Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

7. Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

7. Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicé scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
ↀ Iↄcc XIII.

THÉORIE
ANALYTIQUE
DES PROBABILITES;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur; Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, de Hollande, d'Italie, etc.

PARIS,
Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1812.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

R. v. Mises in Dresden.

Übersicht.

Einleitung.
§ 1. Grundbegriffe (Satz 1–7).
§ 2. Die Beziehungen zur Erfahrungswelt.
§ 3. Die Verteilungen (Satz 8–14).
§ 4. Die einfachen Operationen (Satz 15–22).
§ 5. Zusammengesetzte Operationen (Satz 23–27).
§ 6. Die Gesetze der großen Zahl (Satz 28–30).

Im folgenden lege ich die zusammenfassende Darstellung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, die ich in meiner Arbeit über die „Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung" angekündigt habe[1]. In einem dritten, abschließenden Aufsatz über die „Hauptsächlichsten Problemgruppen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" soll dann gezeigt werden, wie sich auf diesen Grundlagen, teilweise unter Heranziehung der Fundamentalsätze, die Theorie der Glücksspiele, der statistischen und der physikalischen Anwendungen aufbauen läßt.

Dem Bedürfnis nach einer exakten Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird sich kein Mathematiker verschließen, der eines der bestehenden Lehrbücher zur Hand nimmt: in der Tat kann man den gegenwärtigen Zustand kaum anders als dahin kennzeichnen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung heute *eine mathematische Disziplin nicht ist.* Kein Autor erhebt sich wesentlich über die Auffassung der von Laplace herrührenden „*Definition*", die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sei der Quotient aus der Anzahl der „dem Ereignis günstigen Fälle" durch

[1] Diese Zeitschrift 4 (1919), S. 1–97. Hinfort zitiert als „Fundamentalsätze".

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

7. Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

7.1. Der Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit

Wie wir in **4.1.** gesehen haben, scheint sich die relative Häufigkeit bestimmter Ereignisse bei einer großen Anzahl von Versuchen um einen festen Wert zu stabilisieren. Es liegt also nahe, diesen Wert als Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses zu nehmen. Damit kann Wahrscheinlichkeit nur für Ereignisse aus Zufallsexperimenten definiert werden, die beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden können. Subjektive Wahrscheinlichkeiten wie z. B. die in **5.1.** erwähnte können damit jedoch nicht erfaßt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erscheint bei diesem Vorgehen als eine physikalische Maßzahl, die über die relative Häufigkeit gemessen werden kann. Überlegungen dieser Art liegen der Definition der Wahrscheinlichkeit durch *Richard von Mises* (1883–1953)* zugrunde.
In *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* definierte *von Mises* 1919 für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A:

$$P(A) := \lim_{n \to +\infty} h_n(A),$$

wobei $h_n(A)$ die relative Häufigkeit des Eintretens von A nach n Versuchen ist. Die so festgelegte Zahl heißt auch **statistische Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A.

Die Definition der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* (nämlich *nach* dem Ausführen einer langen Reihe von Versuchen) als Grenzwert stieß auf theoretische Schwierigkeiten, da der Limesbegriff sich nicht auf eine vom Zufall beherrschte Folge anwenden ließ. Es ist zum Beispiel nicht möglich, zu einem vorgegebenen ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ anzugeben, so daß $|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ für *alle* $n > n_0$ ist. Es ist nämlich nicht auszuschließen, daß auch für sehr großes n die relative Häufigkeit $h_n(A)$ sich immer wieder einmal um mehr als ε von dem »Grenzwert« $P(A)$ unterscheidet. Wählt man z. B. für den 800fachen Münzenwurf nach Tabelle 11.1 für $\varepsilon = 1\%$, dann könnte man nach etwa $n_0 = 500$ Würfen zu der Meinung kommen, daß die relativen Häufigkeiten den ε-Streifen um den »Grenzwert« 50% nicht mehr verlassen werden. Für $n = 650$ erhält man jedoch h_{650}(»Adler«) $= 51{,}4\%$, weil zwischen 525 und 650 Würfen »Adler« sehr viel häufiger eintrat als »Zahl«. (Vergleiche dazu Figur 71.1.) Es gilt ja auch für jedes noch so große n, daß die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A jeden der $n+1$ Werte $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ annehmen kann, wenn auch Figur 34.1 zeigt, daß eine gewisse »Konzentration« der relativen Häufigkeiten mit wachsendem n zu beobachten ist.

Ein ganz anderer Weg zur Definition der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A entsprang aus Überlegungen zu Glücksspielen.

* Biographische Einzelheiten über die in diesem Abschnitt erwähnten Mathematiker findet man auf Seite 394ff.

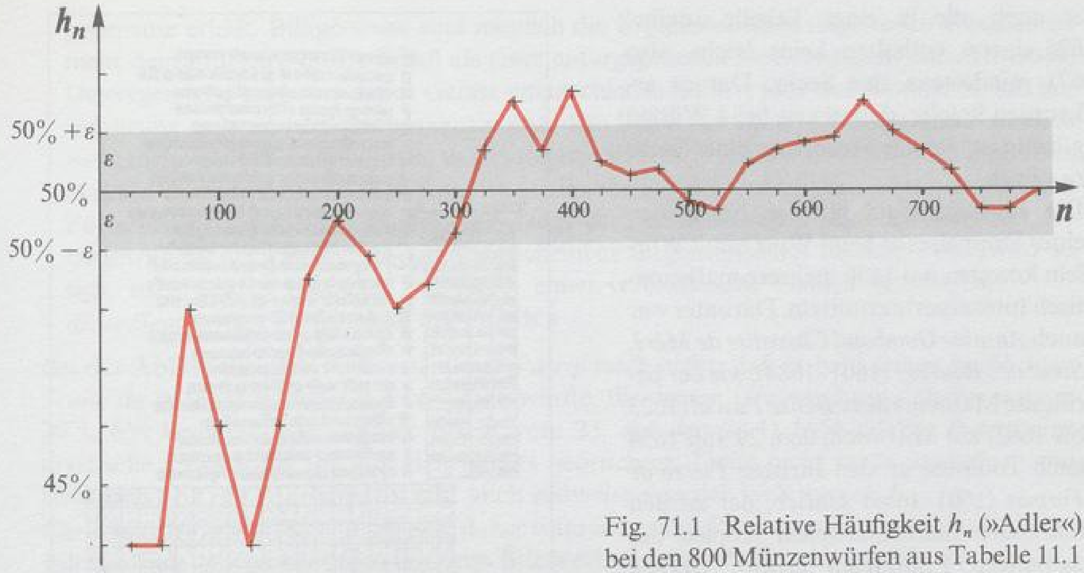


Fig. 71.1 Relative Häufigkeit h_n (»Adler«) bei den 800 Münzenwürfen aus Tabelle 11.1

