Stochastik

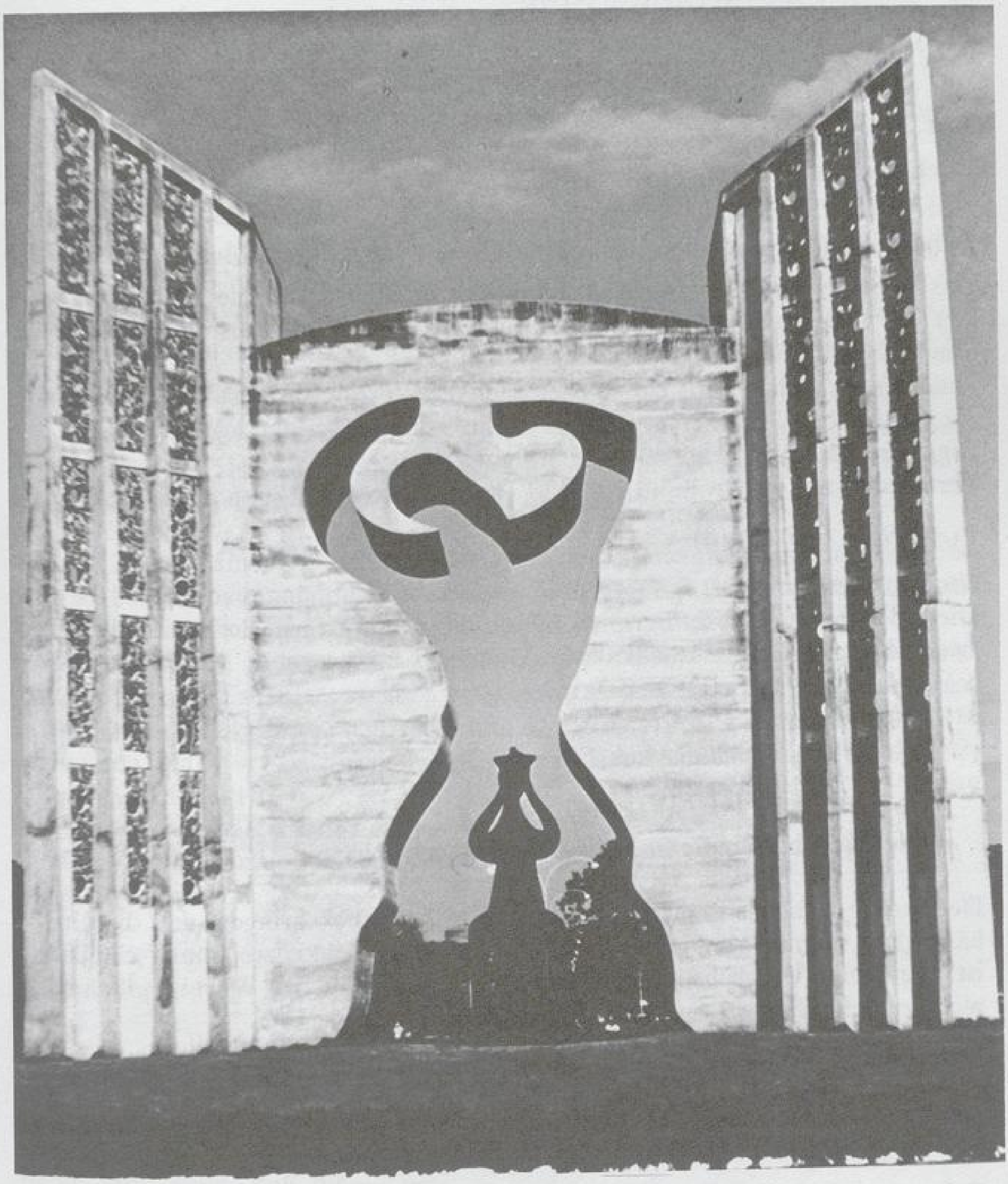
Barth, Friedrich

München, [20]03

10. Unabhängigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

10. Unabhängigkeit



Das Unabhängigkeitsdenkmal in Lomé, der Hauptstadt von Togo: Ein Mensch zerreißt die Ketten. Erbaut wurde das Denkmal von den Gebrüdern *Coustere* unter Mitarbeit des togolesischen Bildhauers *Paul Ahyi*. Offiziell eingeweiht am 27.April 1960.

10. Unabhängigkeit

10.1. Unabhängigkeit bei zwei Ereignissen

Ein L-Würfel werde zweimal geworfen. Bedeuten $A :=$ »Augenzahl beim 1. Wurf kleiner als 4« und $B :=$ »Augenzahl beim 2. Wurf größer als 4«, dann erhält man mit $\Omega := \{(1|1), (1|2), (1|3), \ldots, (6|6)\}$:

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Wir stellen fest:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Nach dem Produktsatz 132.1 muß aber gelten:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

In unserem Experiment ist demnach $P(B) = P_A(B)$. Was heißt das?

Das Eintreten des Ereignisses A beeinflußt offenbar nicht die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B. Unsere Erwartungen für B werden also nicht geändert, wenn wir schon wissen, daß A eingetreten ist.

Umgangssprachlich wird ein solcher Sachverhalt durch »B ist unabhängig von A« beschrieben. In unserem Beispiel ist dies auch naheliegend. Warum sollte das Ergebnis des 2. Wurfs vom 1. Wurf abhängen?

Vertauscht man im Produktsatz 132.1 A mit B, so erhält man in gleicher Weise

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Nun ist offenbar $P_B(A) = P(A)$. Also ist auch A unabhängig von B.

Die Überlegungen dieses Beispiels führen dazu, den Begriff der Unabhängigkeit zweier Ereignisse ins mathematische Modell zu übertragen.

Definition 148.1: Die Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Andernfalls heißen die Ereignisse **stochastisch abhängig.**

Der Zusatz »stochastisch« soll deutlich zum Ausdruck bringen, daß die Unabhängigkeit hiermit als Fachbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt ist. Wenn eine Verwechslung mit dem umgangssprachlichen Wort »unabhängig« nicht zu befürchten ist, werden wir den Zusatz weglassen.

Die in Definition 148.1 enthaltene Produktformel für unabhängige Ereignisse bringt *Abraham de Moivre* (1667–1754) bereits am Anfang seiner *De Mensura Sortis* 1711. Aber erst 1901 erkannte *Georg Bohlmann* (1869–1928), daß es sich nicht um einen beweisbaren Satz handelt, sondern daß Unabhängigkeit durch diese Produktformel definiert werden muß.

Folgerung aus Definition 148.1. Es ergibt sich unmittelbar, daß die Relation der Unabhängigkeit zweier Ereignisse *symmetrisch* ist:

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, dann sind es auch B und A.

An einem praktischen Beispiel wollen wir zeigen, daß der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit in unserem Modell ziemlich gut das wiedergibt, was man in der Realität als unabhängig empfindet.

