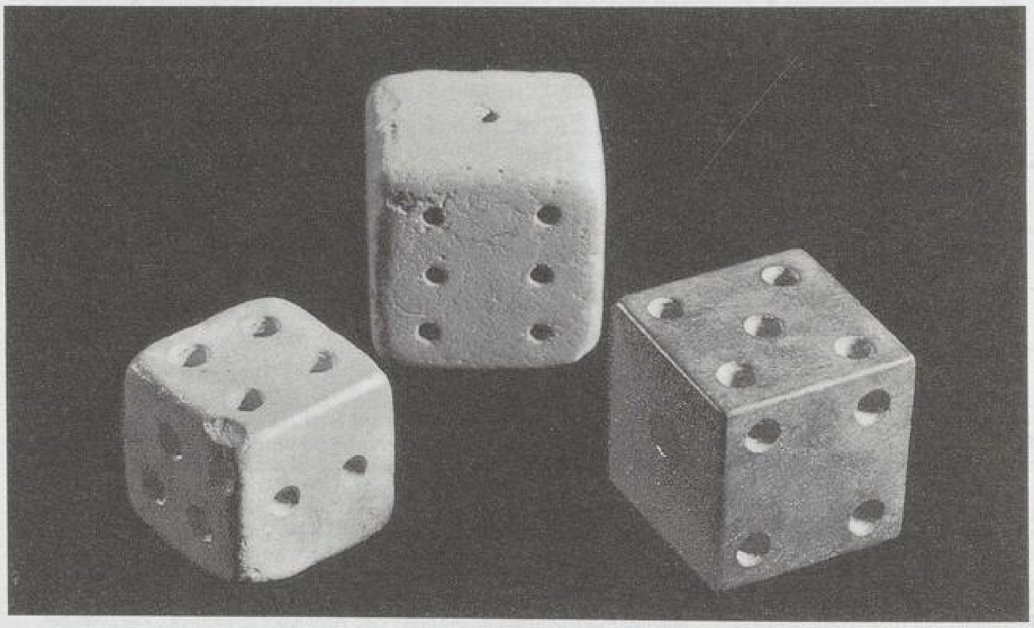
Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Drei Spielwürfel aus Mohenjo-Daro

Links: 2100 v. Chr., weißer Kalkstein, Kantenlänge 2,55–2,66 cm.
Anordnung: 1–3, 2–5, 4–leer

Mitte: 2000–1800 v. Chr., Keramik, Kantenlänge 3,1–3,2 cm.
Anordnung: 1–2, 3–4, 5–6 (siehe Figur 47.2)

Rechts: 2250 v. Chr., der am genauesten gearbeitete Spielwürfel aus Mohenjo-Daro, grauer Stein, Kantenlänge 2,9 cm.
Anordnung: 1–2, 3–5, 4–6

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.1. Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Bei zufallsbedingten Ereignissen hat man normalerweise ein subjektives Empfinden dafür, mit welchem Grad von Sicherheit, d.h. mit welcher »Wahrscheinlichkeit«, ein solches Ereignis eintreten wird. Als Beispiel für eine derartige subjektive Wahrscheinlichkeit diene der Satz »Morgen wird es wahrscheinlich regnen«.
Den Grad der Sicherheit entnimmt man der eigenen oder fremden Erfahrung. Dabei meint man, sich seines Urteils um so sicherer zu sein, je öfter man Erfahrungen in dieser Hinsicht gemacht hat. Dieser umgangssprachliche Wahrscheinlichkeitsbegriff beruht also auf Beobachtungen, wie oft ein Ereignis unter bestimmten Bedingungen eingetreten ist, d.h. also auf Beobachtungen der relativen Häufigkeit des Ereignisses. *Jakob Bernoulli* (1655–1705) schreibt im 4. Kapitel des 4. Teils seiner *Ars conjectandi*, einem der grundlegenden Werke der Wahrscheinlichkeitstheorie:

»Auch leuchtet es jedem Menschen ein, daß es nicht genügt, nur ein oder zwei Versuche angestellt zu haben, um auf diese Weise irgendein Ereignis beurteilen zu können, sondern daß dazu eine große Anzahl von Versuchen nötig ist; weiß doch selbst der beschränkteste Mensch aus irgendeinem natürlichen Instinkt heraus von selbst und ohne jede vorherige Belehrung (was fürwahr erstaunlich ist), daß um so geringer die Gefahr ist, vom wahren Sachverhalt abzuweichen, je mehr diesbezügliche Beobachtungen gemacht worden sind.«*

In einem mathematischen Modell des Zufallsgeschehens muß man den Ereignissen Zahlen als Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Man ist auf Grund der obigen Überlegungen geneigt, die relative Häufigkeit eines Ereignisses als Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in die Theorie einzuführen. Wir haben aber in **4.1.** gesehen, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses zunächst von der Anzahl der Versuche abhängt; bei gleicher Versuchsanzahl hängt der Wert der relativen Häufigkeit dann noch von der konkreten Versuchsfolge ab. Die Entscheidung, welchen der durch Versuche erhaltenen oder welchen der grundsätzlich möglichen Werte der relativen Häufigkeit eines Ereignisses man nun als Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nehmen soll, nimmt uns niemand ab. Die Mathematiker durchschlagen diesen gordischen Knoten dadurch, daß sie als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses alles akzeptieren, was nur bestimmten Bedingungen genügt. Selbstverständlich wird man sich bei der Aufstellung dieser Bedingungen leiten lassen von den Eigenschaften, die die relative Häufigkeit besitzt.
Zunächst erinnern wir an Eigenschaft (2) von Seite 35. Sie besagt, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses A die Summe der relativen Häufigkeiten derjenigen Elementarereignisse ist, deren Vereinigung das Ereignis A ergibt. Es genügt demnach, Wahrscheinlichkeitswerte für alle Elementarereignisse festzulegen. Dies kann aber wiederum nicht ganz willkürlich geschehen. Wegen Eigenschaft (1) müssen diese Wahrscheinlichkeitswerte Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$ sein, deren Summe wegen (4) den Wert 1 ergeben muß. Schließlich wollen wir

* Deinde nec illud quenquam latere potest, quod ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non sufficiat sumsisse unum alterumque experimentum, sed quod magna experimentorum requiratur copia; quando et stupidissimus quisque nescio quo naturae instinctu per se et nulla praevia institutione (quod sane mirabile est) compertum habet, quo plures ejusmodi captae fuerint observationes, eo minus a scopo aberrandi periculum fore.

dem unmöglichen Ereignis wegen (3) die Wahrscheinlichkeit 0 zuschreiben. Zusammenfassend können wir sagen: Wir verteilen die Wahrscheinlichkeit 1 auf die Elementarereignisse; dadurch ist aber wegen (2) automatisch allen Ereignissen des Ereignisraums eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.
Im mathematischen Modell des Zufallsgeschehens definiert man also die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als den Wert einer reellwertigen Funktion P, die Wahrscheinlichkeitsverteilung* heißt und die durch folgende Eigenschaften axiomatisch festgelegt wird.

Definition 42.1: Eine auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierte Funktion

$$P: A \mapsto P(A),\ D_P = \mathfrak{P}(\Omega)$$

heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ergebnisraum Ω**, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist eine Zahl aus dem Intervall $[0; 1]$, d.h., für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $0 \leqq P(\{\omega\}) \leqq 1$.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1, d.h., $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.
3. Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0, d.h., $P(\emptyset) := 0$.
4. Die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse, d.h., $P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Beispiel: Für den Würfel von Tabelle 10.1 bietet sich auf Grund der letzten Zeile von Tabelle 32.1 folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung an, wenn man als Ergebnisraum Ω die Menge der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 nimmt:

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	0,156	0,203	0,170	0,129	0,175	0,167

1 und **2** von Definition 42.1 sind offensichtlich erfüllt. Mit **3** und **4** liegen dann für alle 2^6 Ereignisse des Ereignisraums $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Wahrscheinlichkeiten fest. So hat z.B. das Ereignis »gerade Augenzahl« die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(\{2, 4, 6\}) &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \\ &= 0{,}203 + 0{,}129 + 0{,}167 = \\ &= 0{,}499. \end{aligned}$$

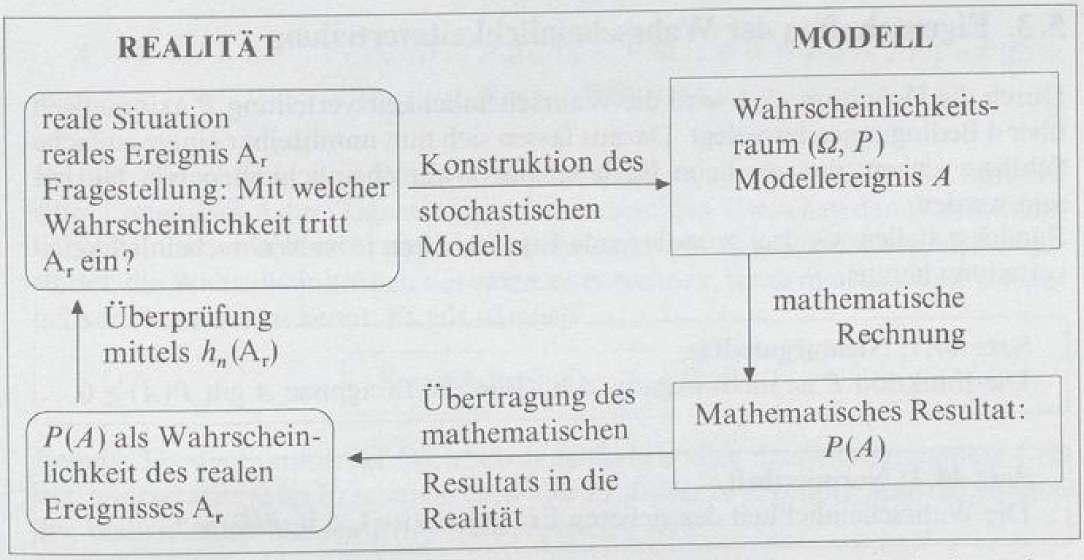
Die Festlegung der Funktionswerte $P(\{\omega\})$, d.h. der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, ist im Rahmen dieser Definition willkürlich. Man wird jedoch die Werte so festlegen, daß sie den jeweiligen Verhältnissen angepaßt sind.