7.2. Entwicklung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Der berühmte Arzt *Geronimo Cardano* (1501–1576) notierte als leidenschaftlicher Spieler seine Erfahrungen und faßte sie wohl um 1563 in seinem *Liber de ludo aleae** – »Über das Glücksspiel« – zusammen, dem ältesten Buch, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet ist. Gedruckt wurde es aber erst 1663, als es längst überholt war. In Kapitel IX behauptet er, daß man darauf setzen könne, daß nach spätestens 3 Würfen mit einem Würfel die Sechs erscheine. Seine Argumentation lautet, in unsere Termini übersetzt: Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs ist $\frac{1}{6}$, also könne man nach 3 Würfen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten, daß die Sechs auftrete. Ebenso schließt er in Kapitel XI, daß mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beim Werfen zweier Würfel die Doppelsechs nach 18 Würfen mindestens einmal auftrete. Da sich nun 3 zu 18 wie 6 zu 36 verhält, schloß man wohl später daraus auf einen allgemeinen *Lehrsatz*, daß sich die kritischen Wurfzahlen, ab denen es günstig ist, darauf zu wetten, daß ein Elementarereignis eintritt, sich wie die Mächtigkeiten der zugehörigen Ergebnisräume verhalten.

Den Ergebnisraum für 3 Würfel zu finden, war schon früh gelungen. *Richard de Fournival* (1201–1260), dem Kanzler der Kathedrale von Amiens, wird das Gedicht *De Vetula* zugeschrieben, in dem die 216 möglichen Ergebnisse richtig hergeleitet werden. (Vgl. Bild 72.1 mit seiner schönen, aber fehlerhaften Darstellung der 56 Augenzahlkombinationen.)

Cardano bemerkt in Kapitel XIV seinen Fehler: Da 125 der möglichen 216 Ergebnisse keine Sechs und nur die restlichen 91 mindestens eine Sechs enthalten, ist es noch nicht günstig, bei 3 Würfen auf das Erscheinen einer Sechs zu setzen.

1559 behandelt der Mönch *Jean Buteo* (1492–1572) in seiner *Logistica* (ed. 1560) Kombinationsschlösser und zeigt,

»was bisher noch niemand angepackt hat«,

daß sich die Zahlen von 1 bis 6 auf genau $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Arten kombinieren lassen, die

* *alea* bezeichnet zunächst den Würfel als Spielgerät, unabhängig von seiner Gestalt, ist also gewissermaßen ein Oberbegriff zu *astragalus* und *tessera* (siehe Seite 46). Es bedeutet aber auch das Glücksspiel und schließlich allgemein den blinden Zufall.

er auch alle in einer Tabelle angibt! 625 davon enthalten keine Sechs, also 671 mindestens eine Sechs. Daraus erkannten Spieler, daß es erst bei 4 Würfen günstig ist, auf das Erscheinen einer Sechs zu setzen.
Die kritische Zahl für das Erscheinen einer Doppelsechs beim Wurf mit 2 Würfeln konnten um 1650 mehrere mathematisch Interessierte ermitteln. Darunter war auch *Antoine Gombaud Chevalier de Méré, Sieur des Baussay* (1607–1684), wie der berühmte Mathematiker *Blaise Pascal* (1623 bis 1662) am Mittwoch, dem 29. Juli 1654 nach Toulouse an den Juristen *Pierre de Fermat* (1601–1665) schrieb, der zu den führenden mathematischen Köpfen des damaligen Frankreich gehört. Gerade wegen seiner Erkenntnis war *de Méré* aber mehr als unzufrieden mit der Mathematik! Lesen wir *Pascal*s Brief:

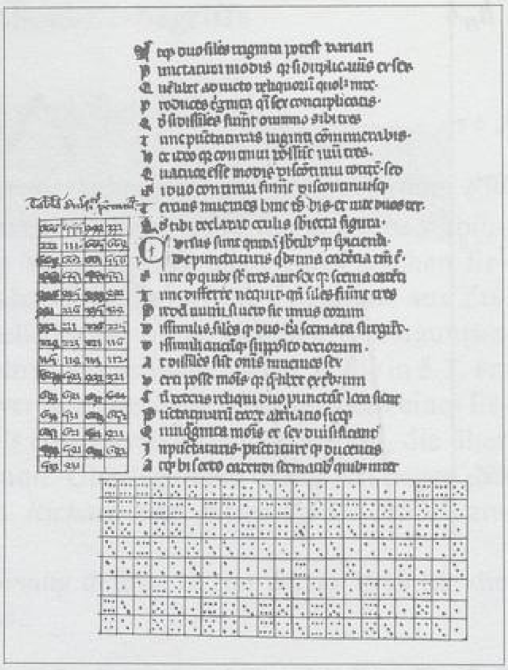


Bild 72.1 Ergebnisraum und Kombinationen beim Wurf dreier Würfel aus dem Gedicht *De Vetula* des *Richard de Fournival* (?) (1201 bis 1260). In den beiden letzten Zeilen steht *ducentis atque bis octo.* – Handschrift des 14. Jh.s. (Harleian Ms. 5263 – British Museum)

> »Er sagte mir nämlich, daß er aus folgendem Grund einen Fehler in den Zahlen gefunden habe:
> Will man eine Sechs mit einem Würfel erzielen, so ist es vorteilhaft, 4 Würfe zu tun, und zwar 671 zu 625.
> Will man eine Doppelsechs mit 2 Würfeln erzielen, so ist es nachteilig, 24 Würfe zu tun.
> Und nichtsdestotrotz verhält sich 24 zu 36 (was die Anzahl der Ergebnisse bei 2 Würfeln ist) wie 4 zu 6 (was die Anzahl der Ergebnisse eines Würfels ist).
> Hier haben Sie sein großes Ärgernis, das ihn ausrufen ließ, daß die Lehrsätze nicht sicher seien, und –
>
> *que l'Arithmetique se dementoit*
>
> – daß die Arithmetik sich widerspreche. Aber Sie werden mit Leichtigkeit mittels Ihrer Verfahren die Ursache dieses Widerspruchs erkennen.«