Beispiel 1: Das Fortuna-Gymnasium wird von 600 Mädchen und 400 Knaben besucht. 80 Knaben sind Linkshänder; das sind 20% der Knaben. Falls nun Linkshändigkeit geschlechtsunabhängig wäre, müßten auch 20% der Mädchen und damit 20% aller Schüler Linkshänder sein. Beim Zufallsexperiment »Auswahl eines beliebigen Schülers« bedeuten $L :=$ »Linkshänder« und $K :=$ »Knabe«. Die Geschlechtsunabhängigkeit der Linkshändigkeit würde nach den obigen Überlegungen im Zufallsexperiment die Gleichheit der drei Wahrscheinlichkeiten $P_K(L)$, $P_{\bar{K}}(L)$ und $P(L)$ bedeuten; also $P_K(L) = P_{\bar{K}}(L) = P(L) = 20\%$.
Damit erhält man $P(K \cap L) = P(K) \cdot P_K(L) = P(K) \cdot P(L)$, was aber gerade der Ausdruck für die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse K und L ist. – Von den 600 Mädchen müßten also 120 linkshändig sein, falls Linkshändigkeit unabhängig vom Geschlecht wäre. Eine Umfrage ergab aber, daß nur 84 der Mädchen Linkshänder sind. Das legt den Verdacht nahe, daß Linkshändigkeit geschlechtsabhängig ist. Läge die Anzahl der linkshändigen Mädchen nahe bei 120, dann würde man Unabhängigkeit vermuten.

Je undurchsichtiger der Zusammenhang zwischen zwei Ereignissen ist, desto schwerer fällt es, ihre Unabhängigkeit gefühlsmäßig einzuschätzen. Hier hilft nur die Rechnung weiter, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2: n L-Münzen ($n \geqq 2$) werden gleichzeitig geworfen. Sind die Ereignisse $A :=$ »Höchstens einmal Adler« und $B :=$ »Jede Seite der Münze fällt wenigstens einmal« stochastisch unabhängig?
Als Ergebnisraum Ω bietet sich die Menge der n-Tupel aus $\{0; 1\}$ an, wobei 1 »Adler« bedeute. Es ist $|\Omega| = 2^n$. A besteht aus all den n-Tupeln von Ω, die keine oder genau eine 1 enthalten. Damit ist $|A| = 1 + n$. Zur Bestimmung von $|B|$ betrachten wir $\bar{B} =$ »Es tritt nur Zahl oder nur Adler auf« und erhalten sofort $|\bar{B}| = 2$; damit ist $|B| = 2^n - 2$. Für das noch fehlende Ereignis $A \cap B =$ »Genau einmal Adler« erhält man $|A \cap B| = n$.
A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \cdot n = (n+1) \cdot (2^n - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = n + 1$$

Figur 149.1 zeigt, daß diese Gleichung in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ genau eine Lösung hat, nämlich $n = 3$, was man durch Einsetzen leicht verifiziert.

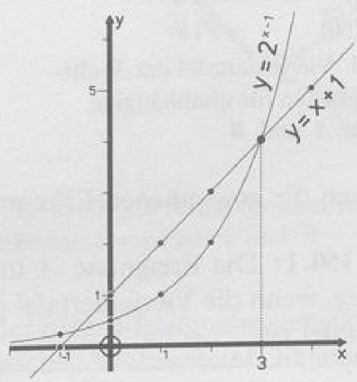


Fig. 149.1 Zur Lösung der Gleichung $2^{n-1} = n + 1$ betrachtet man die Graphen von $y = 2^{x-1}$ und $y = x + 1$.

Das überraschende Resultat besagt, daß die genannten Ereignisse nur beim Werfen von 3 Münzen stochastisch unabhängig sind, sonst aber immer stochastisch abhängig. Dies ist im ersten Moment erstaunlich. Bedenkt man aber, daß die umgangssprachlich gleichlautenden Ereignisse für verschiedene n verschiedene Ereignisse sind – was ja deutlich durch die Verschiedenheit der jeweiligen Ergebnismengen zum Ausdruck kommt –, so wird verständlich, daß die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse A und B von n abhängt.

In Beispiel 2 haben wir die stochastische Unabhängigkeit durch Rechnung überprüft. Es ist zu erwarten, daß die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse auch in den von uns vielfach verwendeten graphischen Hilfsmitteln, nämlich Vierfeldertafel und Baumdiagramm, zum Ausdruck kommt.

Stochastische Unabhängigkeit in der Vierfeldertafel.
Sind A und B stochastisch unabhängig, so steht im Feld $A \cap B$ der Vierfeldertafel für Wahrscheinlichkeiten statt $P(A \cap B)$ nun $P(A) \cdot P(B)$, wie Figur 150.1 zeigt. Im Feld für $\bar{A} \cap B$ steht dann

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P(\bar{A}) \cdot P(B).$$

Es erweisen sich also auch $\bar{A}$ und B als stochastisch unabhängig. Analog füllt man die beiden noch ausstehenden Felder $A \cap \bar{B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ aus und erhält Figur 150.2.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$		$P(A)$
$\bar{A}$			$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Fig. 150.1 Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse A und B

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Fig. 150.2 Vollständige Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse A und B

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

> **Satz 150.1:** Die Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten eine Multiplikationstafel ist.

Die obige Herleitung zeigte ferner: Ist die Produkteigenschaft für ein einziges Feld der Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten erfüllt, so ist sie auch für die restlichen 3 Felder gültig. Das heißt aber:

Satz 151.1: Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse bleibt erhalten, wenn man eines davon durch sein Gegenereignis ersetzt.
Also:

$$\begin{aligned} A \text{ und } B \text{ unabhängig} &\Leftrightarrow \bar{A} \text{ und } B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \text{ und } \bar{B} \text{ unabhängig} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{A} \text{ und } \bar{B} \text{ unabhängig.} \end{aligned}$$

Stochastische Unabhängigkeit im Baumdiagramm.
Aus dem gerade formulierten Satz 151.1 folgt unmittelbar: Sind A und B stochastisch unabhängig, so gilt

$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ und
$P_A(\bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) = P(\bar{B})$.

Das bedeutet, daß auf den Ästen der 2. Stufe statt der bedingten Wahrscheinlichkeiten die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ bzw. $P(\bar{B})$ stehen. Figur 151.1 und 151.2 veranschaulichen dies.

