Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

6. Additionssätze für Wahrscheinlichkeiten

6. Additionssätze für Wahrscheinlichkeiten

Fortuna (Plakettenmodell, 4,5 × 6,9 cm), *Joachim Forster* (um 1500–1579) zugeschrieben, Augsburg (?), um 1530–1540. – Museum für Kunst und Gewerbe Hamburg

6. Additionssätze für Wahrscheinlichkeiten

Für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier unvereinbarer Ereignisse A und B, d.h. $A \cap B = \emptyset$, gilt die Summenformel

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Für mehr als 2 paarweise unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt eine analoge Summenformel.

Satz 64.1: Sind je 2 der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unvereinbar, so gilt

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

kurz:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Beweis: Mit $A := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ (siehe Figur 64.1) gilt auf Grund von Definition 42.1

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) =$$

$$= \sum_{\omega \in A_1} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in A_2} P(\{\omega\}) + \ldots +$$

$$+ \sum_{\omega \in A_n} P(\{\omega\}) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

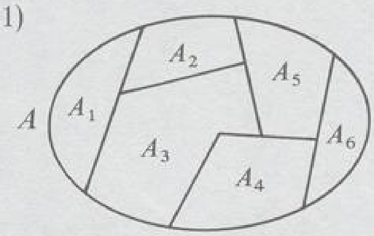

Fig. 64.1 A als Oder-Ereignis paarweise unvereinbarer Ereignisse A_i

Wie berechnet sich nun aber die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »A oder B«, wenn A und B nicht unvereinbar sind, d.h. $A \cap B \neq \emptyset$? Für die relativen Häufigkeiten haben wir das Problem bereits gelöst. Eigenschaft (5) auf Seite 36 besagt:

$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$.

Auf Grund der Interpretationsregel (vgl. Seite 44) erwarten wir eine analoge Formel für die Wahrscheinlichkeiten. Tatsächlich gilt

Satz 64.2: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beweis: Aus Figur 64.2 erhält man mit Satz 44.3

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ und
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Fig. 64.2 Mehrfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten

$$P(A)+P(B)=P(A\cap B)+\underbrace{P(A\cap \bar{B})+P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)}_{P(A\cup B)}$$

Komplizierter wird es, wenn man die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von mehr als zwei Ereignissen berechnen will, die nicht paarweise unvereinbar sind. Eine Formel für $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)$ hat der englische Mathematiker *J. J. Sylvester* (1814–1897) entwickelt.*
Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns zunächst auf 3 Ereignisse.

Satz 65.1: Formel von *Sylvester* für $n=3$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+ \\ +P(A\cap B\cap C)$$

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Figur 65.1 gilt einerseits

$$P(A\cup B\cup C)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7.$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=\\ =(p_1+p_2+p_3+p_4)+(p_1+p_3+p_5+p_7)+(p_3+p_4+p_5+p_6)-\\ -(p_1+p_3)-(p_3+p_4)-(p_3+p_5)+p_3=\\ =p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7.\end{aligned}$$

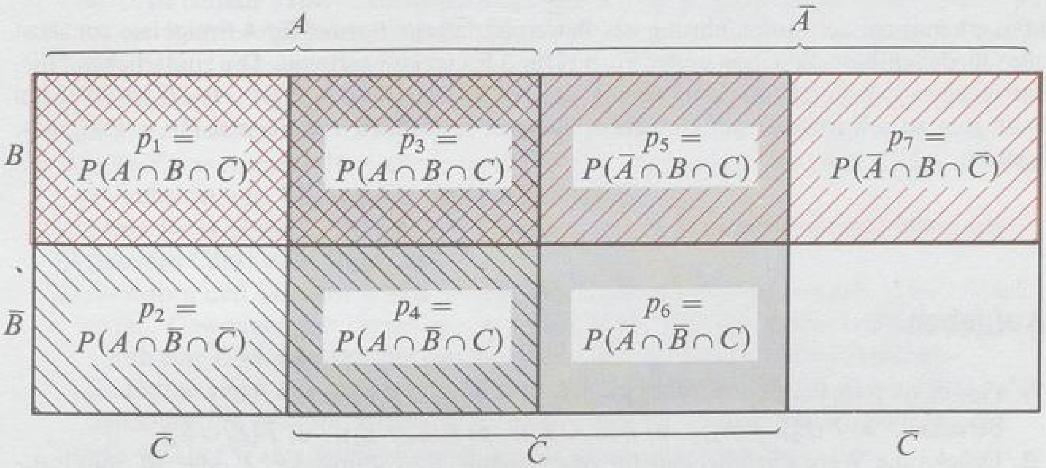

Fig. 65.1 Mehrfeldertafel für 3 Ereignisse

Für mehr als 3 Ereignisse läßt sich die Formel von *Sylvester* nur sehr unübersichtlich schreiben, obwohl das Prinzip, nach dem sie aufgebaut ist, recht einfach ist.

* Die Formel von *Sylvester* heißt manchmal auch *Siebformel* oder *Ein- und Ausschaltformel*. Siehe auch Seite 424.