Im selben Brief beschäftigt sich aber *Pascal* noch mit einer weiteren, weitaus bedeutenderen Aufgabe, die ihm *de Méré* bereits früher vorgelegt hatte und die dieser nicht lösen konnte. Es handelt sich um die gerechte Verteilung des Einsatzes bei vorzeitig abgebrochenem Spiel, dem problème des partis, also um die alte Aufgabe von *Luca Pacioli* (siehe Aufgabe 18/**10**). Hierüber entwickelte sich ein reger Briefwechsel zwischen *Pascal* und *Fermat*, in dem beide das problème des partis lösen. *Fermat*s Lösungsweg, basierend auf kombinatorischen Überlegungen – ähnlich unseren Baumdiagrammen –, kann auf den Fall mehrerer Spieler verallgemeinert werden. Bereits im Frühjahr 1654 hatte *Pascal* in einer lateinisch geschriebenen Adresse der »Erlauchten Pariser Akademie der Mathematik« seine Pläne angekündigt, darunter

> »eine völlig neue Abhandlung über ein bis heute absolut unerforschtes Gebiet, nämlich die Aufteilung der Chancen in Spielen, die dem Zufall unterworfen sind. [...] Und gerade hier muß man um so mehr durch Rechnung untersuchen, je weniger man Aufschluß durch Ex-

perimente erhält. Billigerweise sind nämlich die Ergebnisse eines ungewissen Geschehens mehr dem Eintreten durch Zufall als einer naturgegebenen Notwendigkeit zuzuschreiben. Deswegen irrte bis heute dieses Gebiet unentschieden umher; jetzt aber konnte es, das der Erfahrung gegenüber so widerspenstig war, dem Reich des klaren Denkens und Rechnens nicht mehr entfliehen. Wir haben es mit solcher Sicherheit mittels der Mathematik zu einer exakten Wissenschaft gemacht, daß diese, teilhabend an der Genauigkeit jener, schon kühne Fortschritte macht; sie verbindet die Strenge der mathematischen Beweisführung mit der Ungewißheit des Zufalls, wodurch sie scheinbar Gegensätzliches vereinigt, und wird so sich, nach beiden nennend, mit Recht einen verblüffenden Namen verschaffen: *aleae Geometria* – Mathematik des Zufalls.«

Bei der Abfassung dieser Adresse ahnte *Pascal* noch nicht, daß er bald seinen berühmten *Traité du triangle arithmétique* verfassen würde, für dessen Übersendung sich *Fermat* am 29.8.1654 bedankt. Aber in der Nacht vom 23. auf den 24.11.1654 erlebte *Pascal* eine mystische Erweckung; er läßt den bereits gedruckten *Traité* nicht mehr ausliefern und zieht sich von der Mathematik und auch zeitweise von der Welt zurück.*
Christiaan Huygens (1629–1695) hört daher während seines Pariser Studienaufenthalts (Mitte Juli bis Ende November 1655) nur vom Briefwechsel zwischen *Pascal* und *Fermat*.

»Diese hielten jede ihrer Methoden so sehr geheim, daß ich die gesamte Materie von den Anfangsgründen an selbst entwickeln mußte.«

So steht es im Brief vom 27.4.1657 an seinen Lehrer *Frans van Schooten* (um 1615–1660), der als Einleitung zu seinem *Tractaet handelende van Reeckening in Speelen van Geluck* dient. *Huygens* geht dabei über *Pascal* und *Fermat* hinaus; denn mit dem von ihm geschaffenen Begriff der »mathematischen Erwartung« legt er den Grundstein für eine allgemeine Behandlung wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufgaben**. Er beweist einige einfache Sätze über die Erwartung und löst mit ihrer Hilfe das problème des partis für einige einfache Sonderfälle – bleibt also hinter *Pascals* allgemeiner Lösung aus dem *Traité du triangle arithmétique* zurück – und andere Aufgaben über teilweise recht komplizierte Spiele.
Van Schooten übersetzte diesen Traktat ins Lateinische und fügte ihn 1657 unter dem Titel *Tractatus de Ratiociniis in Aleae Ludo* seinem eigenen Werk *Exercitationum Mathematicarum Libri Quinque* an, das 1660 auch auf holländisch erschien. Welche Bedeutung *Huygens* diesem neuen mathematischen Gebiet zumißt, geht aus seinem Einleitungsbrief hervor:

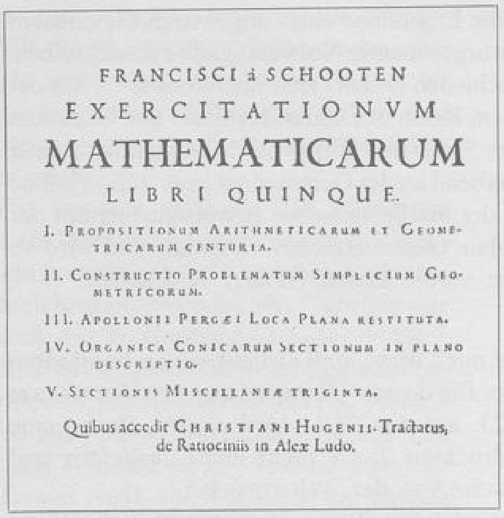
»Ich zweifle auf keinen Fall, daß derjenige, der tiefer das von uns Dargebotene zu untersuchen beginnt, sofort entdecken wird, daß es hier nicht, wie es scheint, um Spiel und Kurzweil geht, sondern daß die Grundlagen für eine schöne und überaus tiefe Theorie entwickelt werden«.***

Für ein halbes Jahrhundert blieb *Huygens*' Abhandlung *das* Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Huygens* beschloß seine Arbeit mit 5 Problemen – zwei davon stammten von *Fermat*, eines von *Pascal* –, ohne die Lösungen mitzuteilen,

»weil diese viel zuviel Arbeit erfordert hätten, wenn ich sie gründlich ausgeführt hätte, aber auch, damit diese unseren Lesern, so es welche geben wird, als Übung und [so fügt er im Holländischen hinzu] als Zeitvertreib dienen mögen.«

Die einzige Teillösung, die 1687 veröffentlicht wurde, stammt höchstwahrscheinlich von dem Philosophen *Baruch Spinoza* (1632–1677). Die Wahrscheinlichkeitsrechnung schien zu stag-