* Das Funktionssymbol P kommt von *probabilitas*, dem lateinischen Wort für Wahrscheinlichkeit, aus dem das französische *probabilité* und das englische *probability* wurde. Es ist zum ersten Mal bei *Cicero* (106–43) belegt. Mit dem älteren Adjektiv *probabilis* bezeichnete man etwas, was Beifall und Anerkennung gefunden hatte, was sich als tüchtig herausgestellt hatte, und schließlich, was durch gute Gründe glaubhaft zu sein schien. – Das deutsche Wort *Wahrscheinlichkeit* (= es scheint wahr zu sein) entspricht jedoch genau dem lateinischen Begriff *verisimilitudo*, der erstmals bei *Apuleius* (um 125 – um 180) in den *Metamorphosen* (2, 27, 6) nachzuweisen ist.

So wird man bei einem idealen Würfel auf Grund der Symmetrie für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ festlegen. Bei einem realen Würfel hingegen empfiehlt es sich, wie im obigen Beispiel durchgeführt, die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen in einer möglichst langen Versuchsserie zu bestimmen und diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen zu verwenden. Mit der axiomatischen Festlegung der Wahrscheinlichkeit durch Definition 42.1 sind nun alle Begriffe vorhanden, die zur Konstruktion eines mathematischen Modells für ein reales Zufallsexperiment benötigt werden. Dieses stochastische Modell besteht aus der Menge Ω aller betrachteten Ergebnisse ω und aus der auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierten Wahrscheinlichkeitsverteilung P. Aus diesem Grunde nennen wir das Paar (Ω, P) **Wahrscheinlichkeitsraum** des Zufallsexperiments.

5.2. Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gelernt, wie man, von einem realen Zufallsexperiment ausgehend, ein stochastisches Modell für dieses Experiment konstruieren kann. Die Brauchbarkeit eines solchen Modells zeigt sich erst dann, wenn im Modell erarbeitete Erkenntnisse Erklärungen für eine reale Situation bieten oder Vorhersagen für reale Geschehnisse gestatten. Diesen Zusammenhang zwischen Realität und Modell wollen wir kurz nochmals zusammenfassen.



1) Fragestellung: Man möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein reales Ereignis A_r in einer realen Situation eintritt.

2) Man konstruiert zu dieser realen Situation ein stochastisches Modell, d.h. einen Wahrscheinlichkeitsraum, indem man einen passenden Ergebnisraum Ω und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P angibt. Dem realen Ereignis A_r entspricht ein Modellereignis A, das eine Teilmenge von Ω ist.

3) Man berechnet im Modell die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Modellereignisses.

4) Man nimmt nun diese Wahrscheinlichkeit $P(A)$ als »Wahrscheinlichkeit des realen Ereignisses A_r«.

5) Die Brauchbarkeit des stochastischen Modells überprüft man, indem man in einer möglichst langen Versuchsreihe die relative Häufigkeit des realen Ereignisses A_r bestimmt; dabei sollte sich diese relative Häufigkeit nicht allzusehr von der berechneten Wahrscheinlichkeit $P(A)$ unterscheiden. Ist man mit der Übereinstimmung unzufrieden, so wird man das stochastische Modell verändern und den Zyklus erneut durchlaufen.

Den Zusammenhang zwischen stochastischem Modell und Realität, der auf Seite 43 schematisch dargestellt ist, formulieren wir in der

Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten:
Die Aussage »Das Ereignis A hat die Wahrscheinlichkeit $P(A)$« bedeutet: Wiederholt man das gleiche Zufallsexperiment sehr oft (n-mal), so tritt das reale Ereignis A_r ungefähr mit der relativen Häufigkeit $P(A)$ ein, in Zeichen $h_n(A_r) \approx P(A)$, wobei das »Ungefähr« von der Länge n der Versuchsserie abhängt.

Die Präzisierung dieses »Ungefähr« ist eine der Aufgaben der Beurteilenden Statistik.

5.3. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Durch die Definition 42.1 wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung P axiomatisch über 4 Bedingungen festgelegt. Daraus lassen sich nun unmittelbar einige einfache Schlüsse ziehen, die uns beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten von Nutzen sein werden.
Zunächst stellen wir drei grundlegende Eigenschaften jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung heraus:

Satz 44.1: Nichtnegativität.
Die Funktion P ist nicht negativ, d.h.: Für alle Ereignisse A gilt $P(A) \geqq 0$.

Satz 44.2: Normiertheit.
Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, d.h. $P(\Omega) = 1$.

Satz 44.3: Additivität.
Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit von »A oder B« gleich der Summe aus der Wahrscheinlichkeit von A und der Wahrscheinlichkeit von B, d.h., es gilt folgende Summenformel:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Beweise:

1. Da die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen nicht-negative Zahlen sind, ist auch jede aus ihnen gebildete Summe nicht negativ.

2. Da Ω die Vereinigung aller Elementarereignisse ist und deren Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben, ist $P(\Omega) = 1$.

3. Da die Ereignisse A und B unvereinbar sind, gehört jedes Ergebnis aus $A \cup B$ entweder zu A oder zu B. Nach Eigenschaft **4** der Definition 42.1 erhält man die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B$ als Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse. Diese Summe läßt sich aber in zwei Teilsummen zerlegen, von denen die erste die Wahrscheinlichkeit von A und die zweite die Wahrscheinlichkeit von B liefern.

   Formal sieht das so aus:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = P(A) + P(B).$$

   Ist mindestens eines der Ereignisse A, B das unmögliche Ereignis $\emptyset$, so ist die Behauptung auf Grund von Eigenschaft **3** der Definition 42.1 trivialerweise richtig. Der formale Nachweis gelingt folgendermaßen:

$$A = \emptyset \wedge B \neq \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup B) = P(B) = 0 + P(B) = P(\emptyset) + P(B) = \\ = P(A) + P(B).$$

$$A = \emptyset \wedge B = \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = 0 + 0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) = \\ = P(A) + P(B).$$

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es oft zweckmäßig, anstelle eines Ereignisses A das Gegenereignis $\bar{A}$ zu betrachten. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse besteht ein enger Zusammenhang, der es gestattet, die Wahrscheinlichkeit des einen zu berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeit des anderen kennt. Es gilt nämlich

Satz 45.1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Beweis: Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse 1 ist und andererseits jedes Ergebnis ω entweder zu A oder zu $\bar{A}$ gehört, muß die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(A) + P(\bar{A})$ gleich 1 sein.

5.4. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Von alters her benützen die Menschen einfache Geräte, um Zufall zu erzeugen, der sowohl magischen Zwecken wie auch dem Spieltrieb dient. Solche Zufallsgeräte fand man in Form von kleinen Pyramiden, von abgeflachten Kugeln, als Pentaeder, Oktaeder und Ikosaeder, aber auch in menschlicher Gestalt. Wir wollen im Folgenden einige wichtige Beispiele solcher Zufallsgeräte vorstellen.

Bild 46.1 Ikosaeder

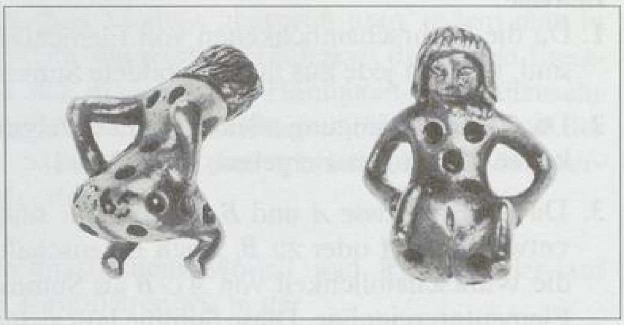


Bild 46.2 Zwei Würfel aus Silber in Gestalt von hockenden Frauen (14 × 11 × 11 mm), Deutschland, 17. Jh. – Bayerisches Nationalmuseum. – Das Britische Museum besitzt ein winziges Silbermenschenpaar aus der römischen Antike mit derselben Augenverteilung: 1 auf dem Kopf, 4 am Gesäß, 2 und 3 auf den Schenkeln, 5 auf der Brust und 6 auf dem Rücken. Siehe Bild 227.1.

a) Der Astragalus*. Sprungbeine von Paarhufern wie Schaf und Ziege findet man schon in Gräbern aus prähistorischer Zeit (30000–20000 v. Chr.) und dann ab dem 3. Jahrtausend v. Chr. sehr verbreitet in Gräbern verschiedener Kulturen Mittel- und Südosteuropas, Vorderasiens und Chinas.