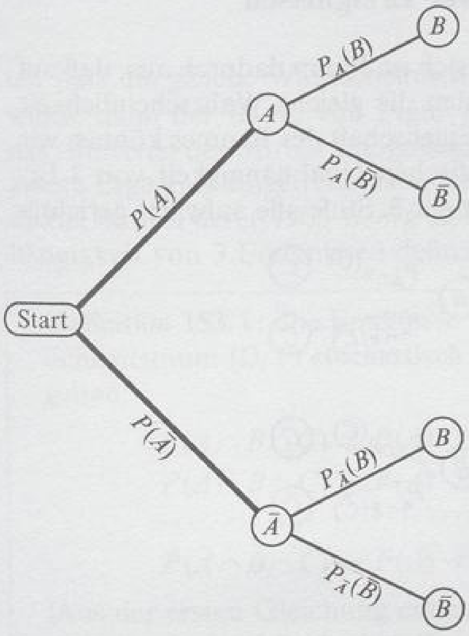


Fig. 151.1 Ein Baum für beliebige Ereignisse A und B

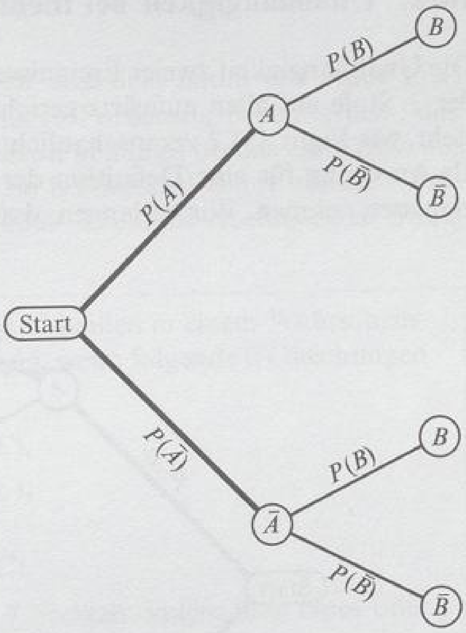


Fig. 151.2 Ein Baum für zwei unabhängige Ereignisse A und B

Wir stellen fest: Infolge der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse stehen an allen aufwärts gerichteten Ästen der 2. Stufe die gleichen Wahrscheinlichkeiten, ebenso an allen abwärts gerichteten Ästen.

Zum Schluß stellen wir die Begriffe der *Unvereinbarkeit* und der *Unabhängigkeit*, die man keinesfalls verwechseln darf, einander gegenüber:

> A und B **unvereinbar** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
> Für *jede* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt dann der **spezielle Summensatz** für Wahrscheinlichkeiten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
> A und B **unabhängig** in $(\Omega, P) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, d.h., für die *gegebene* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt ein **spezieller Produktsatz** für Wahrscheinlichkeiten und umgekehrt.

Man beachte also den Unterschied: Ob zwei Ereignisse A und B unvereinbar sind oder nicht, ist allein durch den Ergebnisraum Ω festgelegt, in dem A und B Teilmengen sind. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung P über Ω eingeführt ist, spielt dabei überhaupt keine Rolle. Die stochastische Unabhängigkeit von A und B dagegen ist eine Eigenschaft der Ereignisse *bei gegebener* Wahrscheinlichkeitsverteilung P, also eine Eigenschaft des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P). Wählt man zum gleichen Ergebnisraum Ω und zu den gleichen Ereignissen A und B eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung, so geht im allgemeinen eine zuvor bestehende Unabhängigkeit von A und B verloren. (Vgl. Aufgabe 161/**29**.)

10.2. Unabhängigkeit bei mehr als zwei Ereignissen

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse drückt sich im Baum dadurch aus, daß auf der 2. Stufe auf allen aufwärts gerichteten Ästen die gleiche Wahrscheinlichkeit steht, wie Figur 151.2 veranschaulicht. Diese Eigenschaft des Baumes können wir als Anregung für eine Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen nehmen. Wir verlangen, daß auch in der 3. Stufe alle aufwärts gerichte-

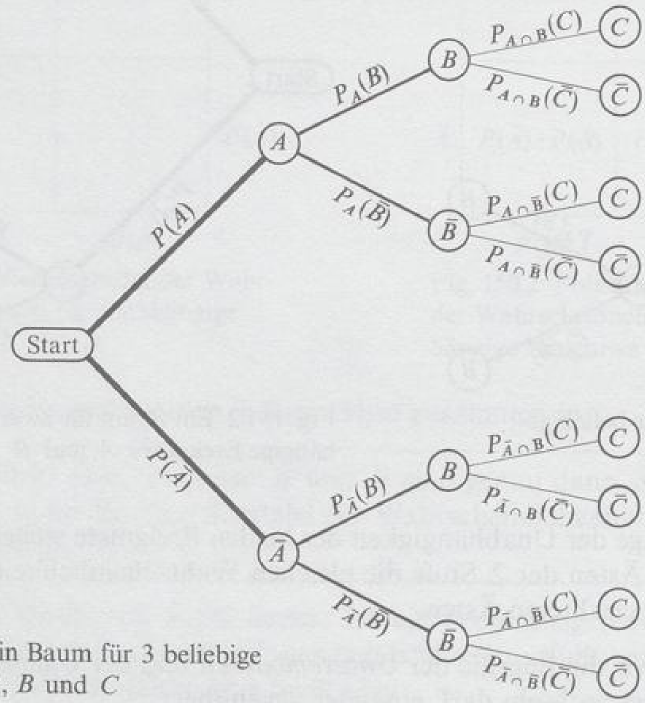


Fig. 152.1 Ein Baum für 3 beliebige Ereignisse A, B und C

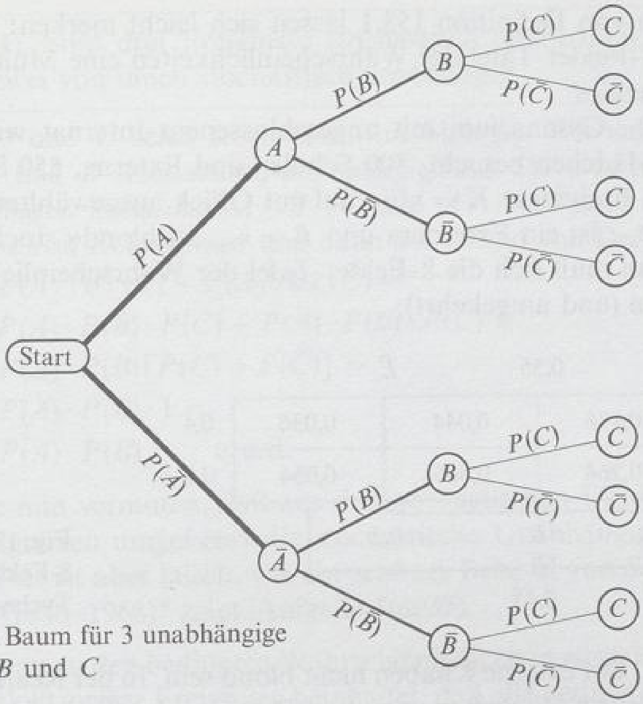


Fig. 153.1 Ein Baum für 3 unabhängige Ereignisse A, B und C

ten Äste die gleiche Wahrscheinlichkeit tragen. Aus dem Baum von Figur 152.1 würde dann der Baum von Figur 153.1. Unsere Forderung bedeutet also, daß das Eintreten des dritten Ereignisses nicht davon abhängt, ob das erste bzw. das zweite Ergeignis eingetreten ist oder nicht. Die 1. Pfadregel liefert uns die 8 Produkte, mittels derer 1908 *Georg Bohlmann* (1869–1928) die stochastische Unabhängigkeit von 3 Ereignissen definierte:

Definition 153.1: Die Ereignisse A, B und C heißen in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) **stochastisch unabhängig,** wenn folgende 8 Gleichungen gelten:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$
$$P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}).$$

(Aus der ersten Gleichung entstehen die 7 übrigen, indem man eines oder mehrere der drei Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt.)