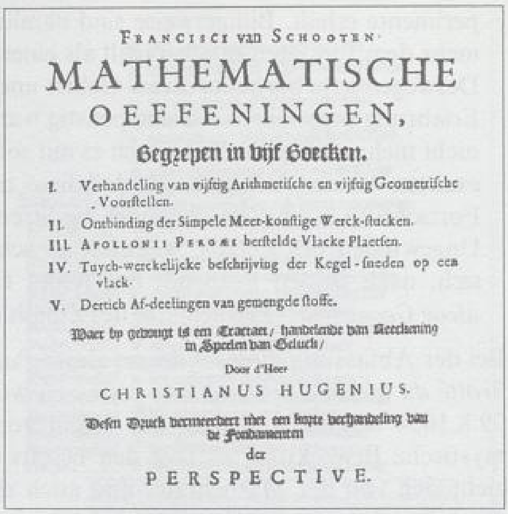
* Der *Traité du triangle arithmétique* erschien erst posthum 1665.
** »Erwartung« klingt bereits bei *Cardano* an und ist ein zentraler Begriff in *Pascals Infini-rien* (siehe Seite 343).
*** Quanquam, si quis penitius ea quae tradimus examinare caeperit, non dubito quin continuo reperturus sit, rem non, ut videtur, ludicram agi, sed pulchrae subtilissimaeque contemplationis fundamenta explicari.



FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.
II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.
III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.
IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.
V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.



Francisci van Schooten
MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,
Begrepen in vijf Boecken.

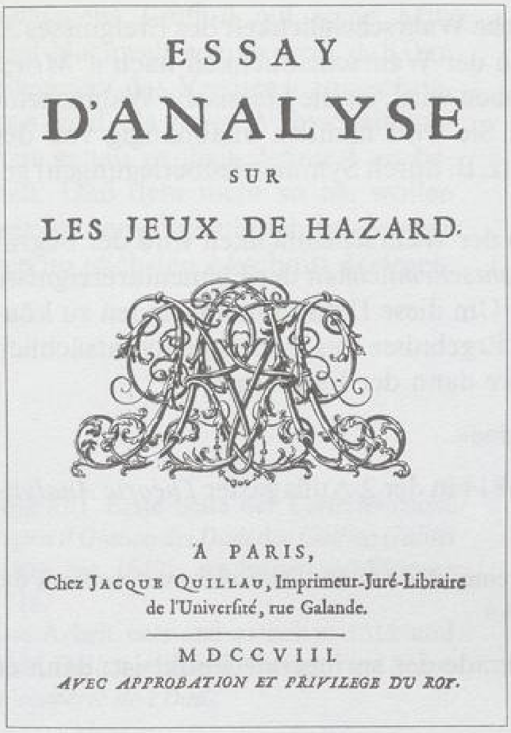
I. Verhandeling van vijftig Arithmetische en vijftig Geometrische Voorstellen.
II. Ontbinding der Simpele Meer-konstige Werck-stucken.
III. Apollonii Pergæi herstelde Vlacke Plaetsen.
IV. Tuych-werckelijcke beschrijving der Kegel-sneden op een vlack.
V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe.

Waer by gevoegt is een Tractaet / handelende van Reeckening in Speelen van Geluck /
Door d'Heer
CHRISTIANUS HUGENIUS.
Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten der
PERSPECTIVE.

Bild 74.1 Titelblatt der lateinischen bzw. der holländischen Ausgabe der *Mathematischen Übungen* des *Frans van Schooten*, denen *Huygens'* berühmter *Traktat über Berechnungen bei Glücksspielen* angefügt wurde.

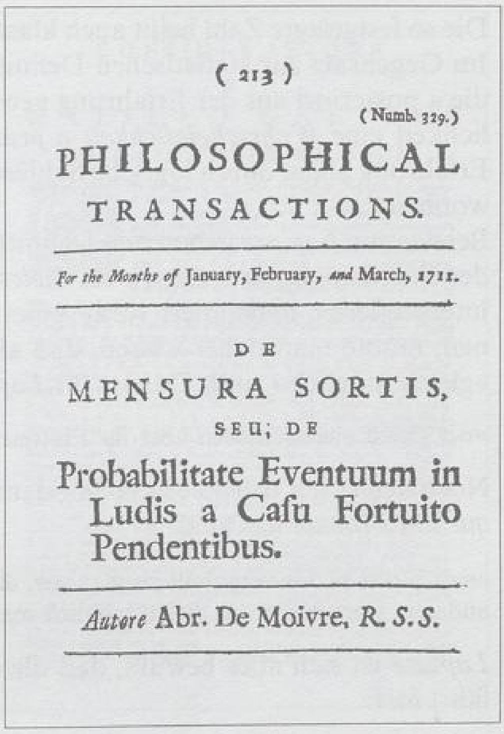
nieren. Auch *Jakob Bernoulli* (1655–1705), der sich ab 1684 mit *Huygens'* Arbeit beschäftigte, erhielt auf seine im *Journal des Sçavans* am 26. 8. 1685 gestellte Aufgabe keine Lösung zugesandt.* *Bernoulli* übernimmt *Huygens'* Abhandlung als 1. Teil seiner *Ars conjectandi*, versieht sie mit Kommentaren, entwickelt neue Methoden und löst damit u.a. die 5 Probleme. Aber der Titel *Ars conjectandi*, zu deutsch *Mutmaßungskunst*, zeigt den neuen Standpunkt. Es geht nicht mehr nur um Spiele. Spiele kann man lassen, aber Mutmaßen ist eine unentbehrliche Tätigkeit; denn alle Entscheidungen und alle Strategien gründen sich auf Mutmaßungen. *Jakob Bernoulli* hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Odium befreit, nur eine Lehre von den Chancen im Glücksspiel zu sein. Ehe er jedoch den entscheidenden 4. Teil, die »*Anwendung* [der Wahrscheinlichkeitslehre] *auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse*« ausbauen konnte, ereilte ihn 1705 der Tod. Die erfolgreichen neuen Lösungen *Bernoullis* wurden in den Nachrufen gerühmt. Dies gab *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) den Mut, Probleme über Glücksspiele anzugehen. 1708 veröffentlichte er anonym den *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Gründliche Literaturkenntnis und eigene Forschungen stecken in diesem Werk. Gegenüber *Huygens*, der sämtliche seiner Aufgaben nur mit *einer* Methode löste, stellt der *Essay* eine bedeutende Erweiterung des lösbaren Aufgabenbereichs dar. Die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verlief dann fast wettbewerbsartig zwischen *Abraham de Moivre* (1667–1754) mit seiner *De Mensura Sortis, seu, De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus* von 1711**, *de Montmort* mit der wesentlich verbesserten 2. Auflage des *Essay* (1713) und *Nikolaus I. Bernoulli* (1687–1759), der endlich 1713 die *Ars Conjectandi* seines Onkels herausgab. 1718 publizierte *de Moivre* dann *The Doctrine of Chances: Or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, eine erweiterte englische Fassung von *De Mensura Sortis*.
Wir überspringen den Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 18. Jahrhundert.