Die Beliebtheit dieses Spielgeräts bezeugen viele antike Quellen** und Kunstwerke, aber noch mehr die mitunter sehr hohe Anzahl von Astragali als Grabbeigaben; so fand man in Süditalien oft über 1000 Stück, teils echt von Schaf und Ziege, teils nachgebildet in Ton oder auch in Edelmetall. Spielregeln sind erst aus Großgriechenland bekannt; die Überlieferung ist leider sehr lückenhaft. Die Kenntnis der Regeln geht mit der Christianisierung verloren. Astragali waren mehr ein Spielgerät der Griechen als der Römer. In China sind Astragali seit alters her in Gebrauch. Bis in die Anfänge unseres Jahrhunderts waren sie in vielen Gegenden Europas, u.a. auch in Deutschland, ein beliebtes Spielgerät für Kinder. Heutzutage gibt es sogar schon Astragali aus Plastik! In Troia gefundene waren dagegen aus Blei (Troia VII–IX, ca. 1300 v. Chr.–4. Jh. n. Chr., Größe in cm z.B. 2,0 × 1,3 × 0,6).

Da ein Astragalus an 2 Seiten rund ist, kann er nach dem Wurf nur auf einer von 4 Seiten zu liegen kommen. In manchen Spielen wurde die oben liegende Seite – wohl in Anlehnung an den Würfel – wie folgt bewertet: Konvexe Breitseite (»Bauch«) = 4, konkave Breitseite (»Rükken«) = 3, volle Schmalseite = 1, eingedrückte Schmalseite = 6. (Vgl. Bild 60.1)

Bild 46.3 Astragali aus dem etruskischen Vulci – Staatliche Antikensammlungen und Glyptothek, München

* Betonung auf der drittletzten Silbe; ὁ ἀστράγαλος = das Sprungbein. Es handelt sich um den kleinen, zwischen den Knöcheln des Schien- und Wadenbeins eingeklemmten, die Verbindung mit dem Fuße herstellenden Knochen. Die Römer nannten ihn *talus*.

** So erzählt z.B. *Patroklos* in der *Ilias* (23, 88), daß er als Junge aus Zorn jemanden beim Spiel mit den Knöcheln getötet hat. – Die Kaiser *Augustus* und *Claudius* würfelten gerne; letzterer schrieb sogar ein Buch über die Kunst des Würfelspiels (*Sueton: Caesarenleben*, Aug. 71 und Cl. 33). – Ein Epigramm des *Asklepiades* (3. Jh. v. Chr.) ist dem Schüler *Konnaros* gewidmet, der 80 Astragali als Preis in einem Schönschreibewettbewerb errang.

Über die relativen Häufigkeiten kann man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Astragalus-Wurf erhalten:

ω	1	3	4	6
$P(\{\omega\})$	0,1	0,35	0,48	0,07

Dabei ist natürlich zu beachten, daß jeder Astragalus eine etwas andere Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt. Diese Verschiedenheit mag vielleicht den Reiz des Spiels ausgemacht haben. Sicherlich aber kam sie der Magie sehr zunutze, so z. B. im berühmten Astragalorakel des Aphrodite-Heiligtums von Paphos auf Zypern.* Negerstämme in Südafrika verwenden Astragali heute noch zur Zukunftsdeutung.

b) Der Würfel.** Feilte man Astragali oder passend abgeschnittene Stücke von Röhrenknochen (Bild 47.3) zu, so hatte man 6 mögliche Ergebnisse, da sie auf alle 6 Seiten fallen konnten. Aus ihnen hat sich unser Spielwürfel entwickelt.

In Tepe Gawra (Irak) und Mohenjo Daro (Pakistan) fand man Tonwürfel aus dem Anfang bzw. Ende des 3. Jahrtausends v. Chr. (siehe Seite 40, Figur 47.1 und Figur 47.2). Würfel aus ägyptischen Gräbern sind etwa 4000 Jahre alt.
In China sind Würfel aus der Zeit um 600 v. Chr. erhalten. *Sophokles* (496–406) zufolge hat *Palamédes*, der große Erfindergenius der Griechen, die Würfel bei der Belagerung von Troja erfunden, um die dort hungernden Helden abzulenken***, wohingegen *Herodot* (490–430) meint, die Lyder hätten um 1500 v. Chr. die Würfel (und auch die Astragali) erfunden, um das hungernde Volk jeden zweiten Tag 18 Jahre lang über den Hunger hinwegzutrösten (I. 94). *Platon* (428–348) hingegen läßt *Sokrates* in *Phaidros* (274c) sagen, der ibisköpfige Gott *Thot* der Ägypter habe zuerst die Zahlen und dann das Würfelspiel erfunden. – Von der Leidenschaft der Germanen beim Würfelspiel berichtet *Tacitus* (um 55 – nach 115) in seiner *Germania* (24).

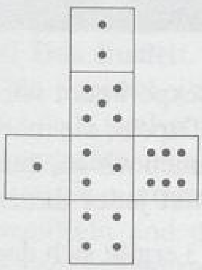


Fig. 47.1 Würfel von Tepe Gawra (Nord-Irak)

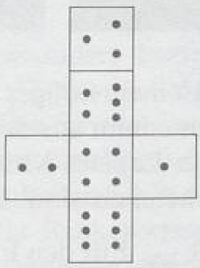


Fig. 47.2 Würfel von Mohendscho Daro (Pakistan)

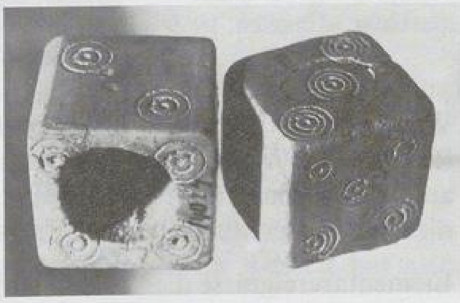


Bild 47.3 tesserae, Herkunft unbekannt – Staatliche Antikensammlungen und Glyptothek, München

* Über ein Astragalorakel berichtet *Sueton* (70–140) in *De vita Caesarum* (Tib. 14): *Tiberius* befragte auf dem Weg nach Illyrien das Orakel des dreiköpfigen Gottes Geryoneus bei Padua. Er mußte 4 goldene Astragali in die Aponusquelle, eine heiße Schwefelquelle (heute Bad Abano), werfen; sie zeigten den höchsten Wert. – *Tiberius* zog 11 v. Chr. und 6 n. Chr. nach Illyrien und errang dort Siege. Oder bezieht sich das Orakel auf das Jahr 14 n. Chr., als *Tiberius* auf dem Weg nach Illyrien von Boten nach Nola zurückgeholt wurde, damit er zur Stelle sei, wenn *Augustus* stürbe? Das von den Astragali vorausgesagte Glück ist auf alle Fälle eingetroffen.

** *ὁ κύβος* (kybos) = *Wirbelknochen, Würfel.* Bei den Römern hieß der sechsseitig beschriftete Würfel *tessera* (griechisches Fremdwort, abgeleitet von *τέσσαρες* = vier), wohl weil jede Seite viereckig ist.

*** frag. 438 N. – *Pausanias* (110–180) berichtet in seinem *Führer durch Griechenland* (II 20, 3), daß *Palamedes* die Würfel im Heiligtum der *Tyche* zu Argos weihte.

Ein idealer Würfel hat für alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Für seine Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt also die nebenstehende Tabelle.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Da hier die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, und da sich der bedeutende französische Mathematiker *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827)* vor allem mit solchen Zufallsexperimenten befaßte, wollen wir künftig einen idealen Würfel auch **Laplace-Würfel** (oder **L-Würfel**) nennen.

c) Die Münze. Das einfachste und wohl älteste Zufallsgerät ist die Münze, die vor allem bei Entscheidungen zwischen 2 Alternativen verwendet wird, z. B. bei der Seitenwahl im Fußballspiel. Solche scheibenförmigen Körper waren die Würfel der Indianer. Die beiden Seiten einer Münze haben unterschiedliche Namen wie Adler, Wappen, Kopf, Bild, Zahl usw.** Wir wollen sie durch die Symbole 0 und 1 unterscheiden. Für eine ideale Münze, die wir auch **Laplace-Münze** (oder **L-Münze**) nennen wollen, gilt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	0	1
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Bild 48.1
Bayerischer Guldentaler, geprägt 1560 unter Herzog *Albrecht V.* in München – Nachprägung der Stadtsparkasse München, 1980

Wirft man die Münze mehrmals, so liegt ein mehrstufiges Zufallsexperiment vor. Bei n-fachem Wurf besteht der Ergebnisraum dann aus den 2^n n-Tupeln, die man aus den Zahlen 0 und 1 bilden kann. Bei einer Laplace-Münze nehmen wir an, daß diese 2^n Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind. Damit hat jedes dieser Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$. Für den Fall $n = 3$ ergibt sich damit, wie Bild 26.1 veranschaulicht, die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	000	001	010	011	100	101	110	111
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

d) Das Glücksrad. Schon die griechische Glücksgöttin *Tyche* hatte ebenso wie die römische *Fortuna* ein Glücksrad als Attribut. Auf Jahrmärkten wurde einst genauso

* Siehe Seite 411.