Die Untersuchung der Unabhängigkeit von 3 Ereignissen kann sehr mühsam sein. Man müßte nämlich alle 8 Gleichungen prüfen. Tatsächlich genügt es aber, 4 geeignet ausgewählte Gleichungen zu verifizieren. (Aufgabe 163/**40**)

Aus der Struktur der geforderten 8 Gleichungen erkennt man sofort, daß die Unabhängigkeit von 3 Ereignissen erhalten bleibt, wenn man eines oder mehrere durch ihr Gegenereignis ersetzt.

Die 8 Gleichungen von Definition 153.1 lassen sich leicht merken: Sie besagen nämlich, daß die 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten eine Multiplikationstafel ist. Dazu folgendes

Beispiel: Das Tyche-Gymnasium mit angeschlossenem Internat wird von 400 Knaben und 600 Mädchen besucht. 800 Schüler sind Externe, 550 Schüler sind blond. Wenn die 3 Ereignisse $K :=$ »Ein auf gut Glück ausgewählter Schüler ist ein Knabe«, $E :=$ »... ist ein Externer« und $B :=$ »... ist blond« stochastisch unabhängig sind, dann muß sich die 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten von Figur 154.1 ergeben (und umgekehrt):

0,55

	E			$\bar{E}$	
K	0,144	0,176	0,044	0,036	0,4
$\bar{K}$	0,216	0,264	0,066	0,054	0,6
	0,8	B		0,2	
		$\bar{B}$			

0,45

Fig. 154.1
8-Felder-Tafel zum Tyche-Gymnasium.

Es müßten also u. a. 144 externe Knaben nicht blond sein. In der Realität hat man es aber nur mit relativen Häufigkeiten zu tun. Dann wird selbst bei Unabhängigkeit die analoge Produktformel $h_n(A \cap B) = h_n(A) \cdot h_n(B)$ nur angenähert gelten. Man muß im Einzelfall entscheiden, ob die Abweichung zufallsbedingt ist oder ob wirklich Abhängigkeit vorliegt. Diese Entscheidung ist ein Problem der Beurteilenden Statistik.

Unsere übliche Vorstellung von Unabhängigkeit drückt sich z. B. so aus, daß der Anteil der Blonden an der Gesamtschülerschaft genauso groß ist wie der Anteil der Blonden unter den Knaben bzw. wie der Anteil unter den Externen und sogar wie der Anteil unter den externen Knaben. Überprüfen wir diese anschauliche Vorstellung an der Mehrfeldertafel von Figur 154.1:

$$P(B) = 0{,}55\,,$$

$$P_K(B) = \frac{P(K \cap B)}{P(K)} = \frac{0{,}176 + 0{,}044}{0{,}4} = \frac{22}{40} = 0{,}55\,,$$

$$P_E(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E)} = \frac{0{,}176 + 0{,}264}{0{,}8} = \frac{44}{80} = 0{,}55\,,$$

$$P_{K \cap E}(B) = \frac{P(K \cap E \cap B)}{P(K \cap E)} = \frac{0{,}176}{0{,}176 + 0{,}144} = \frac{176}{320} = 0{,}55\,,$$

womit unsere Vorstellung bestätigt ist.

Wir werden später diesem Zusammenhang zwischen bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten noch nachgehen. Zunächst aber wollen wir eine weitere anschauliche Vorstellung von der Unabhängigkeit dreier Ereignisse in unserem Modell überprüfen. Man hat doch den Eindruck, daß, wenn sich 3 Ereignisse nicht beeinflussen, dann auch irgend zwei davon keinen Einfluß aufeinander haben. Tatsächlich gilt in unserem stochastischen Modell

Satz 155.1: Sind drei Ereignisse stochastisch unabhängig, so sind auch schon je zwei von ihnen stochastisch unabhängig.

Beweis: A, B und C seien stochastisch unabhängig. Wir zeigen exemplarisch, daß dann A und B stochastisch unabhängig sind. Dazu zerlegen wir $A \cap B$ in die unvereinbaren Ereignisse $A \cap B \cap C$ und $A \cap B \cap \bar{C}$ und erhalten mit Hilfe des 3. Axioms von *Kolmogorow* und dann auf Grund von Definition 153.1:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = \\ &= P(A) \cdot P(B)[P(C) + P(\bar{C})] = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot 1 = \\ &= P(A) \cdot P(B), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Man könnte nun vermuten, daß aus der stochastischen Unabhängigkeit von je 2 aus 3 Ereignissen umgekehrt die stochastische Unabhängigkeit aller 3 Ereignisse folgt. Das ist aber falsch, wie ein schönes Beispiel von *Sergei Natanowitsch Bernschtein* (1880–1968)* zeigt (Aufgabe 162/**35**).

Kehren wir nun zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten zurück. Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse beinhaltet, daß alle bedingten Wahrscheinlichkeiten gleich den zugehörigen unbedingten Wahrscheinlichkeiten sind, wie auf Seite 151 gezeigt wurde. Es ist also z.B. $P_{\bar{B}}(A) = P(A)$. Dies gilt in analoger Weise auch bei 3 Ereignissen. Unter Verwendung von Definition 148.1 bzw. 153.1 und Satz 155.1 erhalten wir z.B., wenn A, B und C stochastisch unabhängig sind und die jeweiligen bedingten Wahrscheinlichkeiten existieren,

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(C)}{P(A)} = P(C) \quad \text{oder}$$

$$P_{A \cap \bar{C}}(B) = \frac{P(A \cap \bar{C} \cap B)}{P(A \cap \bar{C})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{C}) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(\bar{C})} = P(B) \quad \text{oder}$$

$$P_B(\bar{A} \cap C) = \frac{P(\bar{A} \cap C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(C) \cdot P(B)}{P(B)} = P(\bar{A}) \cdot P(C) = P(\bar{A} \cap C).$$

Wir wurden zu unserer Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen durch Betrachtung des Baumes von Figur 153.1 angeregt. Bei 3 Ereignissen kann man aber 6 verschiedene Bäume zeichnen! Hätte ein anderer Baum zu einer anderen Definition geführt? Nein; denn die soeben durchgeführten Überlegungen über die bedingten Wahrscheinlichkeiten zeigen, daß bei all diesen 6 Bäumen die kennzeichnende Eigenschaft der stochastischen Unabhängigkeit erfüllt ist: Auf allen aufwärts gerichteten Ästen jeder Stufe ist jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit zu finden. Jeder der 6 Bäume liefert also dieselben 8 Gleichungen.

Es liegt nun auf der Hand, wie *Georg Bohlmann* (1869–1928) auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß 1908 Definition 153.1 sinnvoll auf n Ereignisse erweiterte:

* Бернштейн – Siehe Seite 394.

Definition 156.1: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) **stochastisch unabhängig,** wenn folgende 2^n Gleichungen gelten:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n).$$

(Aus der ersten Gleichung entstehen die übrigen, indem man eines oder mehrere der n Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt.)