* »A und B spielen mit einem Würfel unter der Bedingung, daß derjenige gewonnen habe, der als erster ein As wirft. Zuerst wirft A, dann B; darauf wirft A zweimal, dann B zweimal [...] usw. Oder: A wirft einmal, dann B zweimal, dann A dreimal, dann B viermal, bis schließlich einer gewinnt. Gefragt wird nach dem Verhältnis ihrer Chancen.« *Bernoulli* veröffentlicht 1690 eine Lösung ohne Beweis; dabei wird zum ersten Mal in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine unendliche Reihe benützt. Wenig später veröffentlicht *Leibniz* dasselbe Resultat, ebenso ohne Beweis.
** *De Moivre* bewies darin u.a., daß der »Proportionalitätssatz« für die kritischen Wurfzahlen asymptotisch gilt. Ist nämlich $|\Omega|$ groß, so gilt für die kritische Wurfzahl: $n \geqq (|\Omega| - 1) \ln 2$, was zu $|\Omega| \cdot \ln 2$ vergröbert werden kann.



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande.
MDCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



(213)
(Numb. 329.)
PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, *and* March, 1711.

DE
MENSURA SORTIS,
SEU; DE
Probabilitate Eventuum in Ludis a Caſu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, *R. S. S.*

Bild 75.1 Titelblatt des 1708 anonym erschienen *Essay* des *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) und erste Seite der *Philosophical Transactions* für die Monate Januar, Februar und März des Jahres 1711 mit der *De mensura sortis* des *Abraham de Moivre* (1667–1754), R.S.S. (= Regiae Societatis Sodali), die erst 1712 erschienen.

7.3. Die Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit durch *Laplace*

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827) brachte im Jahre 1812 mit seiner *Théorie Analytique des Probabilités* die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem vorläufigen Abschluß.

»La théorie des probabilités consiste à reduire tous les événemens qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles.«

Übersetzen wir dies in unsere moderne Sprechweise, so besteht also die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeiten darin, einen Ergebnisraum Ω zu bestimmen, dessen Elemente alle gleich möglich sind. *Günstig* für ein Ereignis A heißen all die Ergebnisse ω, deren Auftreten A zur Folge hat, für die also $\omega \in A$ gilt. Damit definierte *Laplace* als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A den Quotienten

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse, sofern sie gleich möglich sind}}.$$

Die so festgelegte Zahl heißt auch **klassische Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses *A*. Im Gegensatz zur statistischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach *v. Mises*, die a posteriori aus der Erfahrung gewonnen wird, ist die klassische Wahrscheinlichkeit eine *Wahrscheinlichkeit a priori.* Sie wird nämlich unabhängig von der Erfahrung allein durch logische Schlüsse (z. B. durch Symmetrieüberlegungen) gewonnen.
Bei der von *Laplace* gebotenen Definition der Wahrscheinlichkeit wird der Begriff der *Gleichmöglichkeit*, die wir als *Gleichwahrscheinlichkeit* der Elementarereignisse interpretieren, undefiniert vorausgesetzt. Um diese Definition anwenden zu können, müßte man daher wissen, daß alle Ergebnisse des Experiments tatsächlich »gleich möglich« sind. Das ist für *Laplace* dann der Fall, wenn

»wir gleich unentschieden über ihr Eintreten sind«.

Noch deutlicher drückt es *Laplace* dann 1814 in der 2. Auflage der *Théorie Analytique des Probabilités* aus:

»sofern uns nichts veranlaßt zu glauben, daß einer der Fälle leichter eintreten muß als die anderen, was sie für uns gleich möglich macht.«

Laplace ist sich aber bewußt, daß dies gerade der springende Punkt ist; denn er fährt fort:

»Die richtige Einschätzung dieser verschiedenen Fälle ist einer der heikelsten Punkte in der Analyse des Zufallsgeschehens.«*

Für *Laplace* war Wahrscheinlichkeit nur ein Notbehelf des Menschen in unübersichtlichen Situationen und nicht – wie heute allgemein angenommen – eine objektive Eigenschaft des Naturgeschehens.

Wie schwierig das Erkennen der Gleichwahrscheinlichkeit ist, zeigt folgendes Problem. Glücksspieler beobachteten, daß die Augensumme 10 beim gleichzeitigen Wurf dreier Würfel häufiger auftrat als die Augensumme 9, obwohl ihrer Ansicht nach diese Augensummen gleichwertig sein sollten, da es für 10 die 6 Zerlegungen 1|3|6, 1|4|5, 2|2|6, 2|3|5, 2|4|4 und 3|3|4 und für 9 ebenfalls 6 Zerlegungen, nämlich 1|2|6, 1|3|5, 1|4|4, 2|2|5, 2|3|4 und 3|3|3 gibt. *Galileo Galilei* (1564–1642) klärte in seiner *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi* (erschienen 1718) den Fehlschluß auf, indem er zeigte, daß Zerlegungen nicht als gleich mögliche Ergebnisse genommen werden können, da z. B. 2|3|4 sechsmal so häufig wie 3|3|3 ist.
Aber nicht nur Glücksspieler irrten sich. Schrieb doch selbst *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) am 22. 3. 1714 an *Louis Bourguet* (1678–1742),

»daß es ebenso leicht sei, mit 2 Würfeln die Augensumme 12 wie die Augensumme 11 zu erreichen, weil beide nur auf eine Art zustande kämen, daß die 7 hingegen 3mal leichter zu erhalten sei.«**

* ... »la probabilité d'un événement, est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables, au nombre de tous les cas possibles; lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.«

** Häufigkeiten von Augensummen stellten wohl schon immer ein Problem dar. Überraschenderweise berechnet

*Laplace*ns Einfluß auf seine Mit- und Nachwelt war so groß, daß ihm allgemein das Verdienst zugeschrieben wird, als erster Wahrscheinlichkeit genau explizit definiert zu haben. Daß dem nicht so ist, wollen wir für den geschichtlich Interessierten im nächsten Abschnitt darlegen.