** Die Griechen riefen »Nacht oder Tag« (*νὺξ ἢ ἡμέρα*), da sie eine schwarz-weiße Muschel verwendeten. Die Römer sagten »capita aut navia« (Kopf oder Schiff), weil der As auf der einen Seite einen doppelköpfigen Janus, auf der anderen einen Schiffsbug (oder -heck) zeigte. Die Franzosen rufen »pile ou face«.

wie heute bei Fernsehspielen das Glücksrad als Mittel zur Erzeugung zufälliger Ereignisse verwendet. Die einfachste Form ist eine in Sektoren eingeteilte Scheibe, über der sich ein Zeiger dreht oder die vor einem Zeiger gedreht wird (Figur 49.2). Soll ein Ergebnis a die Wahrscheinlichkeit p haben, so teilt man ihm einen Kreissektor zu, dessen Winkel $p \cdot 360°$ beträgt. Ein Beispiel zeigt Figur 49.3. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet:

ω	a	b	c	d
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

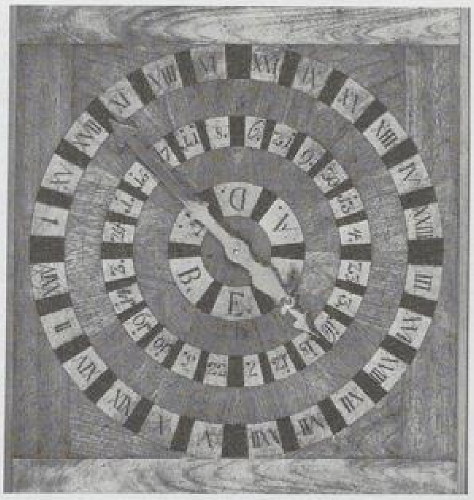


Bild 49.1 Glücksrad eines Spieltisches, Südwestdeutschland, 1780–1790. – Bayerisches Nationalmuseum

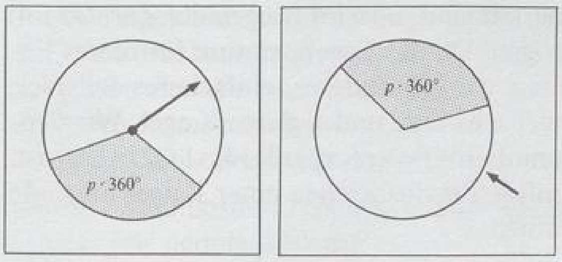


Fig. 49.2 Glücksräder

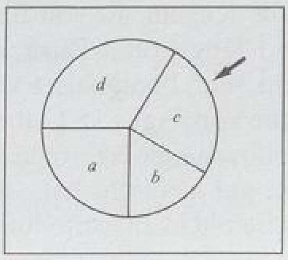


Fig. 49.3 Glücksrad mit 4 Ergebnissen

e) Das Roulett. Eine besondere Form des Glücksrades liegt beim Roulett vor. Die Kreisscheibe ist in 37 gleiche Sektoren aufgeteilt, der Zeiger durch eine rollende Kugel ersetzt.* Die Spielkasinos legen großen Wert darauf, daß die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, weil andernfalls routinierte Spieler aus den relativen Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeitsverteilung näherungsweise ermitteln und damit die Bank sprengen könnten. Ein ideales Roulett hat also folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	0	1	2	…	35	36
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$	…	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$

Aus dieser Verteilung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der Setzmöglichkeiten berechnen (vgl. dazu Seite 23). Im besonderen ergibt sich für die transversale pleine $\{16, 17, 18\}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{37} \approx 8{,}11\%$ und für das carre $\{4, 5, 7, 8\}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{37} \approx 10{,}81\%$, was mit den auf Seite 30 angegebenen relativen Häufigkeiten von 8,96% bzw. 10,69% recht gut übereinstimmt.

* Siehe Fußnote auf Seite 22.

Auf Grund der obigen Wahrscheinlichkeitsverteilung könnte man annehmen, daß man das 37fache seines Einsatzes von der Bank ausbezahlt bekommt, wenn die Zahl erscheint, auf die man gesetzt hat. In Wirklichkeit zahlt die Bank jedoch nur das 36fache des Einsatzes aus. In der Differenz liegt der Gewinn der Bank. Beim carré würde man eine Auszahlung von $\frac{37}{4}$ des Einsatzes erwarten; tatsächlich erhält man jedoch nur das $9(=\frac{36}{4})$fache des Einsatzes.

f) Die Urne*. In ein Gefäß, Urne genannt, wird eine Anzahl von Kugeln gegeben, die man durch Numerierung, Farbgebung oder andere Kennzeichen unterscheidet. Durch gründliches Mischen erreicht man, daß jede Kugel die gleiche Chance hat, gezogen zu werden. Man unterscheidet 2 Fälle. Beim *Ziehen mit Zurücklegen* wird jeweils eine bestimmte Anzahl von Kugeln gezogen und nach Feststellung ihrer Merkmale in die Urne zurückgegeben; der Urneninhalt bleibt also stets gleich. Beim *Ziehen ohne Zurücklegen* werden gewisse Anzahlen von Kugeln nacheinander gezogen und die gezogenen Kugeln nicht mehr zurückgelegt. Der Urneninhalt ändert sich nach jedem Zug. Das Ziehen ohne Zurücklegen kann auch durch gleichzeitige Entnahme mehrerer Kugeln ersetzt werden. Das bekannteste Beispiel für ein Urnenexperiment ist das Ziehen der Lottozahlen.** Die Urne enthält 49 Kugeln, die von 1 bis 49 numeriert sind. Es wird (wegen der Zusatzzahl) 7mal je 1 Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Da der Ergebnisraum für dieses Experiment sehr kompliziert ist, betrachten wir ein anderes, einfacheres Beispiel: Die Urne von Figur 15.1 enthält 4 rote, 3 schwarze und 1 grüne Kugel. Wir denken sie uns numeriert, so daß der Urneninhalt $\Omega = \{r1, r2, r3, r4, s1, s2, s3, g\}$ ist. Da man gut gemischt hat, ist es vernünftig, für das Ziehen einer Kugel folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung anzunehmen:

ω	r1	r2	r3	r4	s1	s2	s3	g
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Das Ereignis $R :=$ »Die gezogene Kugel ist rot« hat dann die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}P(R) &= P(\{r1, r2, r3, r4\}) = \\ &= P(\{r1\}) + P(\{r2\}) + P(\{r3\}) + P(\{r4\}) = \\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \\ &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ebenso erhält man $P(S) = \frac{3}{8}$ und $P(G) = \frac{1}{8}$.
Interessiert man sich nur für die Farbe der gezogenen Kugel, so wird man als gröberen Ergebnisraum $\Omega_1 = \{r, s, g\}$ wählen. Auf ihm wird man dann folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 festlegen:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

* Siehe Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.
** Siehe Fußnote auf Seite 38.

g) Zufallszahlen. Die praktische Durchführung von umfangreichen Zufallsexperimenten ist zeitraubend und mühsam. Es liegt daher nahe, Maschinen heranzuziehen und durch sie Zufallsexperimente simulieren zu lassen. Da Maschinen aber (zumindest in erster Näherung) deterministisch arbeiten, muß man durch geeignete Manipulationen den Zufall auf den Maschinenablauf einwirken lassen. Dazu bedient man sich vielfach der sogenannten Zufallszahlen.
Die häufigste Form der Angabe von Zufallszahlen ist eine »zufällige« Folge der Ziffern 0, 1, 2, …, 9. Eine solche Folge kann auf sehr unterschiedliche Art und Weise erzeugt werden:

1) Durch Werfen eines regulären Ikosaeders, bei dem je zwei der 20 kongruenten Dreiecksflächen dieselbe Ziffer tragen. (Bild 46.1)

2) Durch Werfen von Laplace-Münzen, wobei man sich die Zahlen im Dualsystem dargestellt denkt. Zur Beschreibung der Ziffern 0, 1, …, 9 braucht man dann vier Münzenwürfe. Man ignoriert dabei Ergebnisse, die größere Zahlen als 9 liefern.

Die Serie	1000	1100	1001	0000	1011	0111	…
liefert	8	(12)	9	0	(11)	7	…

Die eingeklammerten Zahlen werden ausgelassen.

3) Durch Beobachtung geeigneter physikalischer Vorgänge, wie etwa des radioaktiven Zerfalls oder des Rauschens bei Elektronenröhren.

4) Durch kompliziertere Rechenvorschriften, die von Computern durchgeführt werden. Die so erzeugten Zufallszahlen heißen auch *Pseudozufallszahlen.*

»Gute« Zufallsziffertabellen müssen gewissen grundlegenden Bedingungen genügen. Wir nennen hier nur:

a) Die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ziffern sollten annähernd gleich sein: $h_n(0) \approx h_n(1) \approx \ldots \approx h_n(9) \approx \frac{1}{10}$.

b) Die relativen Häufigkeiten von Ziffernpaaren sollten annähernd gleich sein: $h_n(00) \approx h_n(01) \approx \ldots \approx h_n(99) \approx \frac{1}{100}$.

c) Analoge Bedingungen müssen Ziffertripel, Ziffernquadrupel, … erfüllen.

Die Ziffernfolge 0123456789012345678901234567 … erfüllt zwar die Bedingung **a)** sehr gut, nicht jedoch **b).** Es handelt sich also um eine schlechte Zufallsziffernfolge. Die erste Tafel mit Zufallsziffern wurde 1927 von *L. H. C. Tippett** herausgegeben. Tabelle 51.1 stellt eine Zufallsziffertabelle dar. Wir benützen sie zur Simulation

* Siehe Seite 395.