Allgemein gilt

Satz 66.1: Formel von *Sylvester*.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, wie man unter Verwendung der Gesetze der Mengenalgebra aus der Formel von *Sylvester* für 3 Ereignisse (Satz 65.1) die Formel für 4 Ereignisse gewinnt.

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C \cup D) = P([A \cup B \cup C] \cup D) = \\
&= P(A \cup B \cup C) + P(D) - P([A \cup B \cup C] \cap D) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(D) - \\
&\quad - P((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - \{P(A \cap D) + \\
&\quad + P(B \cap D) + P(C \cap D) - P((A \cap D) \cap (B \cap D)) - P((A \cap D) \cap (C \cap D)) - \\
&\quad - P((B \cap D) \cap (C \cap D)) + P((A \cap D) \cap (B \cap D) \cap (C \cap D))\} = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap D) - \\
&\quad - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - \\
&\quad - P(A \cap B \cap C \cap D) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - \\
&\quad - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + \\
&\quad + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D).
\end{aligned}$$

Man erkennt bei der Durchführung des Beweises, daß die Formel für 4 Ereignisse zunächst alle Glieder enthält, die schon in der Formel für 3 Ereignisse auftreten. Die zusätzlichen Glieder ergeben sich durch die Umformung des Ausdrucks $P(D) - P([A \cup B \cup C] \cap D)$. Man kann nun so schrittweise weitermachen, bis man schließlich zur Formel für n Ereignisse kommt.

Aufgaben

1. Gegeben: $P(E_1) = 0{,}4$; $P(E_2) = 0{,}7$; $P(E_1 \cap E_2) = 0{,}3$.
   Berechne: **a)** $P(\bar{E}_1)$; $P(\bar{E}_2)$, **b)** $P(E_1 \cup E_2)$, **c)** $P(E_1 \cap \bar{E}_2)$, **d)** $P(E_1 \cup \bar{E}_2)$.
2. Drücke die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E :=$ »Entweder A oder B« durch die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und $A \cap B$ aus.
3. Beim Werfen von zwei Würfeln werden folgende Ereignisse definiert:
   $A :=$ »Die Augensumme ist gerade«,
   $B :=$ »Der erste Würfel zeigt eine gerade Augenzahl«.
   Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(A) = P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}25$. Berechne die Wahrscheinlichkeiten von »A oder B« und »Entweder A oder B«.
4. Gegeben $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$.
   Berechne: **a)** $P(A \cap B)$ **b)** $P($»Entweder A oder B«$)$.

5. Von zwei Ereignissen A und B ist bekannt, daß $P(A) = \frac{2}{3}$ und $P(A \cup B) = 0{,}75$ ist.
a) Welcher Spielraum ergibt sich für den Wert der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B?
b) Welche Werte kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »A und B« annehmen?

6. Ein öffentlicher Münzfernsprecher ist defekt. Jemand wirft 20 Pf ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er eine Verbindung erhält, ist 0,5. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Apparat beim Auflegen 20 Pf auswirft, ist $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gespräch nicht zustande kommt und das Geld zurückkommt, ist $\frac{1}{6}$.
a) Gib einen Ergebnisraum an.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man ein bezahltes Gespräch führen kann?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man weder telefonieren kann noch sein Geld zurückbekommt?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man telefoniert und trotzdem sein Geld zurückbekommt?
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man entweder telefonieren kann oder sein Geld zurückbekommt?

7. Für die Ereignisse A und B gilt: $P(A) + P(B) > 1$.
Zeige, daß A und B nicht unvereinbar sind.

8. Gegeben: $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Berechne: **a)** $P(A \cup B)$ **b)** $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ **c)** $P(\bar{A} \cup B)$.

9. In einem fernen Lande werden in den Schulen die 3 Fremdsprachen Deutsch, Englisch und Französisch angeboten. 40% der Schüler lernen Deutsch, 60% Englisch und 55% Französisch. Manche der Schüler lernen 2 Fremdsprachen, und zwar 30% Englisch und Deutsch, 20% Französisch und Deutsch und 35% Französisch und Englisch. 20% der Schüler wollen später Karriere machen und lernen daher 3 Fremdsprachen. Ein Tourist, der diese 3 Fremdsprachen beherrscht, trifft auf einen Einheimischen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er sich mit diesem verständigen? Löse die Aufgabe
a) mit der Formel von *Sylvester*, **b)** mit Hilfe einer Mehrfeldertafel.

10. Eine Urne enthält 3 rote, 2 schwarze und 1 grüne Kugel. Anton, Berta und Cäsar ziehen in dieser Reihenfolge je eine Kugel ohne Zurücklegen so lange, bis einer eine schwarze Kugel zieht. Dieser ist dann Sieger. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) Berta siegt, **b)** Cäsar nicht siegt, **c)** Berta siegt oder Cäsar nicht siegt,
d) Berta nicht siegt oder Cäsar siegt, **e)** Berta nicht siegt oder Cäsar nicht siegt.

11. Das Spiel aus Aufgabe **10** werde folgendermaßen abgeändert: Wer eine schwarze Kugel zieht, scheidet aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
a) bleibt Berta übrig, **b)** scheidet Cäsar aus, **c)** scheiden Cäsar und Berta aus,
d) scheiden Cäsar oder Berta aus?

12. a) Dorothea und Theodor haben je einen Wurfpfeil, mit dem sie einmal auf eine Scheibe zielen. Gewonnen hat derjenige, der zuerst trifft. Wer das Spiel eröffnen darf, wird durch eine L-Münze entschieden. Zeigt sie Adler, so darf Dorothea beginnen.
Bestimme einen brauchbaren Ergebnisraum. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Dorothea gewinnt, wenn ihre Treffsicherheit 0,6 und die von Theodor 0,7 ist.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel unentschieden?
c) Nun werde gestattet, daß beliebig oft auf die Scheibe geworfen werden darf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt nun Dorothea, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden? [Geometrische Reihe!]

13. Ein progressiver Lehrer verzichtet aufs Korrigieren und ermittelt die Noten wie folgt.*
Er wirft 3 L-Würfel und nimmt die kleinste auftretende Augenzahl als Note. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die 6 Noten 1 bis 6.

* Der Lehrer wurde zu diesem Vorgehen angeregt durch den Richter *Bridoye* von Myrelingues des *François Rabelais* (um 1494–1553), der seine Urteile durch Würfeln ermittelt, da er der Meinung ist, daß die Zeit die Mutter der Wahrheit ist und sich eines Tages alles offenbaren werde, also auch die Begabung der Schüler.

14. Langjährige Beobachtungen an einem Ferienort haben ergeben, daß auf einen Tag mit gutem Wetter mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ wieder ein Tag mit gutem Wetter folgt, während auf einen Tag mit schlechtem Wetter mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ ein Gutwettertag folgt. Herr Meier freut sich über das gute Wetter an seinem ersten Urlaubstag, einem Donnerstag, und plant für das Wochenende einen Ausflug. Mit welcher Wahrscheinlichkeit herrscht

a) am Samstag schlechtes Wetter,
b) am Samstag und Sonntag gutes Wetter,
c) am Freitag oder Samstag gutes Wetter,
d) am Freitag oder Samstag oder Sonntag gutes Wetter?

•15. Im Wilden Westen haben sich Bob, Dick und Ted so beleidigt, daß sie glauben, ihre Ehre nur durch ein Triell wiederherstellen zu können. Sie wollen so lange aufeinander schießen, bis nur mehr einer am Leben ist. Die Reihenfolge, in der sie jeweils einen Schuß abgeben dürfen, wird durch Los entschieden. Dann stellen sie sich auf die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Die Treffsicherheiten betragen beziehungsweise 100%, 80% und 50%.

a) Welche Strategie ist für jeden einzelnen optimal, d.h., wie wird sich jeder verhalten, wenn die Reihe an ihm ist zu schießen?
b) Nun wende jeder Schütze seine optimale Strategie an. Wie groß sind dann
   α) die Überlebenswahrscheinlichkeiten für jeden der drei [Geometrische Reihe!],
   β) die Sterbewahrscheinlichkeiten für jeden der drei?
c) Warum ist die Summe der Überlebenswahrscheinlichkeiten gleich 1, die der Sterbewahrscheinlichkeiten aber größer als 1?

•16. *Bernoulli-Euler*sches *Problem der vertauschten Briefe** für $n = 3$. Unbesehen werden 3 Briefe in die 3 vorbereiteten Umschläge gesteckt, d.h., die Briefe gelangen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit in die Umschläge.

a) Berechne mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt.
b) Löse **a)** mit Hilfe der Formel von *Sylvester*.
c) Simuliere die Aufgabe durch eine geeignete Urne.

* Das Problem geht auf die Untersuchung des Treize-Spiels durch *Montmort* (1678–1719) aus dem Jahre 1708 zurück: 13 Karten werden gut gemischt und eine Karte nach der anderen abgehoben. Wenn kein Kartenwert mit der Ziehungsnummer übereinstimmt, gewinnt der Spieler, andernfalls der Bankhalter. – Verallgemeinerungen dieses Spiels wurden 1710 bis 1713 in einem regen Briefwechsel zwischen *Montmort* einerseits und *Johann I. Bernoulli* (1667–1748) und *Nikolaus I. Bernoulli* (1687–1759) andererseits behandelt.
Das Problem heißt auch Rencontre-Problem nach *Leonhard Euler*s (1707–1783) Arbeit *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre* von 1751.
Die Idee, *n* Dingen jeweils einen bestimmten Platz zuzuordnen, stammt von *Johann Heinrich Lambert* (1728–1777), als er 1771 in *Examen d'une espece de Superstition ramenée au calcul des probabilités* modellmäßig nachwies, daß es ein dummer Aberglaube sei, aus Almanachen Wettervorhersagen entnehmen zu können. Die schöne Einkleidung der vertauschten Briefe gab dem Problem *Isaac Todhunter* (1820–1884) in *A History of the Mathematical Theory of Probability* 1865. – Biographische Einzelheiten findet man auf den Seiten 394 ff.