CONSIDERAZIONE

DI

GALILEO GALILEI

SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

CHe nel giuoco de i dadi, alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorche il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'egual uso devriano esser reputati; si vede nondimeno, che la lunga osservazione ha fatto da i giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10. e l'11. che il 9. e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocchè il 9. si compone con 1. 2. 6., 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1. 3. 6., 1. 4. 5., 2. 2. 6., 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur son 6. combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con speranza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza, che io possa al mio fine, comincio a considerare, come essendo un dado terminato da 6. faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi: sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse: onde è manifesto tali combinazioni esser 6. volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte delli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi essere 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di tre dadi non sono se non 16. cioè 3. 4. 5. fino a 18. tra i quali si hanno a compartire le dette 216. scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne toc-

H 4 chi-

Bild 77.1 Erste Seite der *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi* des *Galileo Galilei* (1564 bis 1642), erschienen in Florenz 1718.
Die Arbeit entstand zwischen 1613 und 1623. *Galilei* selbst gab ihr den Titel *Sopra le scoperte de i Dadi.*

7.4. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff vor *Laplace*

Unausgesprochen taucht der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff schon bei *Geronimo Cardano* (1501–1576) in Cap. XIV seines *Liber de ludo aleae* (um 1563) auf, wenn er die Regel aufstellt, daß die Einsätze im Verhältnis der Zahl der Fälle, bei denen ein Ereignis eintreten kann, zur Zahl der restlichen Fälle geleistet werden sollen, damit man unter gleicher Bedingung kämpfen könne. Die Gleichmöglichkeit dieser Fälle spricht er an, wenn er in Cap. IX bereits sagt, daß eine solche Regel nur gelte,

> »si alea sit iusta« – »wenn der Würfel in Ordnung ist«.

Die Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Fälle spricht *Galilei* bei der Lösung des oben zitierten Problems deutlich an; legt er doch seinen Überlegungen zugrunde (siehe Bild 77.1, Zeile 14 v. u.)

> »un dado terminato da 6 faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi«
> – »einen 6seitigen Würfel, der, einmal geworfen, auf jeder seiner Flächen unterschiedslos zu liegen kommen kann«.

Auch *Pascal* und *Fermat* arbeiten mit dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, ohne ihn explizite zu definieren. *Pascal* hält am 24.8.1654 in einem Brief an *Fermat* fest, daß die Aufteilung des Einsatzes

Richard de Fournival (?) (1201–1260) die Häufigkeiten der Augensummen für 3 Würfel richtig in seinem Epos *De Vetula.* Dagegen behauptet *Jacopo di Giovanni della Lana* in seinem zwischen 1324 und 1328 entstandenen und 1477 in Venedig gedruckten Kommentar zu *Dantes Divina Commedia*, daß die Augensummen 3, 4, 17 und 18 mit 3 Würfeln nur auf eine Art zu erzeugen seien. Solche Würfe hießen *azari*, was vom arabischen *asir* = schwierig abstammt. Daraus könnte *hasard*, das französische Wort für Glücksspiel, abgeleitet sein, das andere von *az-zahr*, dem arabischen Wort für Würfelspiel, herleiten.

»suivant la multitude des assiettes favorables à chacun« – »gemäß der Anzahl der für jeden günstigen Lagen [der Würfel]« –

zu erfolgen habe. *Fermat* antwortete am 25.9.1654 und erklärt,

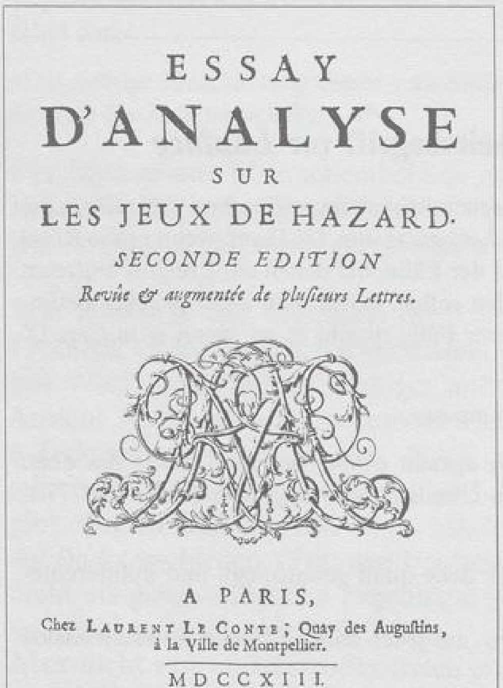
»cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à [...] rendre tous les hasards égaux« – »die fiktive Ausdehnung des Spiels bis zu einer gewissen Anzahl von Partien dient nur dazu, [...] alle Ausgänge gleich zu machen«.

Christiaan Huygens formuliert gleich zu Beginn seines Traktats in Satz 3

»sumendo omnes casus aeque in proclivi esse« – »unter der Annahme, daß alle Fälle gleich leicht eintreten«.

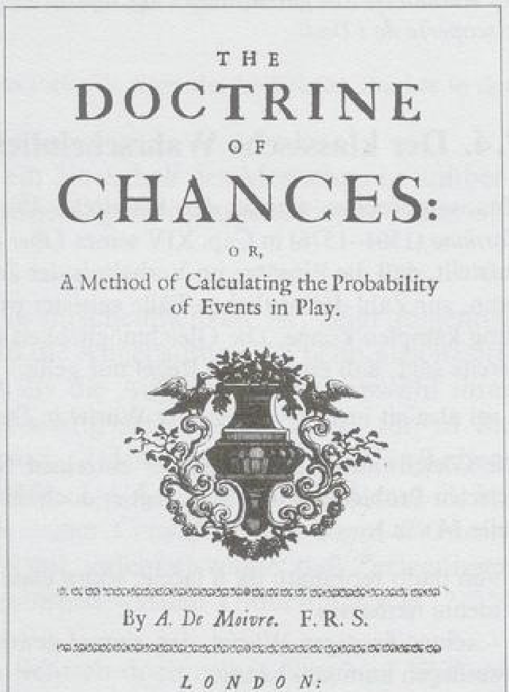
Nicht unterschätzen sollte man den Einfluß, den *Leibniz* durch seine umfangreiche Korrespondenz auf seine Zeitgenossen ausübte.* Leider wurde seine Abhandlung *De incerti aestimatione* – »Über die Schätzung des Nicht-Sicheren« – von 1678 erst 1957 veröffentlicht. Sie enthält, sogar mit einer Formel, die Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit:

»Si plures sunt eventus aeque faciles [...] spei aestimatio erit portio rei quae ita sit ad rem totam, ut numerus eventuum qui favere possunt ad numerum omnium eventuum. Nempe S aequ. $\frac{F}{n} R$.«



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,
Chez LAURENT LE CONTE; Quay des Augustins, à la Ville de Montpellier.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By *A. De Moivre.* F.R.S.