29303	50239	68113	06637	71477	53278	77616	78451	36230	08744
41536	20293	43993	65405	59697	33598	24243	54559	12612	45753
82392	99099	10365	69655	89773	55477	72304	68448	06254	93337
08339	19494	25980	28251	38233	43304	27868	85128	39112	79556
96616	04710	08373	88895	22074	32739	62542	77638	74854	29157
94358	68251	17913	16911	76603	11509	11501	27659	03121	13064
32013	17227	12066	05395	50865	53147	27300	02028	74064	70668
73332	97384	33745	11844	30993	13119	45290	04112	85476	96622
76446	62235	67418	38514	98829	15874	18410	90854	14657	35810
36438	38361	52379	13231	69369	23736	38928	54449	14827	35610

Tab. 51.1 Zufallsziffern

des Zufallsexperiments »Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen« aus der in Abschnitt **f)** betrachteten Urne. Die Ziffern 0, 1, 2, 3 sollen den Zug einer roten Kugel bedeuten; die Ziffern 4, 5, 6 den einer schwarzen Kugel und schließlich die Ziffer 7 den Zug der grünen Kugel. Die Ziffern 8 und 9 werden ignoriert.
Unsere Tafel beginnt mit 2930350239 …
Dadurch werden folgende Züge simuliert: r,–,r,r,r,s,r,r,r,–, … Die Auswertung der ersten 100 brauchbaren Ziffern ergibt die Häufigkeitsverteilung

ω	r	s	g
$h_{100}(\{\omega\})$	0,49	0,39	0,12

Dies ist eine sehr gute Annäherung an die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 von Abschnitt **f)**:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	0,50	0,375	0,125

Mit Hilfe von Zufallsziffern lassen sich auch allgemeinere numerische Probleme der Mathematik lösen, indem man eine geeignete Simulation durchführt. Erst nachdem es mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen möglich wurde, große Zahlenmengen zu verarbeiten, gewannen solche Verfahren Bedeutung. Seit 1949 bezeichnet man sie auch als *Monte-Carlo-Methode*, als deren eigentliche Begründer der ungarische Mathematiker *John v. Neumann* (1903–1957)** und der polnische Mathematiker *Stanisław Marcin Ulam* (1909–1984)* gelten. Ein Vorläufer dieser Methode ist das Verfahren zur Bestimmung der Zahl π nach *Buffon* (1707–1788)*** das wir im Anhang I darstellen (siehe Seite 386).

Eine wichtige Anwendung der Monte-Carlo-Methode ist heute die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale, die als Flächen- oder Rauminhalt gedeutet werden können.
Als einfaches Beispiel betrachten wir den Viertelkreis um 0 mit dem Radius $r = 1$. Die Anzahl N der Gitterpunkte im Viertelkreis wird geschätzt durch die Anzahl $\hat{N}$ der Punkte $(x|y)$ mit $x^2 + y^2 < 1$, wobei x und y aus der Zufallszifferntabelle genommen werden.
Geht man ganz grob vor, so kann man etwa $x = 0,i$ und $y = 0,j$ setzen; i und j sind dabei jeweils aufeinanderfolgende Ziffern aus der Zufallszifferntabelle von Tabelle 51.1. Die ersten 50 Zufallsziffern ergeben die folgenden 25 Zufallspunkte, die in der nachstehenden Tabelle und in Figur 53.1 dargestellt sind.
Das ergibt als Schätzung $\hat{N} = \frac{22}{25} \cdot 100 = 88$. Der wirkliche Wert läßt sich hier noch leicht mit Hilfe von Figur 53.2 abzählen zu 86.
Eine grobe Schätzung des Inhalts des Viertelkreises erhält man durch das Verhältnis der Anzahl N der Gitterpunkte im Viertelkreis zur Anzahl aller solcher Gitterpunkte im Einheitsquadrat (hier 100).

$A_{\text{Viertelkreis}} \approx \frac{N}{100} \approx \frac{\hat{N}}{100} = 0{,}88.$

* Siehe Seite 395 ** Siehe Seite 416 *** Siehe Seite 401

x	y	$x^2 + y^2$	im Viertelkreis?
0,2	0,9	0,85	ja
0,3	0,0	0,09	ja
0,3	0,5	0,34	ja
0,0	0,2	0,04	ja
0,3	0,9	0,90	ja
0,6	0,8	1,00	nein
0,1	0,1	0,02	ja
0,3	0,0	0,09	ja
0,6	0,6	0,72	ja
0,3	0,7	0,58	ja
0,7	0,1	0,50	ja
0,4	0,7	0,65	ja
0,7	0,5	0,84	ja
0,3	0,2	0,13	ja
0,7	0,8	1,20	nein
0,7	0,7	0,98	ja
0,6	0,1	0,37	ja
0,6	0,7	0,85	ja
0,8	0,4	0,80	ja
0,5	0,1	0,26	ja
0,3	0,6	0,45	ja
0,2	0,3	0,13	ja
0,0	0,0	0,00	ja
0,8	0,7	1,20	nein
0,4	0,4	0,32	ja

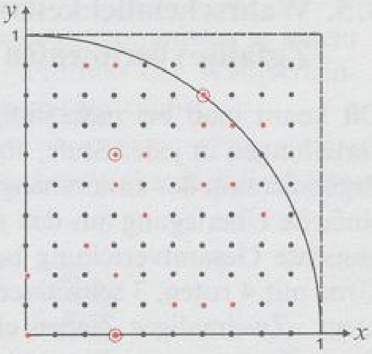


Fig. 53.1 Lage der 25 Zufallspunkte

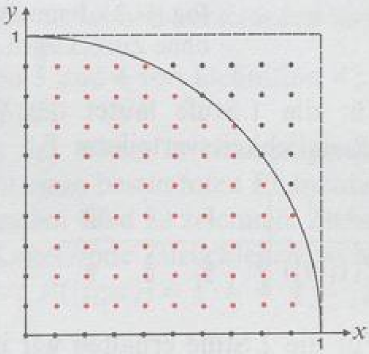


Fig. 53.2 Zehntelgitterpunkte im Viertelkreis

Die Schätzung von N läßt sich verbessern, wenn man die Anzahl der Zufallspunkte vermehrt, d.h. in der Zufallszifferntabelle weitergeht. Die Schätzung der Fläche des Viertelkreises kann man dadurch verbessern, daß man ein feineres Gitternetz zugrunde legt, indem man etwa 2 oder mehr Dezimalstellen für die Koordinaten der Gitterpunkte verwendet. Das Verfahren kann dann auch als ein Schätzverfahren für π verwendet werden.
Unsere sehr grobe Schätzung liefert
$\frac{r^2\pi}{4} = \frac{1^2 \cdot \pi}{4} \approx 0{,}88$ und damit $\pi \approx 3{,}52$.

Mit dem Zufallsziffterngenerator eines Computers erzeugten wir einen »Zufallsregen« von 1000 Punkten auf das Einheitsquadrat. Davon fielen 776 in den Viertelkreis (Bild 53.3). Das ergibt $\frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi \approx \frac{776}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \approx 3{,}104$.

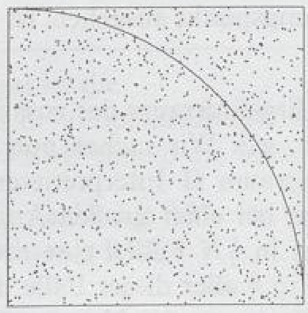
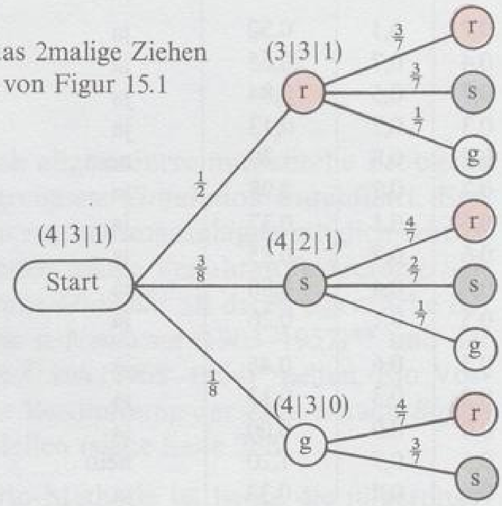


Bild 53.3 Computer-Graphik »Zufallsregen auf das Einheitsquadrat« zur angenäherten π-Bestimmung

5.5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Oft kennt man bei mehrstufigen Zufallsexperimenten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in jeder Stufe, aber nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments. Man kann jedoch durch eine einfache Überlegung aus den gegebenen Verteilungen in den einzelnen Stufen die gesuchte Gesamtverteilung berechnen. Als Beispiel hierfür betrachten wir eine Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und 1 grünen Kugel (Figur 15.1) und das Experiment »Zweimaliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen«. Wir schreiben im Baumdiagramm von Figur 16.3 die Wahrscheinlichkeiten jeder Stufe auf die Äste und erhalten so Figur 54.2.