Auch in diesem allgemeinen Fall muß man nicht alle 2^n Gleichungen nachprüfen, um die Unabhängigkeit der n Ereignisse zu gewährleisten. (Vgl. Aufgabe 163/**45**.) Satz 155.1 läßt sich ebenfalls auf n Ereignisse verallgemeinern:

Satz 156.1: In einer Menge von stochastisch unabhängigen Ereignissen sind stets auch beliebig daraus ausgewählte Ereignisse stochastisch unabhängig.

Den **Beweis** dieses Satzes wollen wir Aufgabe 163/**44** überlassen.

Und schließlich drückt sich die stochastische Unabhängigkeit von n Ereignissen auch wiederum darin aus, daß alle bedingten Wahrscheinlichkeiten genauso groß sind wie die zugehörigen unbedingten Wahrscheinlichkeiten.

Aufgaben

Zu 10.1.

1. Untersuche beim Roulettspiel (Seite 22f.) die Ereignisse $A :=$ »pair«, $B :=$ »douze premier« und $C :=$ »rouge« paarweise auf stochastische Unabhängigkeit, falls es sich
   a) um das übliche Roulett, **b)** um ein Roulett ohne die Null handelt.
2. Von *Francis Galton* (1822–1911)* stammt eine Untersuchung der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Mit $V :=$ »Vater helläugig« und $S :=$ »Sohn helläugig« fand er folgende Anzahlen:

	S	$\bar{S}$
V	471	151
$\bar{V}$	148	...

   Ergänze die Tabelle, erstelle eine vollständige 4-Feldertafel der Wahrscheinlichkeiten und beurteile die Unabhängigkeit der Augenfarben von Vater und Sohn.
3. Eine Urne enthält 3 weiße und 5 schwarze Kugeln, eine andere Urne 2 weiße und 8 schwarze Kugeln.
   a) Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Es sei $W_i :=$ »Aus der Urne i wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind W_1 und W_2 unabhängig?
   b) Die Urneninhalte werden zusammengeschüttet und mit Zurücklegen 2mal eine Kugel gezogen. Nun bedeute $W_i :=$ »Beim i-ten Zug wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind W_1 und W_2 unabhängig?

* Siehe Seite 407.

4. In einer Urne sind 10 schwarze, 3 rote und 2 grüne Kugeln. Untersuche die Ereignisse $A := $ »Schwarz beim 1. Zug« und $B := $ »Kein Grün beim 5. Zug« auf stochastische Unabhängigkeit, falls die Entnahme

a) mit Zurücklegen, **b)** ohne Zurücklegen erfolgt.

• **5.** Aus einer Urne mit 2 roten Kugeln und 1 grünen Kugel wird zweimal nacheinander mit Zurücklegen 1 Kugel gezogen. Untersuche alle 2elementigen Ereignisse des 4elementigen Ergebnisraumes paarweise auf Unabhängigkeit.

6. Jemand wählt auf gut Glück eine natürliche Zahl. Untersuche folgende Eigenschaften der ausgewählten Zahl auf ihre Unabhängigkeit:

a) Teilbarkeit durch 2; Teilbarkeit durch 3,

b) Teilbarkeit durch 5; Teilbarkeit durch 10.

c) Löse die Aufgaben **a)** und **b)**, wenn nur eine der Zahlen $0, \ldots, 9$ gewählt werden kann.

7. Eine Statistik über das Rauchen bei amerikanischen Frauen (Februar 1955):

Einkommen in $	Anzahl der befragten Personen	gewohnheitsmäßiger täglicher Zigarettenverbrauch in % 1 bis 9	10 bis 20	21 bis 40
ohne	3335	13,4	15,1	0,8
unter 1000	1677	14,1	11,2	0,5
1000 bis 1999	1117	14,5	11,0	3,0
2000 bis 2999	956	12,2	15,5	0,6
mind. 3000	375	10,2	27,6	2,1
insgesamt	7460	13,4	14,3	1,1

Aus der befragten Personenmenge wird eine Frau beliebig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) verdient sie mindestens 3000 Dollar,

b) raucht sie regelmäßig 10 bis 20 Zigaretten täglich,

c) verdient sie mindestens 3000 Dollar und raucht 10 bis 20 Zigaretten täglich?

d) Sind die Ereignisse **a)** und **b)** unabhängig?

8. Theodor und Dorothea sind öfters montags krank, und zwar Theodor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und Dorothea mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Es kommt nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ vor, daß sie am Montag beide im Unterricht anwesend sind. Man prüfe durch Rechnung, ob die montägliche Erkrankung von Theodor und Dorothea unabhängige Ereignisse sind.

9. Ein Angestellter geht an 10 von 30 Tagen vorzeitig aus dem Büro weg. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 ruft ein Kunde kurz vor Dienstschluß bei ihm an. Wie wahrscheinlich ist es, daß ein Kunde verärgert wird? (Rechtfertige auch die Unabhängigkeitsannahme!)

10. Herr A stellt fest, daß bei 20 Fahrten mit der S-Bahn einmal seine Fahrkarte kontrolliert wird. Er beschließt daraufhin verwerflicherweise, auf Kosten anderer zu fahren und bei 3% seiner Fahrten keine Fahrkarte zu lösen. Dies hat zur Folge, daß er in 2 von 1000 Fahrten von einer Kontrolle ohne Fahrkarte überrascht wird.
Lege eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten an. Sind die Ereignisse »A besitzt eine gültige Fahrkarte« und »A wird kontrolliert« stochastisch unabhängig?

11. In einem Hotel übernachten 3 Reisegruppen. Die erste besteht aus 2 Damen und 6 Herren, die zweite aus 4 Damen und 20 Herren und die dritte aus 7 Damen und 13 Herren. An einem Empfang soll ein Vertreter aus diesen drei Gruppen teilnehmen. Er wird durch das Los bestimmt. Wir betrachten die Ereignisse $D := $ »Es wird eine Dame ausgelost« und $G_i := $ »Es wird ein Mitglied der Gruppe Nr. i ausgelost«. Untersuche folgende Ereignispaare auf Unabhängigkeit:

a) D und G_i $(i = 1, 2, 3)$; **b)** G_i und G_k $(i \neq k)$; **c)** D und $G_i \cup G_k$ $(i \neq k)$.

12. Die Beleuchtung eines Ganges kann von zwei Enden aus geschaltet werden. Sind beide Schalterhebel oben oder beide unten, brennt die Lampe, sonst nicht. Die Schalter werden unabhängig voneinander regellos bedient. In einem beliebig gewählten Beobachtungszeitpunkt steht jeder Schalter mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf »oben«.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt das Licht im Beobachtungszeitpunkt?
b) Sind die Ereignisse »Schalter 1 (bzw. 2) oben« und »Licht brennt« unabhängig?

13. Wir fassen Tabelle 10.1 als eine Serie von 600 Doppelwürfen auf. Tabelle 158.1 zeigt die Auswertung. Von jedem der 36 möglichen Ergebnisse ist angegeben, wie oft es bei den 600 Versuchen aufgetreten ist. Zum Beispiel: »Doppel-Eins« 20mal, »Eins-Sechs« 12mal, »Sechs-Eins« 15mal.

		Augenzahl beim 2. Wurf					
		1	2	3	4	5	6
Augenzahl beim 1. Wurf	1	20	23	7	10	23	12
	2	12	25	18	14	19	24
	3	18	21	21	16	20	12
	4	10	19	16	13	9	8
	5	17	21	17	14	16	16
	6	15	23	17	13	22	19

Tab. 158.1 600 Doppelwürfe eines Würfels

a) Wie oft trat die Eins (Zwei, ...) beim 1. Wurf auf, wie oft beim 2. Wurf?
•**b)** Wir wollen annehmen, die relativen Häufigkeiten von Eins usw. beim 1. bzw. 2. Wurf seien genau gleich den Wahrscheinlichkeiten P(»Eins beim 1. Wurf«) usw. und die Augenzahlen treten beim 1. und 2. Wurf unabhängig voneinander auf. Welche »Idealwerte« (Brüche!) würden sich daraus für die 36 Felder der Tabelle ergeben?
(Die mathematische Statistik hätte die Frage zu klären, ob die Abweichungen der wirklich erschienenen Werte von den Idealwerten noch als »zufällig« betrachtet werden können.)

14. Erfahrungsgemäß haben 12% eines Abiturjahrgangs die 7. Klasse, 9% die 9. Klasse wiederholt. Nimm an, daß das Wiederholen dieser Klassen unabhängig erfolgt. Wieviel Prozent haben
a) keine der beiden Klassen,
b) die 7., aber nicht die 9. Klasse wiederholt?

15. Von den Autos, die in regelloser Folge auf einer Straße gefahren kommen, sind $\frac{2}{3}$ Pkw und $\frac{1}{3}$ Lkw. 75% der Pkw sind nur mit 1 Person besetzt, 10% der Lkw sind mit 2 oder mehr Personen besetzt.
a) Zeige die Abhängigkeit folgender Ereignisse: »Das nächste Fahrzeug ist ein Lkw« – »Im nächsten Fahrzeug sitzen mindestens 2 Personen«.
b) Bei welchem anderen Anteil der Lkw und sonst unveränderten Daten wären die Ereignisse unabhängig?

16. Beweise: $P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

17. **a)** Ist die Relation »stochastisch unabhängig« transitiv, d.h., gilt der folgende Satz?

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ und } B \text{ stochastisch unabhängig} \\ B \text{ und } C \text{ stochastisch unabhängig} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ und } C \text{ stochastisch unabhängig}$$

Hinweis: Verwende die Erkenntnisse von Aufgabe **1. b)**.
b) Zeige an einem Gegenbeispiel, daß die Relation »stochastisch abhängig« nicht transitiv ist.

18. **a)** Von der 4-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten für die unabhängigen Ereignisse A und B sind die 2 Zahlen von Figur 159.1a gegeben. Berechne $P(A)$ und $P(B)$ und vervollständige die Tafel.

•**b)** Gleiche Aufgabe wie **a)** mit den Zahlen der Figur 159.1b.

a)

	B	$\bar{B}$
A	0,4	0,1
$\bar{A}$		

b)

	B	$\bar{B}$
A	0,12	
$\bar{A}$		0,32

Fig. 159.1 Zu Aufgabe **18**

19. Die Ereignisse A und B seien unabhängig, a und b ihre Wahrscheinlichkeiten. Gib mit Hilfe von a und b die Wahrscheinlichkeit an, daß

a) weder A noch B, **b)** entweder A oder B,
c) wenigstens eines der Ereignisse, **d)** nicht beide Ereignisse eintreten.

20. Die Annahme der Unabhängigkeit spielt in der Praxis eine besonders wichtige Rolle im Versicherungswesen. Die ersten Rechengrundlagen für Lebensversicherungen sind die »Allgemeinen Sterbetafeln« (siehe Tabelle 159.1)*

x	l_x		x	l_x		x	l_x		x	l_x	
	männl.	weibl.		männl.	weibl.		männl.	weibl.		männl.	weibl.
0	100000	100000									
1	97400	98016	26	94705	96694	51	87104	92260	76	35601	56774
2	97249	97888	27	94555	96632	52	86369	91806	77	32373	53323
3	97152	97810	28	94405	96567	53	85574	91323	78	29212	49702
4	97067	97745	29	94253	96499	54	84717	90813	79	26137	45934
5	96989	97690	30	94097	96429	55	83789	90272	80	23167	42046
6	96918	97641	31	93937	96355	56	82779	89696	81	20321	38076
7	96854	97597	32	93773	96276	57	81673	89078	82	17619	34071
8	96795	97558	33	93604	96190	58	80460	88411	83	15083	30091
9	96741	97523	34	93429	96098	59	79130	87689	84	12735	26204
10	96692	97492	35	93245	95997	60	77675	86903	85	10595	22478
11	96647	97465	36	93049	95886	61	76087	86044	86	8678	18974
12	96604	97439	37	92838	95764	62	74357	85101	87	6990	15744
13	96561	97413	38	92610	95632	63	72477	84062	88	5529	12826
14	96515	97384	39	92361	95488	64	70440	82915	89	4287	10245
15	96459	97349	40	92089	95331	65	68242	81647	90	3251	8016
16	96383	97305	41	91794	95161	66	65882	80250	91	2407	6139
17	96273	97251	42	91475	94975	67	63361	78713	92	1735	4597
18	96118	97189	43	91131	94773	68	60685	77027	93	1215	3362
19	95927	97124	44	90761	94551	69	57864	75179	94	824	2400
20	95732	97059	45	90363	94308	70	54909	73157	95	539	1671
21	95541	96996	46	89934	94042	71	51838	70948	96	339	1134
22	95357	96934	47	89468	93750	72	48673	68539	97	204	750
23	95182	96874	48	88958	93427	73	45438	65920	98	117	483
24	95016	96815	49	88398	93072	74	42161	63084	99	64	303
25	94858	96755	50	87781	92683	75	38872	60033	100	33	185

Tab. 159.1 Allgemeine Sterbetafel 1970/72 für die Bundesrepublik Deutschland
Quelle: Statistisches Jahrbuch 1975 für die Bundesrepublik Deutschland

* Man gewinnt sie aus den wirklichen Sterbeziffern. Mit Hilfe von Ausgleichsverfahren wird eine Folge von Sterbewahrscheinlichkeiten für alle 0-, 1-, 2-, ...jährigen errechnet. Ausgehend von einem willkürlichen Ausgangswert l_0 (z.B. 100000) erhält man dann die Anzahl l_x der im Alter x wahrscheinlich noch Lebenden.

International sind folgende Bezeichnungen üblich:
Mit x wird das Alter in Jahren angegeben. Dabei zählt eine Person als x-jährig, wenn ihr Lebensalter dem Intervall $[x; x+1[$ angehört. Ferner bedeuten
$(x) :=$ eine Person ist x-jährig.
$l_x :=$ Anzahl der lebenden x-jährigen
$p_x := \frac{l_{x+1}}{l_x} =$ Wahrscheinlichkeit, daß ein x-jähriger mindestens $(x+1)$-jährig wird
(p_x heißt Erlebenswahrscheinlichkeit im Alter x.)
$q_x := 1 - p_x$ heißt Sterbewahrscheinlichkeit im Alter x.
${}_np_x :=$ Wahrscheinlichkeit, daß ein x-jähriger mindestens $(x+n)$-jährig wird. Offensichtlich ist ${}_1p_x = p_x$.

a) Beweise die Richtigkeit folgender Aussagen:

1) ${}_np_x = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$

2) $l_x = {}_xp_0 \cdot l_0$

3) $l_{x+n} = {}_np_x \cdot l_x$

b) Berechne unter Verwendung von Tabelle 159.1

1) die Sterbewahrscheinlichkeiten q_0 und q_1 (Was besagen diese Ergebnisse?),

2) die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger, ein 40jähriger, ein 60jähriger bzw. ein 80jähriger mindestens 1 Jahr älter werden,

3) die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger zwar 40jährig, aber nicht mehr 50jährig wird.

c) Welche Werte ergeben sich in Aufgabe **b)** für Frauen?

d) Ein 35jähriger Mann heiratet eine 10 Jahre jüngere Frau. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren

1) beide noch leben,
2) keiner mehr lebt,
3) genau einer noch am Leben ist,
4) die Frau den Mann überlebt,
5) der Mann die Frau überlebt,
6) höchstens einer noch lebt?

21. Es bedeuten $K :=$ »Knabe« und $L :=$ »Linkshänder«. Welche Folgerungen können aus $P(K \cap L) < P(K) \cdot P(L)$ bzw. $P(K \cap L) > P(K) \cdot P(L)$ gezogen werden?

•22. »Wer lügt, der stiehlt«. – Angenommen, dieses Vorurteil wäre stichhaltig. Ich treffe Herrn X. Welche Ungleichung müßte für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $L :=$ »Herr X. ist ein Lügner«, $D :=$ »Herr X. ist ein Dieb« und $L \cap D$ bestehen?

23. Zeige: **a)** Das sichere Ereignis und jedes andere Ereignis sind unabhängig.
b) Das unmögliche Ereignis und jedes andere Ereignis sind unabhängig.

•24. a) »Wenn A und B unvereinbar sind, dann sind A und B abhängig.«
Welche Voraussetzung muß über $P(A)$ und $P(B)$ noch gemacht werden, damit die Behauptung wahr wird? Beweise sie.

b) Formuliere den Kehrsatz des Satzes aus **a)** und zeige an einem Beispiel, daß er *falsch* ist.

25. Nenne alle Ereignisse A, für die gilt: A und A sind unabhängig.

26. Die nicht-transitiven Würfel von *Bradley Efron*. Vier L-Würfel werden beschriftet, und zwar Würfel I mit 3mal 1 und 3mal 5, Würfel II mit 2mal 0 und 4mal 4, Würfel III mit lauter Dreiern und Würfel IV schließlich 4mal mit 2 und 2mal mit 6. Dorothea gestattet Theodor, einen der Würfel zu wählen. Sie nimmt dann einen der drei restlichen. Dann werfen beide ihren Würfel. Sieger ist derjenige, der die größere Augenzahl geworfen hat.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt I gegen II, II gegen III und III gegen IV? Welcher Würfel ist wohl der beste?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt I gegen IV?
Welcher der beiden Spieler ist bei geschicktem Spiel im Vorteil?
Warum nennt man die Würfel nicht-transitiv?

c) Untersuche **a)** und **b)** für die Würfel
2, 3, 3, 9, 10, 11 – 0, 1, 7, 8, 8, 8 – 5, 5, 6, 6, 6, 6 – 4, 4, 4, 4, 12, 12.

27. Nicht-transitive Glücksräder nach *Dietrich Morgenstern.* Drei Glücksräder mit jeweils gleich großen Sektoren tragen die Aufschriften 1, 6, 8 bzw. 3, 5, 7 bzw. 2, 4, 9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlägt jedes Glücksrad in zyklischer Reihenfolge das darauffolgende?

28. In einer Urne befinden sich zwölf von 1 bis 12 numerierte Kugeln. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Als Ergebnisraum verwende man $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

a) Zeige, daß die Ereignisse $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{1, 4, 7, 10\}$ unabhängig sind.

b) Gib ein zum Ereignis $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ unabhängiges Ereignis C mit $P(C) = 0{,}5$ an. – Wie viele derartige Ereignisse $C \subset \Omega$ gibt es?

c) Begründe, warum zwei Ereignisse $D \subset \Omega$ und $E \subset \Omega$ mit $P(D) = P(E) = \frac{3}{4}$ abhängig sind.

29. In Urne 1 liegen 1 weiße und 1 schwarze Kugel, in Urne 2 dagegen 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Es werde jeweils 2mal eine Kugel mit Zurücklegen entnommen. Wir definieren $S_i^j :=$ »Beim i-ten Zug wird aus Urne j eine schwarze Kugel gezogen«, $i, j \in \{1; 2\}$.

a) Zeige, daß S_1^j und S_2^j für $j = 1; 2$ stochastisch unabhängig sind.

b) Nun werde vor dem Ziehen eine L-Münze geworfen. Fällt Adler, so wird nur aus Urne 1 gezogen, andernfalls nur aus Urne 2. Es bedeute $S_i :=$ »Beim i-ten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen«, $i = 1; 2$. Untersuche, ob S_1 und S_2 stochastisch unabhängig sind.

c) Das Verfahren von **b)** wird nun so abgeändert, daß vor *jedem* Zug die L-Münze geworfen wird. Untersuche für diesen Fall die stochastische Unabhängigkeit von S_1 und S_2.

d) Das Verfahren von **b)** werde jetzt folgendermaßen abgeändert: Die L-Münze bestimmt, aus welcher Urne der erste Zug erfolgt. Zieht man eine weiße Kugel, so wird die Urne für den zweiten Zug gewechselt; andernfalls behält man sie bei. Untersuche S_1 und S_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

e) Beim Verfahren **b)** zeigte sich, daß durch das Werfen einer L-Münze die stochastische Unabhängigkeit verlorengeht. Man nehme daher ein Glücksrad, das in zwei Sektoren aufgeteilt ist, die die Nummern 1 und 2 tragen. Es werden die beiden Züge aus derjenigen Urne getan, deren Nummer das Glücksrad bestimmt. Welchen Winkel muß der Sektor 1 tragen, damit die Ereignisse S_1 und S_2 stochastisch unabhängig sind?

f) Die S_i konnten in den Aufgaben **b)** – **e)** umgangssprachlich gleich beschrieben werden. Die verschiedenen Resultate sind also darauf zurückzuführen, daß die Unabhängigkeit in verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen untersucht wurde. Gib zu den Experimenten aus **a)** – **e)** jeweils einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an.

Zu 10.2.

30. Gegeben ist: $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}2$; $P(C) = 0{,}3$. Fülle eine 8-Felder-Tafel (Muster: Figur 154.1) so aus, daß A, B und C unabhängig werden.

31. Die Ereignisse A, B und C seien stochastisch unabhängig. Ergänze die in Figur 162.1 teilweise gegebenen 8-Felder-Tafeln der Wahrscheinlichkeiten. Anleitung zu **a)**: Berechne zuerst der Reihe nach $P(A \cap B)$, $P(C)$, $P(B \cap C)$, $P(A)$ und $P(B)$.

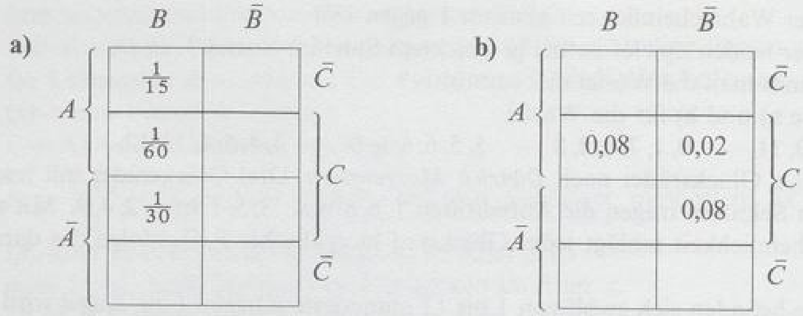


Fig. 162.1 Zu Aufgabe **31**

32. Bei einem Einbruch beschreiben die Zeugen den Täter als langhaarigen jungen Mann, der mit einer Lederjacke und mit Jeans bekleidet war. Es wurde ein Mann festgenommen, auf den diese drei Eigenschaften zutreffen. Er leugnet, aber der Staatsanwalt argumentiert: »$\frac{1}{4}$ unserer jungen Männer sind langhaarig; jeder zwanzigste trägt eine Lederjacke und $\frac{3}{4}$ tragen Jeans. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese 3 Eigenschaften zusammentreffen, beträgt $\frac{3}{320}$, also weniger als 1%. Damit sind Sie überführt!«
Was sagst du als Verteidiger zu dieser Beweisführung?

33. In einer Volkshochschule, die u. a. Kurse in Englisch, Französisch und Spanisch anbietet, haben sich 500 Hörer eingeschrieben. 311 Hörer haben mindestens einen der Sprachkurse belegt. 6 Hörer besuchen alle 3 Kurse, 21 nehmen nur am Spanischunterricht teil. Englisch findet mehr Interesse als Französisch.

a) Stelle eine 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten auf unter der Voraussetzung, daß die Ereignisse »Ein beliebig ausgewählter Hörer belegte Sprachkurs X« ($X \in$ {Englisch, Französisch, Spanisch}) unabhängig sind.

b) Wie viele Hörer belegten
1) Englisch, **2)** nur Englisch, **3)** Französisch und Spanisch,
4) Französisch oder Spanisch, **5)** Französisch, aber nicht Spanisch?

c) Erstelle eine 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten bezogen auf die Grundmenge derjenigen Hörer, die mindestens eine der Sprachen belegt haben. Sind jetzt die Ereignisse aus **a)** noch unabhängig?

34. Vier Sonntagsjäger mit der Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ bzw. $\frac{5}{10}$ schießen gleichzeitig auf einen Hasen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Hase
1) überhaupt getroffen, **2)** genau einmal getroffen?

•**b)** Welche Trefferanzahl ist am wahrscheinlichsten?

35. Beispiel von *Bernschtein*: Von den 4 Flächen eines Tetraeders ist eine rot, die zweite grün und die dritte blau bemalt. Die vierte Fläche zeigt alle drei Farben. R bedeute »Das Tetraeder fällt auf eine Fläche, die rote Farbe trägt«. Analog sind die Ereignisse B und G definiert. Zeige, daß R, G und B paarweise stochastisch unabhängig sind, insgesamt aber abhängig.

36. In einer Urne liegen je eine rote, grüne, blaue und schwarze Kugel. Man zieht eine Kugel und betrachtet die Ereignisse
$A :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder grün«,
$B :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder blau«,
$C :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder schwarz«.
Zeige, daß diese 3 Ereignisse paarweise unabhängig sind, insgesamt aber abhängig.

•**37.** Anton und Berta wetteifern im Bogenschießen. Sie treffen das Ziel mit den Wahrscheinlichkeiten 0,6 bzw. 0,7. Es wird je zweimal geschossen; wer öfter trifft, hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anton?

38. 5 Freunde besuchen öfters eine Wirtschaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man sie an einem beliebig herausgegriffenen Tag alle versammelt, wenn sie

a) regelmäßig kommen, der erste jeden 2. Tag, der 2. jeden 3. Tag, ..., der 5. jeden 6. Tag, und wenn sie heute alle zusammen sind?

b) regellos kommen, der erste mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \ldots$, der fünfte mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$?

39. $E_1, \ldots, E_n$ seien unabhängige Ereignisse mit $P(E_k) = \frac{1}{k+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Berechne P(»Keines der E_k tritt ein«).

40. Zeige, daß 3 Ereignisse bereits stochastisch unabhängig sind, wenn 4 Gleichungen, die geeignet aus den 8 Gleichungen von Definition 153.1 ausgewählt wurden, erfüllt sind.

•**41.** Ein Zufallsmechanismus liefert die Zahlen 1 bis 16 mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Es sind die Ereignisse $A := \{1, \ldots, 8\}$, $B := \{2, \ldots, 5, 9, \ldots, 12\}$ und $C := \{4, \ldots, 8, 11, 12, 13\}$ zu untersuchen. Zeige, daß für sie 4 der Gleichungen aus Definition 153.1 gelten und die Ereignisse trotzdem abhängig sind.

•**42.** In manchen Lehrbüchern findet man folgende Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen:
A, B und C heißen stochastisch unabhängig dann und nur dann, wenn die folgenden 4 Gleichungen erfüllt sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),\ P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A) \quad \text{und}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Zeige, daß diese Definition und unsere Definition 153.1 äquivalent sind.

43. **a)** Zeige: Das *Simpson*-Paradoxon (Aufgabe 140/**18**) kann nicht eintreten, wenn z.B. die Ereignisse B und C stochastisch unabhängig sind.

b) Weise nach, daß die betreffenden Ereignisse B und C aus Aufgabe 140/**18** stochastisch abhängig sind.

••**44.** Beweise Satz 156.1.

••**45.** In manchen Lehrbüchern definiert man: Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig dann und nur dann, wenn

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

für alle k-Mengen aus $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ mit $2 \leqq k \leqq n$ erfüllt ist.

a) Wie viele Gleichungen sind zu überprüfen?

b) Zeige, daß diese Definition und Definition 156.1 äquivalent sind.

46. $A_1, A_2, \ldots, A_5$ sind stochastisch unabhängig. Zeige, daß dann beispielsweise auch die Ereignisse $\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ und A_5 stochastisch unabhängig sind.