LONDON:
Printed by *W. Pearson*, for the Author. MDCCXVIII.

Bild 78.1 Titelblatt der 1713 erschienen 2. Auflage des *Essay* des *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) und Titelblatt der 1. Auflage von 1718 von *The Doctrine of Chances* des *Abraham de Moivre* (1667–1754)

* Sein »Probabilitas est gradus possibilitatis« liest man bei *Jakob Bernoulli* als »Probabilitas enim est gradus certitudinis«.

Auch *Abraham de Moivre* setzt die Gleichleichtigkeit aller Fälle ausdrücklich voraus, als er 1711 seine Abhandlung *De Mensura Sortis*, ganz im Stile seiner Zeit und aller seiner Vorgänger, mit der Definition des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeiten für Eintreten und Nicht-Eintreten eines Ereignisses beginnt, da Spieler nur dieses Verhältnis interessierte*.

> »Si p sit numerus casuum quibus eventus aliquis contingere possit, et q numerus casuum quibus possit non-contingere; tam contingentia quam non-contingentia eventus suum habent probabilitatis gradum: Quod si casus omnes quibus eventus contingere vel non-contingere potest, sint aeque faciles; probabilitas contingentiae, erit ad probabilitatem non-contingentiae ut p ad q.«

1718 formuliert aber *de Moivre* in *The Doctrine of Chances* bereits

> »The Probability of an Event is greater, or less, according to the number of Chances by which it may Happen, compar'd with the number of all the Chances, by which it may either Happen or Fail.«

1738 fügt er in der 2. Auflage eine explizite Definition der Wahrscheinlichkeit hinzu:

> »Wherefore, if we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability of happening.«

Und eine Seite weiter lautet es noch präziser

> »[...] that it is the comparative magnitude of the number of Chances to happen, in respect to the whole number of Chances either to happen or to fail, which is the true measure of Probability.«

Also wörtlich die von *Laplace* gegebene Definition! Zwar fehlt hier die Einschränkung, daß alle Fälle gleich möglich sein müssen – damals stillschweigend meist vorausgesetzt – aber in einem anschließenden Beispiel weist *de Moivre* wieder ausdrücklich darauf hin.

7.5. Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit durch *Kolmogorow*

Als *Jakob Bernoulli* (1655–1705) im 1. Teil seiner *Ars conjectandi Huygens'* Abhandlung kommentiert, spürt er, daß ein Maß für die Wahrscheinlichkeit fehlt**. Er ergänzt den oben zitierten Satz 3 durch Bildung des Quotienten $\frac{p}{p+q}$, wobei p die Anzahl der Fälle angibt, in denen man etwas gewinnen kann, und q die Anzahl der Fälle, in denen man nichts gewinnt, und verwendet diesen Quotienten als Maß für die Wahrscheinlichkeit, ohne ihn jedoch so zu benennen. Erst im 4. Kapitel des 4. Teils kommt er auf diese Quotientenbildung nochmals zurück und schreibt:

> »Und hier scheint uns gerade die Schwierigkeit zu liegen, da nur für die wenigsten Erschei-

* Die erste Aufgabe, bei der nach der Wahrscheinlichkeit in unserem Sinne gefragt wird, fanden wir in der 2. Auflage des *Essay* von *Montmort*. Dort ist ein Brief von *Nikolaus Bernoulli* an *Montmort* vom 30. 12. 1712 abgedruckt. *Nikolaus* stellt das »Problème I: Plusieurs Joueurs dont le nombre est $n+1$ jouent une poulle, on demande quelle est la probabilité que chacun a de gagner la poulle.«

** Wahrscheinlichkeit als meßbarer Begriff erscheint zum ersten Mal in *La Logique ou l'art de penser* 1662, die Logik von Port Royal, die sicherlich von *Pascal* inspiriert wurde. Nach deren lateinischem Titel *Logica sive Ars cogitandi* ist vermutlich *Bernoullis Ars conjectandi* geprägt.

nungen und fast nirgends anders als in Glücksspielen dies möglich ist; die Glücksspiele wurden aber [...] so eingerichtet, daß die Zahlen der Fälle, in welchen sich Gewinn oder Verlust ergeben muß, im voraus bestimmt und bekannt sind, und daß alle Fälle mit gleicher Leichtigkeit eintreten können. Bei den weitaus meisten anderen Erscheinungen aber, welche von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen, ist dies keineswegs der Fall.«

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff bewährt sich also sehr bei der Analyse von Glücksspielen, ist aber kaum tragfähig für Probleme aus Technik und Wirtschaft, bei denen es praktisch unmöglich ist, die Ergebnisse so festzulegen, daß sie uns als »gleich wahrscheinlich« erscheinen. Auch bei der bereits von *Jakob Bernoulli* vorgenommenen Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Krankheiten und Todesfälle lassen sich »gleich mögliche« Fälle nicht auszählen.

Die Schwierigkeiten bei der statistischen und auch der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit rühren davon her, daß sie »Wahrscheinlichkeit« durch eine explizite Definition inhaltlich erfassen wollten. In der modernen Mathematik geht man solchen Schwierigkeiten dadurch aus dem Weg, daß man die Theorie axiomatisch begründet und die Begriffe darin implizit definiert. So treibt man Geometrie mit Punkten und Geraden, ohne explizit definiert zu haben, was Punkte und Gerade sind. Wichtig sind ihre Eigenschaften, die in den Axiomen der Geometrie festgelegt sind. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie wurde ein solcher axiomatischer Aufbau von *Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow** (1903–1987) in seiner 1933 in Berlin erschienenen Arbeit *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* vorgeschlagen. Die mathematische Festlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs orientiert sich dabei auch an der experimentell zugänglichen relativen Häufigkeit, aber sie ist allgemein genug, um auch eine Grundlage für den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff abzugeben. *Kolmogorow* hat gezeigt, daß 3 geeignet ausgewählte Eigenschaften der relativen Häufigkeit genügen, um »Wahrscheinlichkeit« so zu definieren, daß damit eine tragfähige Grundlage für eine in der Praxis brauchbare Theorie aufgebaut werden kann. Nach *Kolmogorow* wird auf der Ereignisalgebra die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A als Funktionswert einer reellwertigen Funktion P definiert. Ist der Ergebnisraum Ω endlich, so lassen sich die Forderungen von *Kolmogorow* wie folgt formulieren:

> Eine Funktion $P\colon A \mapsto P(A)$ mit $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:
>
> **Axiom I:** $P(A) \geqq 0$ (Nichtnegativität)
> **Axiom II:** $P(\Omega) = 1$ (Normierung)
> **Axiom III:** $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität)

Nichtnegativität und Normierung entsprechen den Eigenschaften (1) und (4) für relative Häufigkeiten aus **4.2.** Dem Additionsaxiom für unvereinbare Ereignisse liegt die entsprechende Eigenschaft (6) für relative Häufigkeiten zugrunde.
Man könnte auf die Idee kommen, an Stelle von Eigenschaft (6) die Eigenschaft (5)

*Колмогоров (sprich: kɐlmɐgórɐf)

dem dritten Axiom zugrunde zu legen, da sie keine Voraussetzungen für die Ereignisse A und B fordert. Das ergäbe ein

$$\text{Axiom III}': P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Leider geht das aber schief, weil die Axiome I, II und III′ auch unerwünschte Wahrscheinlichkeitsverteilungen zulassen. So würde z.B. die Festsetzung $P(E) := 1$ für *alle* Ereignisse E des Ereignisraums die Axiome I, II und III′ erfüllen:

I: $P(A) = 1 \geqq 0$

II: $P(\Omega) = 1$

III′: $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1.$

Bei dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung hätte die leere Menge und damit das unmögliche Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1. Also kann man aus I, II und III′ bestimmt nicht mehr folgern, daß $P(\emptyset) = 0$, was aber für eine sinnvolle Anwendung wünschenswert ist, weil die Interpretationsregel $P(\emptyset) = 0$ nahelegt. Nach (3) gilt nämlich $h_n(\emptyset) = 0$.

Wir haben in Definition 42.1 die Wahrscheinlichkeit ebenfalls axiomatisch definiert. Die daraus gefolgerten Sätze 44.1, 44.2 und 44.3 sind gerade die drei Axiome von *Kolmogorow*. Umgekehrt läßt sich aus den drei *Kolmogorow*-Axiomen unsere Definition 42.1 herleiten. Es gilt nämlich

Satz 81.1: Ist P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über einem endlichen Ergebnisraum Ω, die den Axiomen von *Kolmogorow* genügt, dann gilt:

1) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $0 \leqq P(\{\omega\}) \leqq 1$.

2) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1; kurz $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

3) Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0; kurz $P(\emptyset) = 0$.

4) Ist A nicht das unmögliche Ereignis, so ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten derjenigen Elementarereignisse, deren Vereinigung das Ereignis A ergibt; kurz
$A \neq \emptyset \Rightarrow P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Beweis:

4) Ist $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, so erhalten wir durch wiederholte Anwendung des 3. *Kolmogorow*-Axioms

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = \\
&= P(\{a_1\} \cup \{a_2, \ldots, a_k\}) = \\
&= P(\{a_1\}) + P(\{a_2, \ldots, a_k\}) = \\
&= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\} \cup \{a_3, \ldots, a_k\}) = \\
&= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3, \ldots, a_k\}) = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_k\}).
\end{aligned}$$

3) Ist $A = \emptyset$, so ist $A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$. Somit ist für $A \cap B$ die Voraussetzung des 3. Axioms von *Kolmogorow* erfüllt, und wir erhalten einerseits $P(A \cup B) = P(\emptyset \cup B) = P(B)$, andererseits $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(\emptyset) + P(B)$. Der Vergleich der beiden rechten Seiten ergibt $P(\emptyset) = 0$.

2) Nach dem soeben bewiesenen Teil **4** dieses Satzes ist $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})$. Axiom II besagt aber, daß $P(\Omega) = 1$ ist, woraus die Behauptung folgt.

1) Wegen Axiom I ist $P(\{\omega\}) \geqq 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Unter Verwendung des soeben bewiesenen Teils **2** erhalten wir noch $P(\{\omega\}) \leqq \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Für endliche Ergebnisräume sind die beiden Definitionen demnach äquivalent. Wir haben Definition 42.1 gewählt, weil das Belegen der Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeiten ein sehr anschaulicher Vorgang ist, ebenso wie das Zusammensetzen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus den Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse. Die Definition von *Kolmogorow* hat den Vorteil, daß sie sich so verallgemeinern läßt, daß sie auch für unendliche Ergebnisräume brauchbar wird. Das haben wir in diesem Buch aber nicht vor.
Die Festlegung der Funktionswerte $P(A)$, d.h. der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, ist im Rahmen dieser Axiome völlig willkürlich. Man wird jedoch die Werte so festlegen, daß sie den jeweiligen Verhältnissen angepaßt sind. So wird man bei einem idealen Würfel auf Grund der Symmetrie für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ a priori festlegen. Bei einem realen Würfel hingegen empfiehlt es sich, wie im Beispiel auf Seite 42 durchgeführt, die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen in einer möglichst langen Versuchsserie zu bestimmen und diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen a posteriori zu verwenden. Dann ist nämlich die Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten (Seite 44) anwendbar, wie *Jakob Bernoulli* im Hauptsatz seiner *Ars conjectandi*, dem »Gesetz der großen Zahlen«, gezeigt hat.

Aufgaben

Die Behauptungen der Aufgaben **1.–6.** sollen rein formal aus den Axiomen von *Kolmogorow* hergeleitet werden.

1. Für alle Ereignisse A gilt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Für alle Ereignisse A gilt: $P(A) \leqq 1$.
4. Für alle Ereignisse A, B gilt:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5. Für paarweise unvereinbare Ereignisse A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt die folgende Verallgemeinerung des Axioms III:

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).}$$

6. Es gilt das Monotoniegesetz für Wahrscheinlichkeiten: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$.

•**7. a)** Ein Axiomensystem heißt **widerspruchsfrei**, wenn es ein Modell gibt, das sämtliche Axiome erfüllt. Zeige, daß das Axiomensystem von *Kolmogorow* widerspruchsfrei ist anhand nebenstehenden Modells:
$\Omega := \{\omega\}$ und $\begin{array}{c|cc} A & \emptyset & \Omega \\ \hline P(A) & 0 & 1 \end{array}$.

b) Ein Axiomensystem heißt **unvollständig,** wenn es mehrere, nicht isomorphe Modelle gibt. Begründe, daß das Axiomensystem von *Kolmogorow* unvollständig ist.