Fig. 54.2 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1



Für die 1. Stufe lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Für die 2. Stufe erhalten wir in Abhängigkeit vom Ergebnis des 1. Zuges, also der 1. Stufe des Experiments, 3 verschiedene Verteilungen:

ω	r	s	g
$P_r(\{\omega\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

ω	r	s	g
$P_s(\{\omega\})$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

ω	r	s
$P_g(\{\omega\})$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Man erkennt:

> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

Der Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments ist $\Omega = \{\text{rr, rs, rg, sr, ss, sg, gr, gs}\}$. Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung P für diesen Ergebnisraum Ω. Interpretieren wir die Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten bei einer großen Anzahl N von Versuchen, so erwarten wir, daß beim 1. Zug in $\frac{1}{2}N$ Fällen eine rote Kugel gezogen wird. Der darauf folgende 2. Zug wird in $\frac{3}{7}$ aller dieser Fälle, also in $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}N$ Fällen, wieder eine rote Kugel liefern. Es ist also vernünftig, das Produkt $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$ als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\text{rr}\}$ anzunehmen. Diese Überlegung* führt uns zur

* Einen Beweis ohne Rückgriff auf die Interpretationsregel bringen wir in **9.2**.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.

Mit dieser 1. Pfadregel gewinnen wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung P folgende Werte:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P(\{\omega\})$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$

Da alle $P(\{\omega\}) \in [0;1]$ sind und die Summe all dieser Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt, sind Forderung **1** und **2** von Definition 42.1 erfüllt. Legt man noch zusätzlich $P(\emptyset) := 0$ und $P(A) := \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, die von $\emptyset$ verschieden sind, fest, dann erfüllt P auch die restlichen Forderungen **3** und **4** von Definition 42.1, also ist P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.
Hat ein Experiment mehrere Stufen, so wuchert der Baum in beängstigender Weise. Will man jedoch nur die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Elementarereignisses kennen, so genügt es, den dorthin führenden Pfad zu zeichnen. Ziehen wir z. B. aus der oben genannten Urne 4mal eine Kugel ohne Zurücklegen, so hat die Wahrscheinlichkeit für den Zug rgsr den Wert $P(\{\text{rgsr}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{140}$, wie Figur 55.1 zeigt.

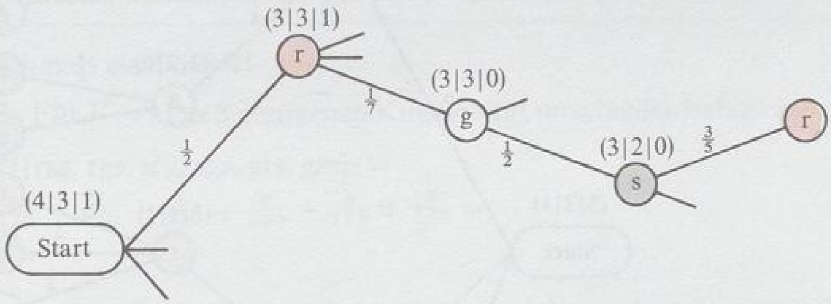


Fig. 55.1 Ausschnitt aus dem Baumdiagramm zum Experiment »4maliges Ziehen einer Kugel aus der Urne von Figur 15.1 ohne Zurücklegen«

Eine besonders wichtige Anwendung der 1. Pfadregel ist die
Drei-Mindestens-Aufgabe: Wie oft muß man einen L-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* einmal die Sechs fällt?

Lösung: $P(\text{»Bei } n \text{ Würfen mindestens 1mal die Sechs«}) \geqq 0{,}98$

$\Leftrightarrow \; 1 - P(\text{»Bei } n \text{ Würfen keinmal die Sechs«}) \geqq 0{,}98$

$\Leftrightarrow \; 1 - (\frac{5}{6})^n \geqq 0{,}98$ Siehe Figur 56.1.

$\Leftrightarrow \; (\frac{5}{6})^n \leqq 0{,}02$ Da lg echt monoton steigend:

$\Leftrightarrow \; n \cdot \lg \frac{5}{6} \leqq \lg 0{,}02$ $\quad \| : \lg \frac{5}{6} < 0$

$$\Leftrightarrow \; n \geqq \frac{\lg 0{,}02}{\lg \frac{5}{6}} = 21{,}4\ldots \;\Rightarrow\; n_{\min} = 22.$$

Man muß also einen L-Würfel mindestens 22mal werfen, um mit einer Sicherheit von mindestens 98% mindestens einmal die Sechs zu erhalten.

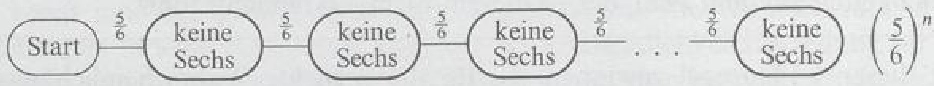


Fig. 56.1 Zur Drei-Mindestens-Aufgabe

Auf Grund der Eigenschaft **4** von Definition 42.1 können wir nun die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnen. Dazu betrachten wir das folgende

Beispiel 1: Eine Urne enthalte 3 rote, 2 schwarze und 1 grüne Kugel. Wir ziehen 3 Kugeln ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel rot? Anhand eines Baumdiagramms stellen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung fest (Figur 56.2).

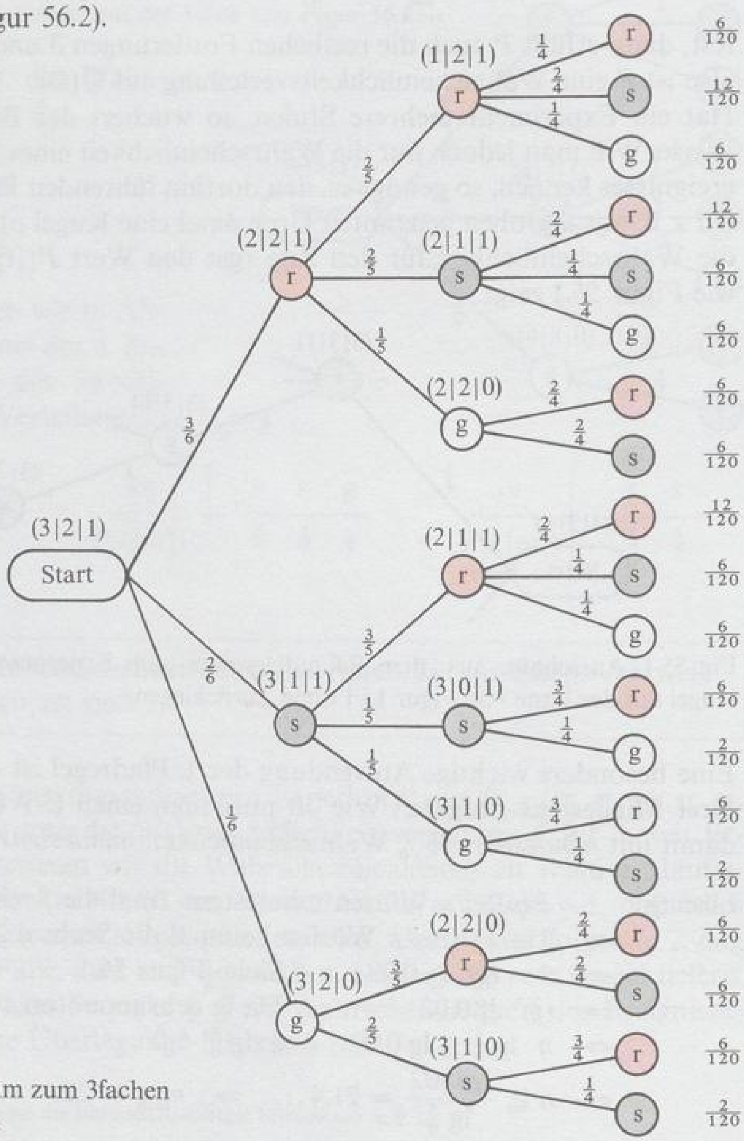


Fig. 56.2 Baumdiagramm zum 3fachen Ziehen ohne Zurücklegen

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit errechnet sich nun unter Verwendung von **4** aus Definition 42.1 zu
P(»3. gezogene Kugel ist rot«) =

$$= P(\{\text{rrr, rsr, rgr, srr, ssr, sgr, grr, gsr}\}) =$$
$$= P(\{\text{rrr}\}) + P(\{\text{rsr}\}) + P(\{\text{rgr}\}) + P(\{\text{srr}\}) + P(\{\text{ssr}\}) + P(\{\text{sgr}\}) +$$
$$+ P(\{\text{grr}\}) + P(\{\text{gsr}\}) =$$
$$= \tfrac{6}{120} + \tfrac{12}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{12}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} =$$
$$= \tfrac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die dritte gezogene Kugel rot ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die erste gezogene Kugel rot ist. Das ist zunächst verwunderlich. Man bedenke aber, daß man alle Möglichkeiten für die ersten beiden Züge berücksichtigen muß, die ja ganz beliebig ausfallen können!
Zusammenfassend halten wir fest, wie man Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit Hilfe eines Baumdiagramms berechnen kann. Jeder Pfad in einem Baum ist bekanntlich ein Elementarereignis des mehrstufigen Zufallsexperiments. Jedes Ereignis ist eine Vereinigungsmenge von Elementarereignissen, also eine Menge von Pfaden. Somit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe der

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die dieses Ereignis bilden.

Dafür nochmals ein Beispiel.

Beispiel 2: Für $V :=$ »Die 3 gezogenen Kugeln sind verschiedenfarbig« erhalten wir

$$P(V) = P(\{\text{rsg, rgs, srg, sgr, grs, gsr}\}) =$$
$$= \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} =$$
$$= \tfrac{3}{10}.$$

Aufgaben

Zu 5.1.

1. Was bedeutet
   a) $P(E_1 \cup E_2)$ • b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$ • c) $P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)$?
2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; $P(\{\omega_1\}) = 0{,}2$; $P(\{\omega_2\}) = 0{,}7$.
   Lege $P(\{\omega_3\})$ so fest, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ wird. Gib dann die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ an.
3. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$; $E_1 := \{\omega_1, \omega_2\}$; $E_2 := \{\omega_3\}$; $E_3 := \{\omega_4\}$;
   $P(E_1) = 0{,}2$; $P(E_2) = 0{,}5$; $P(E_3) = 0{,}5$.

a) Begründe, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht zulässig ist.
b) Ändere $P(E_3)$ so ab, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung zulässig ist.
c) Berechne $P(\{\omega_1\})$ unter der Voraussetzung, daß ω_1 mit einer dreimal so großen Wahrscheinlichkeit auftritt wie ω_2.

4. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$; $P(\{\omega_1\}) = 0{,}2$; $P(\{\omega_2\}) : P(\{\omega_3\}) : P(\{\omega_4\}) = 1:2:7$;
$E_1 := \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$; $E_2 := \{\omega_1, \omega_3\}$.
a) Berechne $P(\{\omega_i\})$; $i = 2, 3, 4$. **b)** Berechne $P(E_1)$ und $P(E_2)$.
c) Berechne $P(E_1 \cup E_2)$. **d)** Berechne $P(E_1 \cap E_2)$. **e)** Berechne $P(\bar{E}_2)$.

Zu 5.2.

5. a) Berechne aus den ersten 100 Würfen von Tabelle 10.1 die relativen Häufigkeiten $h_{100}(\{1\}), h_{100}(\{2\}), \ldots, h_{100}(\{6\})$.
b) Nimm diese errechneten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten eines stochastischen Modells für den einfachen Wurf mit dem für Tabelle 10.1 verwendeten Würfel. Damit ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung festgelegt. Berechne in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse
$A :=$ »Die Augenzahl ist gerade«,
$B :=$ »Die Augenzahl ist prim« und
$C :=$ »Die Augenzahl ist mindestens 3«.
c) Überprüfe die erhaltenen Wahrscheinlichkeiten durch Berechnung der relativen Häufigkeiten $h_{100}(A)$, $h_{100}(B)$ und $h_{100}(C)$, die sich bei den nächsten 100 Würfen aus Tabelle 10.1 ergeben. Ist das Modell deiner Meinung nach brauchbar?

6. Interpretiere folgende Formulierungen durch Wahrscheinlichkeiten (im Modell) bzw. durch relative Häufigkeiten (in der Realität).
a) Bei einem bestimmten Würfel ist die Chance, eine gerade Augenzahl zu werfen, genauso groß wie die einer Primzahl.
b) Es ist wahrscheinlicher, daß A eintritt als daß $\bar{A}$ eintritt.
c) Wirbelwind ist der Favorit bei einem Rennen, bei dem 23 Pferde starten.
Zusatz: Wie groß ist mindestens die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis »Wirbelwind gewinnt«?

Zu 5.3.

7. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung P bei einem einfachen Würfelwurf gelte die im Beispiel auf Seite 42 angegebene Wertetabelle.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$A :=$ »Die Augenzahl ist nicht prim«,
$B :=$ »Die Augenzahl ist kleiner als 4«,
$C :=$ »Die Augenzahl ist nicht 6«,
$D :=$ »Die Augenzahl ist ungerade«,
$E :=$ »Die Augenzahl ist sowohl prim als auch gerade«,
$F :=$ »Die Augenzahl ist gerade oder prim«,
$G :=$ »Die Augenzahl ist entweder gerade oder prim«.
b) Gib alle Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit kleiner als 35,0% ist.

8. Bei einem einfachen Würfelwurf mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist bekannt, daß P(»Augenzahl ist prim«) = 55% und $P(\{1,6\}) = 30\%$ sind.
a) Berechne $P(\{4\})$. Erstelle auch eine Vierfeldertafel.
b) Für welche weiteren Elementarereignisse lassen sich die Wahrscheinlichkeiten noch berechnen, wenn man zusätzlich weiß, daß P (»Augenzahl ist ungerade«) = 25% und P (»Augenzahl ist nicht 6«) = 80% sind? Erstelle auch hierzu eine Mehrfeldertafel.

9. Ein Verein hat gegen einen gleichwertigen Verein ein Pokalspiel auszutragen. Sieg oder Niederlage können daher als gleichwahrscheinlich angesehen werden. Ein Unentschieden führt zu einer Verlängerung, die vielfach eine Entscheidung bringt. Wir nehmen daher an, daß ein Unentschieden trotz Verlängerung nur in $\frac{1}{10}$ aller Pokalspiele auftritt.
a) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Verein A gewinnt?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Verein A nicht verliert?

10. Hans hat drei Freunde, Anton, Benno und Christian. Anton besucht Hans doppelt so oft wie Benno. Christian dagegen besucht ihn nur halb so oft wie Benno. Hans hört das unter ihnen vereinbarte Klingelzeichen an der Türe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es
a) Benno, **b)** Anton, **c)** Christian, **d)** Anton oder Benno,
wenn Hans weiß, daß 2 Freunde nie gleichzeitig kommen?

11. Zu einer Wahl stellen sich die drei Kandidaten Huber, Müller und Schmid. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Sieg sind beziehungsweise $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{15}$ und $\frac{1}{5}$.
a) Gib einen brauchbaren Ergebnisraum an.
b) Gib die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ereignisse an.

12. Eine **Wette** heiße **fair**, wenn die Einsätze sich wie die Gewinn-Wahrscheinlichkeiten verhalten. Ein Mann stellt fest, daß in 80% aller Fälle, in denen er eine bestimmte Kreuzung erreicht, die Ampel auf Rot steht. Er wettet mit seinem Beifahrer, daß sie diese Kreuzung wieder bei Rot erreichen werden. Wie sind die Einsätze für eine faire Wette?

13. A behauptet, morgen wird es regnen. Er bietet B eine Wette mit 7 : 5 an. Wie groß muß die Wahrscheinlichkeit sein, daß es morgen regnen wird, wenn die Wette fair sein soll?

14. Herr Huber wettet mit Herrn Meier bei einem Pferderennen auf den Sieg von Alpha 2:3 (3:2) und auf den Sieg von Beta 4:3 (3:4). Wie müßte eine faire Wette auf den Sieg von Alpha oder Beta aussehen, wenn man annimmt, daß die beiden angebotenen Wetten fair sind? (Die Wahrscheinlichkeit für ein totes Rennen sei 0).

Zu 5.4.

Um den Arbeitsaufwand erträglicher zu machen, empfiehlt sich Gruppenarbeit.

•15. Teste Tabelle 51.1. *(Sehr mühsam!)*
a) Bestimme die relativen Häufigkeiten jeder Ziffer.
b) Die 1000 Zufallsziffern kann man zu 500 Paaren zusammenfassen. Bestimme die relative Häufigkeit für jedes der 100 möglichen Paare 00, 01, …, 98, 99.

16. Bestimme zur Figur 53.1 zusätzlich zu den 25 bereits aufgeführten Zufallspunkten die 75 folgenden an Hand von Tabelle 51.1. Berechne damit den Schätzwert $\hat{N}$ sowie Schätzwerte für die Fläche des Viertelkreises und für die Zahl π.

•17. Schätze den Flächeninhalt des Viertelkreises und den Wert der Zahl π mit Hilfe von 100 Zufallspunkten des Hundertstelgitternetzes. Fasse dazu jeweils 4 aufeinanderfolgende Ziffern der Tabelle 51.1 zu $a_1 a_2 b_1 b_2$ zusammen. Der Gitterpunkt hat dann die Koordinaten $x = 0, a_1 a_2$ und $y = 0, b_1 b_2$.

18. Schätze durch 100 Zufallspunkte des Zehntelgitternetzes die Fläche von $\triangle ABC$ mit $A(0|0)$, $B(1|0)$ und $C(1|1)$.

19. Simuliere den Münzenwurf mit Hilfe der Zufallszahlentabelle (Tabelle 51.1) in folgender Weise: ungerade Ziffer ≙ Adler, gerade Ziffer ≙ Zahl. Bestimme die relativen Häufigkeiten nach 100 Würfen.

20. Simuliere den Würfelwurf mit Hilfe der Zufallszahlentabelle nach Tabelle 51.1. Die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 entsprechen den Augenzahlen, die Ziffern 7, 8, 9 und 0 werden ignoriert. Berechne die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen nach 100 Würfen.

Zu 5.5.

21. Bestimme mit Hilfe eines Baumdiagramms und der 1. Pfadregel die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Urne von Figur 15.1 für das Zufallsexperiment
a) zweimaliges Ziehen mit Zurücklegen, •**b)** dreimaliges Ziehen ohne Zurücklegen.

22. Berechne wie in Figur 55.1 die Wahrscheinlichkeit für die Zugfolgen rrrr, rsss, rsgr, grsr, grrs und grsg beim Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1.

23. Zeichne den Baum für den 3fachen Münzenwurf und bestimme damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

24. Wurde in Rom mit 3 tesserae (= sechsseitig beschrifteten Würfeln) gespielt, so galt 666 als bester Wurf, der »iactus Veneris« = »Venuswurf« hieß. Schlechtester Wurf war 111 = canis = Hund*. Zeichne die zugehörigen Pfade und bestimme die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse unter der Annahme, daß die verwendeten tesserae Laplace-Würfel sind.

25. Beim Würfeln mit 4 Astragali war der schlechteste Wurf »Hund« (*κύων*, canis)* das Ergebnis 1111. Der beste Wurf »Aphrodite« (*Ἀφροδίτης βόλος*, iactus Veneris) war das Auftreten aller 4 möglichen Seiten, z.B. das Ergebnis 6314. Am seltensten trat 6666 auf, dessen Namen wir nicht kennen. Ein Wurf, bei dem die Augensumme den Wert 8 ergab, war nach dem griechischen Dichter *Stesichoros* (630–555) benannt, weil sein Grabmal in Himera achteckig war.

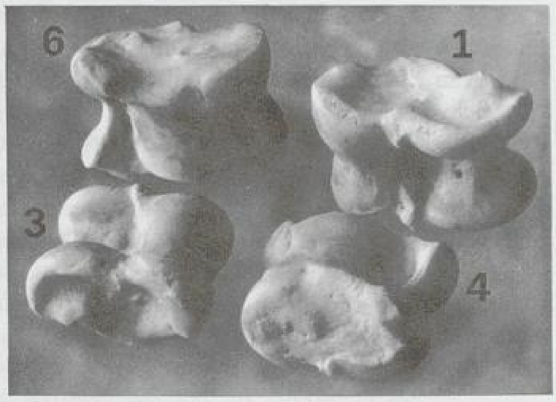


Bild 60.1 Ein »Aphrodite«-Wurf (Vgl. auch Bild 28.1.) Angegeben sind die Werte der *oben* liegenden Flächen.

a) Zeichne die zu »Hund« und 6666 führenden Pfade und berechne P(»Hund«) und $P(\{6666\})$ für 4 Astragali mit gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung.
b) Zeichne einen Pfad, der zum Aphrodite-Wurf 6314 führt und berechne $P(\{6314\})$.
•**c)** Aus welchen Ergebnissen besteht das Ereignis »Aphrodite«? Warum sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, deren Vereinigung »Aphrodite« ergibt, selbst für jeweils 4 fest gewählte Astragali meist nicht gleich? Wie groß ist P(»Aphrodite«) aber in dem Fall, daß alle 4 Astragali die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen?
•**d)** Berechne P(»Stesichoros«) für Astragali mit gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung.

26. Florian geht aufs Oktoberfest. Er möchte sich dort am Schießstand eine Rose erschießen. Nüchtern hat er eine Treffsicherheit von 80%. Nach jeder Maß Bier sinkt seine Treffsicherheit um die Hälfte.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er mindestens einmal treffen,
1) wenn er dreimal schießt, und zwar einmal nüchtern, einmal nach der 1. und einmal nach der 2. Maß,
2) wenn er sechsmal schießt, und zwar einmal nüchtern, zweimal nach der 1. Maß und dreimal nach der 2. Maß?

* Davon soll unsere Redewendung »Auf den Hund kommen« herrühren.

b) Wie oft muß er mindestens schießen, um mit mindestens 99% Sicherheit mindestens einmal zu treffen,

1) wenn er noch nüchtern ist,

2) wenn er eine Maß getrunken hat,

3) wenn er zwei Maß getrunken hat?

27. Ein Affe sitzt vor einer Schreibmaschine, deren Tastatur lediglich die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets enthält. Er schlägt wahllos 10mal auf eine Taste. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt er das Wort *STOCHASTIK*?

28. Urne 1 enthält 4 Kugeln, die die Nummern 1, 2, 6 und 9 tragen. Urne 2 enthält diese Kugeln doppelt, Urne n enthält sie n-fach. Theodor zieht nacheinander 4 Kugeln ohne Zurücklegen aus jeder dieser Urnen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stellt das gezogene Quadrupel

1) das Geburtsjahr von *Christiaan Huygens*,

2) das Todesjahr von *Blaise Pascal* dar?

•**b)** Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich, wenn die 4 Kugeln nach Beendigung des Ziehens noch umgeordnet werden dürfen?

c) Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich bei **a)** und **b)** für $n \to \infty$?

29. Berechne im Beispiel 1 aus **5.5.** (Seite 56) die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) daß die zweite gezogene Kugel rot ist,

b) daß die ersten beiden gezogenen Kugeln verschiedenfarbig sind,

c) daß die erste und dritte gezogene Kugel gleichfarbig sind,

d) daß die erste oder dritte gezogene Kugel grün ist,

e) daß die zweite Kugel grün oder die dritte Kugel rot ist.

30. Aus der Urne im Beispiel 1 (Seite 56) zieht man 3 Kugeln mit Zurücklegen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

$A :=$ »Die dritte gezogene Kugel ist rot«,

$B :=$ »Die 3 gezogenen Kugeln sind verschiedenfarbig«,

$C :=$ »Die zweite gezogene Kugel ist rot«,

$D :=$ »Die ersten beiden gezogenen Kugeln sind verschiedenfarbig«,

$E :=$ »Die erste und dritte gezogene Kugel sind gleichfarbig«,

$F :=$ »Die erste oder dritte gezogene Kugel ist grün«,

$G :=$ »Die zweite Kugel ist grün, oder die dritte Kugel ist rot«.

31. Eine 1-DM-Münze, von der wir annehmen wollen, daß es sich um eine L-Münze handelt, werde 3mal geworfen. Liegt die Eins oben, so werten wir den Wurf als 1, andernfalls als 0.

a) Zeichne einen Baum.

b) Ein mögliches Ergebnis ist 101; ihm ordnen wir die Summe $1 + 0 + 1 = 2$ zu. Welche möglichen Summen treten auf? Berechne die Wahrscheinlichkeit jeder Summe.

•**32.** Löse Aufgabe **31** für den 4fachen Münzenwurf.

33. Auf einer Weihnachtsfeier eines Vereins wird eine Tombola veranstaltet. Im Glückshafen liegen 4 Gewinnlose und 16 Nieten.

a) Theodor zieht 2 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens ein Gewinnlos zu ziehen?

b) Wie viele Lose muß Theodor mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% (100%) mindestens ein Gewinnlos zu ziehen?

34. Für eine Faschingseinladung hat Dorothea 18 Krapfen gebacken. 6 davon sind mit Senf statt mit Marmelade gefüllt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Krapfen ein Senfkrapfen?

b) Dorothea arrangiert die Krapfen auf 3 Tellern zu sechst so, daß auf dem ersten Teller ein Senfkrapfen, auf dem zweiten zwei und auf dem dritten die restlichen liegen. Theodor wählt einen Teller und dann einen der darauf liegenden Krapfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beißt er in einen Senfkrapfen?

c) Wie muß Dorothea die 18 Krapfen auf die 3 Teller verteilen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Theodor in einen Senfkrapfen beißt, möglichst groß wird, falls Theodor seine Auswahl wie in **b)** trifft?

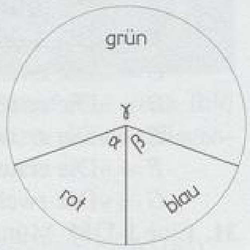
35. In einer Wurfbude stehen in einer Reihe abwechselnd große und kleine Eimer. Man darf 3 Bälle auf 3 verschiedene Eimer werfen, wobei man abwechselnd auf groß und klein zielen muß, und erhält einen Preis, wenn man in
a) zwei benachbarte, **b)** drei benachbarte Eimer trifft.
Theodor trifft einen großen Eimer mit der Wahrscheinlichkeit a, einen kleinen mit der Wahrscheinlichkeit b; dabei ist $b < a$. Soll er zuerst auf einen großen oder auf einen kleinen Eimer werfen?

36. In einem Bus sitzt eine Reisegruppe von 20 Personen. Zwei Personen haben Schmuggelware bei sich, einer dieser Schmuggler ist Herr Anton. Ein Zollbeamter ruft der Reihe nach 3 Personen zur Kontrolle aus dem Bus heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er
a) Herrn Anton, **b)** mindestens einen der Schmuggler, **c)** beide Schmuggler bei dieser Kontrolle entdeckt?
Zeichne dazu ein Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten auf den Pfaden.

37. In einer Gruppe sind 5 Franzosen, 10 Briten und 6 Deutsche. Zwei Personen werden ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau ein Brite ausgelost wird?

38. Aus der Gruppe von Aufgabe **37** werde zunächst eine Person ausgelost. Die zweite Person wird dann aus den Personen anderer Nationalität ausgelost. Wie wahrscheinlich ist unter den Ausgelosten ein Brite?

39. Ein Glücksrad besteht aus 3 verschiedenfarbigen Sektoren, von denen mindestens zwei gleich groß sind (Figur 62.1). Wie müssen die Winkel gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei zweimaligem Drehen beide Male dieselbe Farbe erhält, gerade 50% ist?



Figur 62.1

40. Theodor wirft 4 Würfel und wettet gegen Dorothea, daß mindestens zwei der Würfel gleiche Augenzahl zeigen. Wie müssen sich die Einsätze verhalten, damit die Wette fair ist?

41. Dorothea und Theodor vereinbaren folgendes Spiel. Dorothea wählt die Ziffernkombination 110, Theodor hingegen 101. Dann wird eine Laplace-Münze mit den Seiten 0 und 1 **a)** 3mal **b)** 4mal geworfen. Gewonnen hat derjenige, dessen Kombination zuerst auftritt. Tritt keine der gewählten Kombinationen auf, so ist das Spiel unentschieden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Dorothea, mit welcher Wahrscheinlichkeit Theodor? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden?