Stochastik

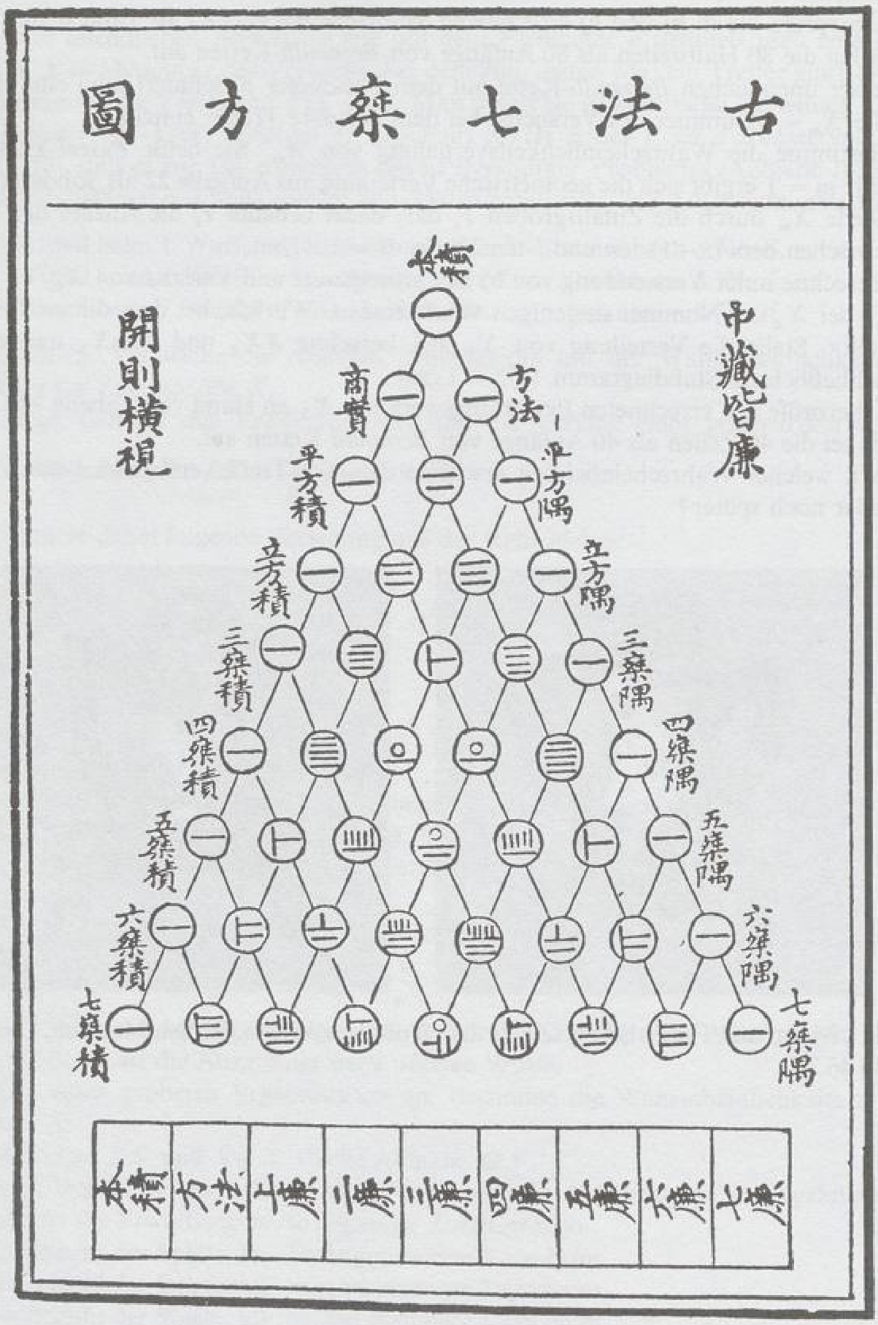
Barth, Friedrich

München, [20]03

14. Die Binomialverteilung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

14. Die Binomialverteilung



Das Arithmetische Dreieck des *Zhu Shi-Jie* aus dem *Kostbaren Spiegel der vier Elemente* (1303). Es trägt den Titel: Altes Schema der 7 vervielfachenden Quadrate.

14. Die Binomialverteilung

14.1. Einführung

Abraham de Moivre (1667–1754) veröffentlichte im Jahre 1711 die Abhandlung *De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus* (Bild 75.1), in der er 26 Probleme abhandelte. Problem I lautet:

> **PROB. I.**
>
> A & B *una teſſera ludunt, ea conditione, ut ſi* A *bis vel pluries, octo jactibus teſſeræ monada jecerit, ipſe* A *vincat; ſin ſemel tantum, vel non omnino,* B *vincat; quænam erit ratio ſortium?*

»A und B spielen mit einem Würfel so, daß A gewinnen soll, wenn er bei 8 Würfen zweimal oder öfters ein As [d.h. eine Eins] wirft; fällt das As nur einmal oder gar nicht, so gewinne B. Wie groß ist das Verhältnis der Chancen?«

Wir wollen diese Aufgabe mit unseren Hilfsmitteln lösen. Versuchen wir, zunächst die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Asse bei diesen 8 Würfen zu ermitteln. Das zugrundeliegende Zufallsexperiment kann als *Bernoulli*-Kette der Länge 8 mit dem Parameter $\frac{1}{6}$ gedeutet werden, falls man als Treffer an der Stelle i das Erscheinen eines Asses beim i-ten Wurf nimmt. Diese Annahme ist zulässig, weil man davon ausgehen darf, daß die Ereignisse $A_i :=$ »As beim i-ten Wurf« $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ stochastisch unabhängig sind, da sich die Würfe gegenseitig nicht beeinflussen. Der Ergebnisraum Ω besteht aus den 2^8 Oktupeln, die aus den Ziffern 0 und 1 gebildet werden können. Bezeichnet man mit Z die Zufallsgröße »Anzahl der Treffer«, in unserem Fall also die Anzahl der gefallenen Asse, so besteht unsere Aufgabe darin, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »$Z = 2$« zu berechnen. Dieses Ereignis besteht aus denjenigen 8-Tupeln aus Ω, die aus 2 Einsen und 6 Nullen gebildet werden können. Beispiele hierfür sind die 8-Tupel 11000000, 00100010, 00010100 usw. Für das Ereignis »$Z = 2$« spielt es dabei keine Rolle, an welchen Stellen die beiden Einsen stehen, d.h., bei welchen der 8 Würfe die beiden Asse fallen werden. Da man die 2 Einsen auf die 8 Stellen des 8-Tupels auf $\binom{8}{2}$ Arten verteilen kann, gibt es $\binom{8}{2}$ Oktupel, die für das Ereignis »$Z = 2$« günstig sind. Jedes dieser 8-Tupel hat als Elementarereignis gemäß Definition 221.1 die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »$Z = 2$« den Wert $\binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$; der erste Teil unserer Aufgabe ist somit gelöst.

Analog gewinnen wir nun die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer, also für das Ereignis »$Z = k$«, indem wir in den obigen Überlegungen die Zahl 2 durch k ersetzen. Also ist

$$P(Z = k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{8-k}.$$

Damit ergibt sich für die Gewinnchance von A der Wert

$$P(Z \geqq 2) = \sum_{k=2}^{8}\binom{8}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{8-k}$$

Die numerische Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit ist etwas mühsam. Leichter erhalten wir ihren Wert über das Gegenereignis »$Z \leqq 1$«, d.h. über die Gewinnchance von B:

$$\begin{aligned}
P(Z \geqq 2) &= 1 - P(Z \leqq 1) = \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{1}\binom{8}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{8-k} = \\
&= 1 - \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \\
&= \frac{6^8 - 5^8 - 8\cdot 5^7}{6^8} = \\
&= \frac{1679616 - 390625 - 625000}{1679616} = \\
&= \frac{1679616 - 1015625}{1679616} = \\
&= \frac{663991}{1679616} \approx \\
&\approx 39{,}5\%.
\end{aligned}$$

Die Chancen von A und B verhalten sich also wie $663991 : 1015625 \approx 2:3$.

Das Typische an der Aufgabe von *de Moivre* ist, daß man sich nicht mehr für die Nummer des Versuchs interessiert, bei dem der Treffer eintritt, sondern daß man nach der Anzahl der Treffer fragt, die sich bei einer Serie von Versuchen ergeben kann. Man betrachtet im stochastischen Modell also die Zufallsgröße $Z :=$ »Anzahl der Treffer bei einer *Bernoulli*-Kette der Länge n mit dem Parameter p«.

Für ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt nach dem Obigen die von *Jakob Bernoulli* (1655–1705) in der *Ars Conjectandi* (Seite 40) hergeleitete Formel:

$$P(Z = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

In dieser Verteilung spielen die Binomialkoeffizienten eine wichtige Rolle. Man sagt daher, Z sei binomial verteilt. Allgemein definiert man:

Definition 231.1: Eine Zufallsgröße X heißt **binomial nach B$(n; p)$ verteilt**, wenn
1. die Wertemenge von X die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ist, und
2. für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

$$\mathrm{B}(n;p)\colon \quad x \mapsto \mathrm{B}(n;p;x) := \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{für} \quad x \in \{0, 1, \ldots, n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen:

1) Interessant sind eigentlich nur die Werte $\mathrm{B}(n;p;x)$ für $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Für ein derartiges x schreibt man gerne k, um anzudeuten, daß es sich um eine ganze Zahl handelt.
2) Mit $q := 1 - p$ erhält man den kürzeren Ausdruck $\mathrm{B}(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.
3) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{B}(n;p)$ heißt **Binomialverteilung**. Der Name rührt davon her, daß $\mathrm{B}(n;p;k)$ gerade der k-te Summand in der Entwicklung der n-ten Potenz des Binoms $p + q$ ist; es gilt nämlich
$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$
4) Die obige Definition 231.1 ist nur sinnvoll für den nicht-trivialen Fall $0 < p < 1$. Ist $p = 0$, so liefert jeder Versuch eine Niete; das führt zur Verteilung
$$\mathrm{B}(n;0;x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Ist hingegen $p = 1$, so liefert jeder Versuch einen Treffer; das führt zur Verteilung
$$\mathrm{B}(n;1;x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die **kumulative Verteilungsfunktion** einer nach $\mathrm{B}(n;p)$ verteilten Zufallsgröße hat sich die Bezeichnung F_p^n bewährt. Es gilt also nach Satz 176.1:

$$\boxed{F_p^n(x) := \sum_{i \leq x} \mathrm{B}(n;p;i)}$$

Ist insbesondere x eine der interessierenden Zahlen aus $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, so schreibt man an Stelle von x wieder gerne k und erhält damit

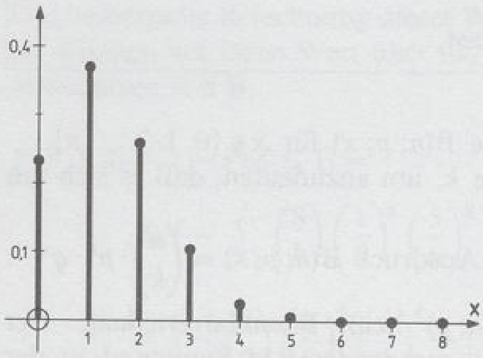
$$\boxed{F_p^n(k) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{B}(n;p;i)}$$

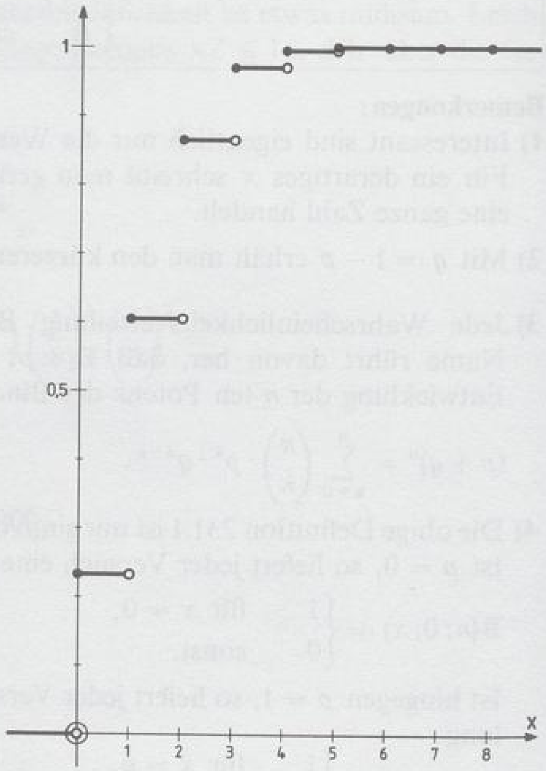
Wenn keine Verwechslung möglich ist, lassen wir die Indizes bei F_p^n weg. Unter Verwendung dieses Symbols lautet die Lösung des Problems von *de Moivre*

$$\frac{P(Z \geqq 2)}{P(Z \leqq 1)} = \frac{1 - F_{1/6}^8(1)}{F_{1/6}^8(1)}.$$

Wir veranschaulichen die Binomialverteilung $B(8; \frac{1}{6})$ sowohl durch ein Stabdiagramm (Figur 232.1) als auch durch ein Histogramm (Figur 232.2).
Den Graphen der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion $F^8_{1/6}$ zeigt Figur 232.3.

Fig. 232.1 Stabdiagramm von $B(8; \frac{1}{6})$





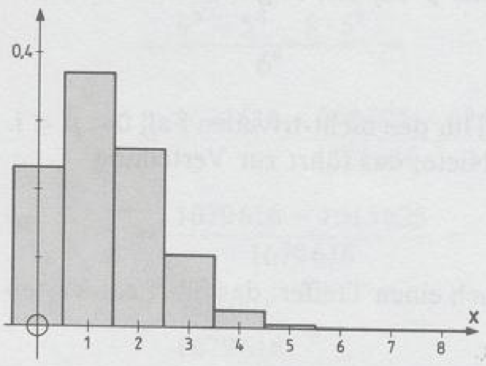


Fig. 232.2 Histogramm von $B(8; \frac{1}{6})$

Fig. 232.3 Graph von $F^8_{\frac{1}{6}}$.

14.2. Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen

Die Formel von Definition 231.1 für die Binomialverteilung kennen wir schon lange. Beim Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne erhielten wir in Satz 107.1 für die Wahrscheinlichkeit, genau s schwarze Kugeln zu ziehen, den Wert $\binom{n}{s}p^s q^{n-s}$, also gerade $B(n; p; s)$. Die Zufallsgröße »Anzahl der Treffer« beim Ziehen mit Zurücklegen ist demnach binomial verteilt. Weil man viele Experimente auf das *Ziehen mit Zurücklegen* reduzieren kann, ist diese Zufallsgröße gewissermaßen der Prototyp einer binomial verteilten Zufallsgröße.
Andererseits lassen sich viele Zufallsexperimente durch das Urnenexperiment *Ziehen ohne Zurücklegen* simulieren. In diesem Fall liegt keine Bernoulli-Kette vor, wie in Aufgabe 223/2 gezeigt wurde. Die Zufallsgröße »Anzahl der Treffer«

ist dann auch nicht binomial verteilt. Für ihre Verteilung erhielten wir in Satz 106.1

$$P(Z = s) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

Allgemein definieren wir:

Definition 233.1: Eine Zufallsgröße X heißt für $K \leqq N$ und $n \leqq N$ **hypergeometrisch nach $\mathbf{H}(N; K; n)$ verteilt**, wenn gilt:

1. die Wertemenge von X ist eine Teilmenge von $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, und
2. die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X lautet

$$\mathrm{H}(N; K; n)\colon x \mapsto \mathrm{H}(N; K; n; x) := \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{für } x \in \{0, 1, \ldots, n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch hier schreibt man gerne für $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ den Buchstaben k.

In der Praxis spielt die hypergeometrische Verteilung eine große Rolle. Der Prototyp einer hypergeometrisch verteilten Zufallsgröße ist die »Anzahl der Treffer« beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne. So sind z. B. die Zufallsgrößen »Anzahl der defekten Stücke« bei einer Qualitätskontrolle und »Anzahl der Ja-Antworten« bei einer Umfrage hypergeometrisch verteilt.

Die hypergeometrische Verteilung erfordert wegen der drei Binomialkoeffizienten einen sehr hohen rechnerischen Aufwand. Rechnerisch leichter zugänglich ist die Binomialverteilung. Glücklicherweise läßt sich die hypergeometrische Verteilung für $n \ll \min\{N, K, N-K\}$ recht gut durch die Binomialverteilung $\mathrm{B}\left(n; \dfrac{K}{N}\right)$

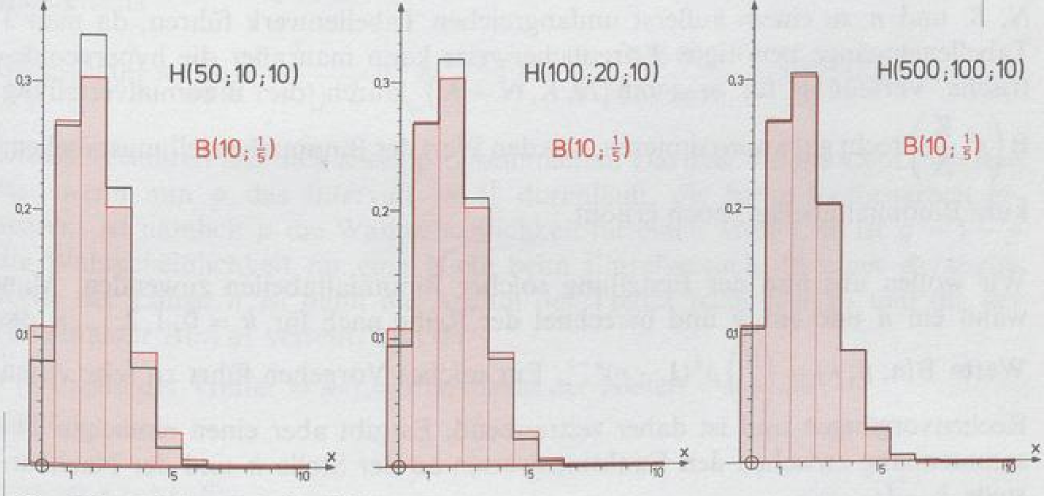


Fig. 233.1. Bild zu Tabelle 234.1.

approximieren. (Vergleiche dazu Aufgabe 264/**27**.) Dies ist gar nicht so erstaunlich, weil ja bei großen Kugelzahlen die Entnahme einiger weniger Kugeln keine wesentliche Änderung der Anteile in der Urne bewirkt. Man kann dann also das Ziehen mit Zurücklegen als gute Näherung für das Ziehen ohne Zurücklegen nehmen. Eine Veranschaulichung geben Tabelle 234.1 und Figur 233.1.

k	$B(10; \frac{1}{5}; k)$		$H(N; K; 10; k)$						
		N	50	100	500	1000	100000	1000000	1000000000
		K	10	20	100	200	20000	200000	200000000
0	0,107374		0,082519	0,095116	0,104951	0,106164	0,107362	0,107373	0,107374
1	0,268435		0,266192	0,267933	0,268417	0,268431	0,268435	0,268435	0,268435
2	0,301990		0,336898	0,318170	0,305050	0,303510	0,302005	0,301991	0,301990
3	0,201327		0,217792	0,209208	0,202849	0,202085	0,201334	0,201327	0,201327
4	0,088080		0,078469	0,084107	0,087395	0,087744	0,088077	0,088080	0,088080
5	0,026424		0,016142	0,021531	0,025488	0,025959	0,026419	0,026424	0,026424
6	0,005505		0,001868	0,003541	0,005096	0,005299	0,005503	0,005505	0,005505
7	0,000786		0,000115	0,000368	0,000689	0,000737	0,000786	0,000786	0,000786
8	0,000074		0,000003	0,000023	0,000060	0,000067	0,000074	0,000074	0,000074
9	0,000004		$4 \cdot 10^{-8}$	0,000001	0,000003	0,000004	0,000004	0,000004	0,000004
10	$1 \cdot 10^{-7}$		$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$

Tab. 234.1 Vergleich einer Binomialverteilung mit verschiedenen hypergeometrischen Verteilungen mit gleichem $p = \frac{K}{N}$

14.3. Tabellen der Binomialverteilung

Die Berechnung von Werten einer Binomialverteilung ist rechnerisch meist sehr aufwendig. Da die Binomialverteilung aber eine sehr häufig auftretende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, hat man sie für oft vorkommende Werte der Parameter n und p tabellarisiert. Für die ebenfalls sehr häufig auftretende hypergeometrische Verteilung würde eine Tabellarisierung wegen der 3 Parameter N, K und n zu einem äußerst umfangreichen Tabellenwerk führen, da man 3 Tabelleneingänge benötigte. Erfreulicherweise kann man aber die hypergeometrische Verteilung für $n \ll \min\{N, K, N-K\}$ durch die Binomialverteilung $B\left(n; \frac{K}{N}\right)$ recht gut approximieren, was den Wert der Binomialverteilungstabellen, kurz Binomialtabellen, noch erhöht.

Wir wollen uns nun der Erstellung solcher Binomialtabellen zuwenden. Man wählt ein n und ein p und berechnet der Reihe nach für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ die Werte $B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ein solches Vorgehen führt zu sehr vielen Rechenvorgängen und ist daher zeitraubend. Es gibt aber einen einfachen Zusammenhang zwischen den Funktionswerten an der Stelle k und der Nachbarstelle $k-1$:

$$\frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} q^{n-k+1}} =$$

$$= \frac{n!(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!n!} \cdot \frac{p}{q} =$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q}.$$

Wir erhalten also die **Rekursionsformel:**

$$\boxed{B(n;p;k) = \frac{(n-k+1)p}{kq} B(n;p;k-1)}$$

Sie gestattet – daher der Name* –, aus der Kenntnis eines Wertes den Wert des Vorgängers und auch den des Nachfolgers zu berechnen. Es genügt also, einen einzigen Wert $B(n;p;k)$ mühsam zu errechnen. Die jeweiligen Nachbarn $B(n;p;k-1)$ und $B(n;p;k+1)$ erhält man dann daraus durch einfache Division bzw. Multiplikation. Es empfiehlt sich dabei, aus Genauigkeitsgründen einen möglichst großen Startwert $B(n;p;k)$ zu wählen. (Den größten Wert werden wir im Abschnitt **14. 6.** bestimmen.)

Wir veranschaulichen das Vorgehen an der Binomialverteilung $B(8;\frac{1}{6})$. Gemäß Figur 232.1 empfiehlt sich als Startwert

$$B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{625000}{1679616} = 0{,}372108\ldots$$

Die Rekursionsformel liefert nun einerseits

$$B\left(8;\frac{1}{6};2\right) = \frac{(8-2+1)\cdot\frac{1}{6}}{2\cdot\frac{5}{6}} B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \frac{7}{10}\cdot\frac{625000}{1679616} = 0{,}260476\ldots,$$

andererseits

$$B\left(8;\frac{1}{6};0\right) = \frac{1\cdot\frac{5}{6}}{(8-1+1)\cdot\frac{1}{6}} B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \frac{5}{8}\cdot\frac{625000}{1679616} = 0{,}232568\ldots$$

Dieses Verfahren läßt sich leicht programmieren. Darüber hinaus kann man sich fast, wenn nun p das Intervall $]0;1[$ durchläuft, die halbe Rechenarbeit ersparen: Ist nämlich p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so ist $q = 1-p$ die Wahrscheinlichkeit für eine Niete beim Einzelversuch. In einer *Bernoulli*-Kette der Länge n ist dann die Anzahl der Treffer nach $B(n;p)$ und die der Nieten nach $B(n;q)$ verteilt, und da

P(»Anzahl der Treffer $= k$«) $= P$(»Anzahl der Nieten $= n-k$«)

gilt, folgt das

* recurrere = zurücklaufen.

Symmetriegesetz für Binomialverteilungen:

$$\mathrm{B}(n; p; k) = \mathrm{B}(n; q; n-k)$$

Wegen dieser Symmetrie* genügt es, die Tabellen für die Binomialverteilungen nur bis $p = 0{,}5$ zu führen. Will man z.B. den Wert $\mathrm{B}(8; \frac{5}{6}; 3)$ ermitteln, so sucht man den symmetrischen Wert $\mathrm{B}(8; \frac{1}{6}; 5)$ in der Binomialtabelle. Diese Umformungsdenkarbeit erspart uns ein zweiter Eingang zu den Tabellen mit den Werten für $\frac{1}{2} \leqq p < 1$. Er ist rot unterlegt im Gegensatz zum grau unterlegten ersten Eingang. Für ihn gelten dann die rechts stehenden rot unterlegten k-Werte, die sich mit den in der gleichen Zeile links stehenden grau unterlegten k-Werten jeweils zu n ergänzen, wie der nebenstehende Ausschnitt aus den *Stochastik-Tabellen*** zeigt. (Tabelle 236.1)

n	k \ p	$\frac{1}{6}$	
8	0	23257	8
	1	37211	7
	2	26048	6
	3	10419	5
	4	02605	4
	5	00417	3
	6	00042	2
	7	00002	1
	8	00000	0
n		$\frac{5}{6}$	p \ k

Tab. 236.1 Die ersten 5 Dezimalstellen (gerundet) der Werte von $\mathrm{B}(8; \frac{1}{6})$ und $\mathrm{B}(8; \frac{5}{6})$

Nun benötigt man aber sehr oft wie beim Problem I von *de Moivre* (Seite 229) nicht die $\mathrm{B}(n; p; k)$-Werte, sondern die Werte $F_p^n(k)$ der kumulativen Verteilungsfunktion F_p^n. Man könnte diese gemäß $F_p^n(k) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{B}(n; p; i)$ natürlich jedesmal aus den Tabellen der Binomialverteilung $\mathrm{B}(n; p)$ errechnen. Diese Summation erspart man sich, wenn man F_p^n selbst tabellarisiert.

Aus den Symmetrie-Eigenschaften der Binomialverteilungen folgen auch solche für die Funktionen F_p^n. Daher haben auch die Tabellen der kumulativen Werte einen zweiten Eingang für $p \geqq \frac{1}{2}$. Bei dessen Benutzung muß man allerdings beachten, daß man nicht mehr $F_p^n(k)$, sondern $1 - F_p^n(k)$ erhält! Wir wollen uns dies an Hand der Wahrscheinlichkeitsbedeutung von F_p^n überlegen.

Bekanntlich gilt $F_p^n(k) = P(Z \leqq k)$, wenn Z die Anzahl der Treffer in der *Bernoulli*-Kette ist. Gehen wir nun von den Treffern zu den Nieten über, dann erhalten wir $P(Z \leqq k) = P(\text{»Anzahl der Nieten} \geqq n-k\text{«})$.

Die Anzahl der Nieten gehorcht aber andererseits der Binomialverteilung $\mathrm{B}(n; q)$. Damit gewinnen wir

$$\begin{aligned} F_p^n(k) &= P(\text{»Anzahl der Treffer} \leqq k\text{«}) = \\ &= P(\text{»Anzahl der Nieten} \geqq n-k\text{«}) = \\ &= 1 - P(\text{»Anzahl der Nieten} < n-k\text{«}). \end{aligned}$$

Ist $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, so kann man dafür schreiben

$$F_p^n(k) = 1 - P(\text{»Anzahl der Nieten} \leqq n-k-1\text{«}) = 1 - F_q^n(n-k-1).$$

Somit gilt das folgende

* Der Name Symmetriegesetz wird durch Satz 246.1 noch verständlicher werden.

** *Barth, Bergold, Haller*: Stochastik-Tabellen, Ehrenwirth Verlag.

Symmetriegesetz für kumulative binomiale Verteilungsfunktionen:

$$F_p^n(k) = 1 - F_{1-p}^n(n-k-1), \qquad \text{falls } k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Die Symmetriebeziehung für $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$ ist ohne praktische Bedeutung. Tabelle 237.1 zeigt uns einen Ausschnitt aus den *Stochastik-Tabellen*, an Hand dessen wir die Tafelbenutzung erklären wollen. Suchen wir z.B. den Wert $F_{5/6}^8(6)$, so könnten wir dafür $1 - F_{1/6}^8(8-6-1) = 1 - F_{1/6}^8(1)$ schreiben, $F_{1/6}^8(1)$ mit Hilfe des grauen Eingangs zu 0,60468 bestimmen und schließlich $F_{5/6}^8(6) = 1 - 0{,}60468 = 0{,}39532$ errechnen. Benutzen wir hingegen für p den roten Eingang unten, so müssen wir die rechts stehenden rot unterlegten k-Werte nehmen. Wir lesen zu $p = \frac{5}{6}$ und $k = 6$ unmittelbar den Wert 0,60468 ab; die Subtraktion dieses Wertes von 1 bleibt uns leider nicht erspart. Andererseits benötigt man bei vielen Aufgaben gerade den Wert $1 - F_p^n(k)$, den man für $p \geqq \frac{1}{2}$ dann direkt mit Hilfe des roten Eingangs aus der Tabelle entnehmen kann. Sucht man z.B. für $n = 8$ und $p = \frac{5}{6}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) = 1 - F_{5/6}^8(3)$, so liest man diesen Wert in Tabelle 237.1 mit Hilfe des roten Eingangs direkt ab zu $P(X \geqq 4) = 0{,}99539$.

n	k \ p	$\frac{1}{6}$	
8	0	23257	7
	1	60468	6
	2	86515	5
	3	96934	4
	4	99539	3
	5	99956	2
	6	99998	1
	7		0
n		$\frac{5}{6}$	p \ k

$F_p^n(k) = 1 - \text{Tafelwert}$

Tab. 237.1 Die ersten 5 Dezimalstellen (gerundet) der kumulativen Verteilungsfunktionen $F_{1/6}^8$ und $F_{5/6}^8$.
Man beachte, daß sich die grau unterlegten k-Werte mit den rot unterlegten k-Werten nur zu $n-1$ ergänzen!

14.4. Veranschaulichung von Binomialverteilungen durch Experimente

Beispiel 1: Wir wollen die Werte von $B(10; \frac{1}{2})$ experimentell durch relative Häufigkeiten angenähert herstellen. Dazu müssen wir z.B. den 10fach-Wurf einer Laplace-Münze sehr oft ausführen und zählen, wie oft wir dabei 0 Adler, 1 Adler, …, 10 Adler erhalten. Wir werten Tabelle 11.1 demgemäß aus: Je 2 untereinanderstehende Fünfergruppen werden als ein Ergebnis eines 10fach-Wurfes aufgefaßt. Es ergibt sich folgende Häufigkeitsverteilung:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl des Auftretens von k Adlern	0	0	4	10	14	23	16	10	2	1	0
Häufigkeit	0	0	0,0500	0,1250	0,1750	0,2875	0,2000	0,1250	0,0250	0,0125	0
$B(10; \frac{1}{2}; k)$	0,0010	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,0010

Unter den relativen Häufigkeiten sind die »Idealwerte« $B(10; \frac{1}{2}; k)$ eingetragen. Die Abweichungen zwischen Ideal und Wirklichkeit sind nicht allzu groß. Wir schreiben sie dem Zufall zu. Ob dies berechtigt ist, wäre mit den Methoden der *mathematischen Statistik* zu klären.
Mit einem von *Francis Galton* (1822–1911)* angegebenen Gerät kann man angenähert eine Binomialverteilung sogar unmittelbar mechanisch erzeugen. Wir besprechen dazu

Beispiel 2: Wir stellen uns eine schachbrettartig angelegte Stadt vor (Figur 238.1). Im Punkte 0 befindet sich eine Kneipe. Ein Betrunkener versucht, nach Hause zu gehen. An jeder Kreuzung geht er mit der Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ nach links.
Der Irrweg endet zufallsbestimmt an der Kreuzung Nummer k in der n-ten Zeile. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes k betrachten wir folgendes Schema:

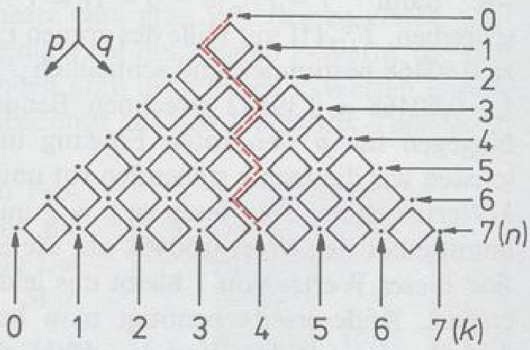
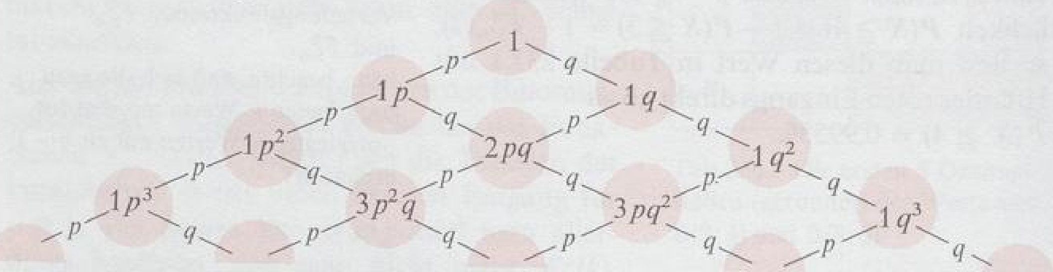


Fig. 238.1 Stadtplan für den Irrweg



An jedem Kreuzungspunkt steht jeweils die Wahrscheinlichkeit, ihn zu erreichen. Ein Kreuzungspunkt kann nur von den beiden darüberliegenden Kreuzungspunkten aus erreicht werden. Die Anzahl der Wege, die zu ihm führen, ist also gleich der Summe der Möglichkeiten, die beiden darüber liegenden Punkte zu erreichen. Man erhält so die Anordnung des *Pascal-Stifel*schen Dreiecks. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit zu $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = B(n; p; k)$.

Die Zufallsgröße »Nummer der Kreuzung in der n-ten Zeile« ist also binomial nach $B(n; p)$ verteilt.
Für $p = q = \frac{1}{2}$ läßt sich nun der Zufallsweg des Betrunkenen mit einem *Galton-Brett* realisieren.

Auf einem vertikal aufgestellten Brett wird ein Quadratgitter durch Nägel erzeugt (vgl. Figur 239.1). Die durch einen Trichter senkrecht auf den ersten Nagel fallenden Kugeln werden mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts oder links abgelenkt.

* Siehe Seite 407.

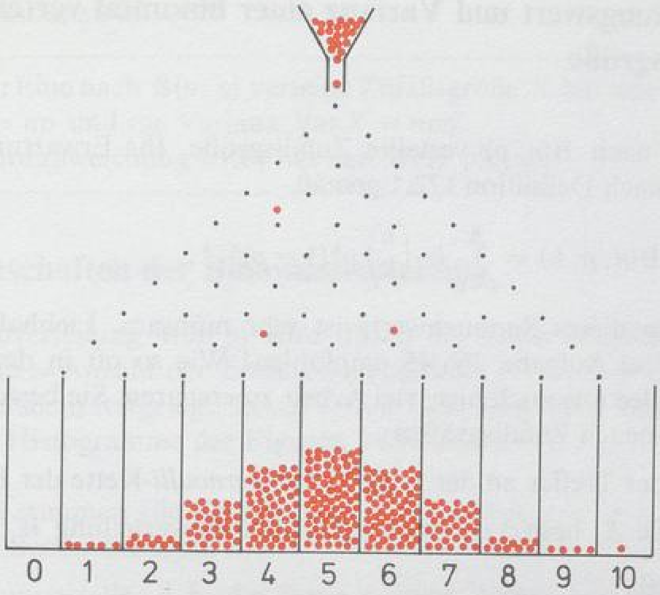


Fig. 239.1 *Galton*-Brett. Das Brett heißt auch *Quincunx*. Faßt man nämlich jeweils 5 Nägel zusammen, so entsteht eine Anordnung der Form ⁙, die von den Römern quincunx genannt wurde.

Falls der Abstand der Nägel in einem günstigen Verhältnis zum Kugeldurchmesser steht, treffen die Kugeln wieder senkrecht auf die Nägel der nächsten Reihe. In den Fächern sammeln sich die Kugeln dann so an, daß ihre Verteilung der Binomialverteilung $B(n; \frac{1}{2})$ entspricht. Einen Eindruck von den wirklichen Verhältnissen gibt Bild 239.2. Durch eine seitliche Neigung kann auch $p \neq \frac{1}{2}$ realisiert werden.

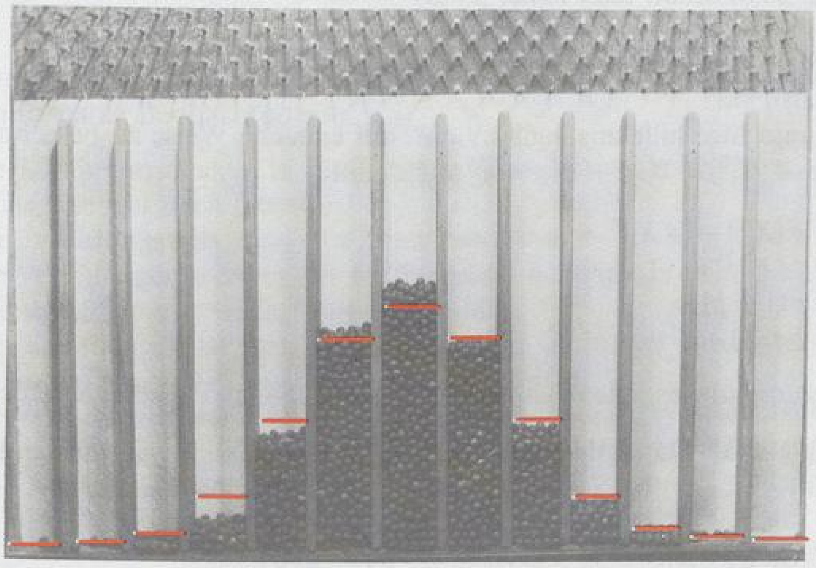


Bild 239.2 Versuch am *Galton*-Brett. (Die roten Linien geben die Idealwerte an.)

14.5. Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße

Es sei X eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße. Ihr Erwartungswert $\mathscr{E}(X)$ berechnet sich nach Definition 172.1 gemäß

$$\mathscr{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot B(n; p; k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die Berechnung dieses Summenwerts ist sehr mühsam. Liebhabern tüfteliger Umformungen sei Aufgabe 266/**45** empfohlen! Wie so oft in der Mathematik hilft eine gute Idee uns auch hier, viel Arbeit zu ersparen. Sie besteht in der Einführung von n neuen Zufallsgrößen

$X_i :=$ »Anzahl der Treffer an der Stelle i der *Bernoulli*-Kette der Länge n«.

Die Zufallsgröße X_i besitzt die Wahrscheinlichkeitsverteilung W_i:

x	0	1
$W_i(x)$	q	p

Die X_i sind somit gleichverteilt, und zwar binomial nach $B(1; p)$. Also sind auch ihre Erwartungswerte gleich, nämlich

$\mathscr{E}(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Die Anzahl X der Treffer der gegebenen *Bernoulli*-Kette ist aber die Summe der Treffer X_i an den Stellen i, aufsummiert von 1 bis n. Also

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Nach Satz 205.1 erhält man daher sofort

$$\mathscr{E}X = \mathscr{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Dieselbe gute Idee hilft uns auch, $\operatorname{Var} X$ auf einfache Weise zu berechnen. Zunächst gilt $\mathscr{E}(X_i^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ und damit

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} X_i &= \mathscr{E}(X_i^2) - (\mathscr{E}X_i)^2 = \\ &= p - p^2 = \\ &= p(1-p) = \\ &= pq.\end{aligned}$$

Aus der zugrundeliegenden *Bernoulli*-Kette ergibt sich, daß die X_i stochastisch unabhängig sind. Damit läßt sich Satz 209.1 auf $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ anwenden, und man erhält

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Wir fassen zusammen in

> **Satz 241.1:** Eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mathscr{E}X = np$ und die Varianz $\operatorname{Var} X = npq$.
> Die Standardabweichung $\sigma(X)$ hat den Wert $\sqrt{npq}$.

14.6. Eigenschaften der Binomialverteilung

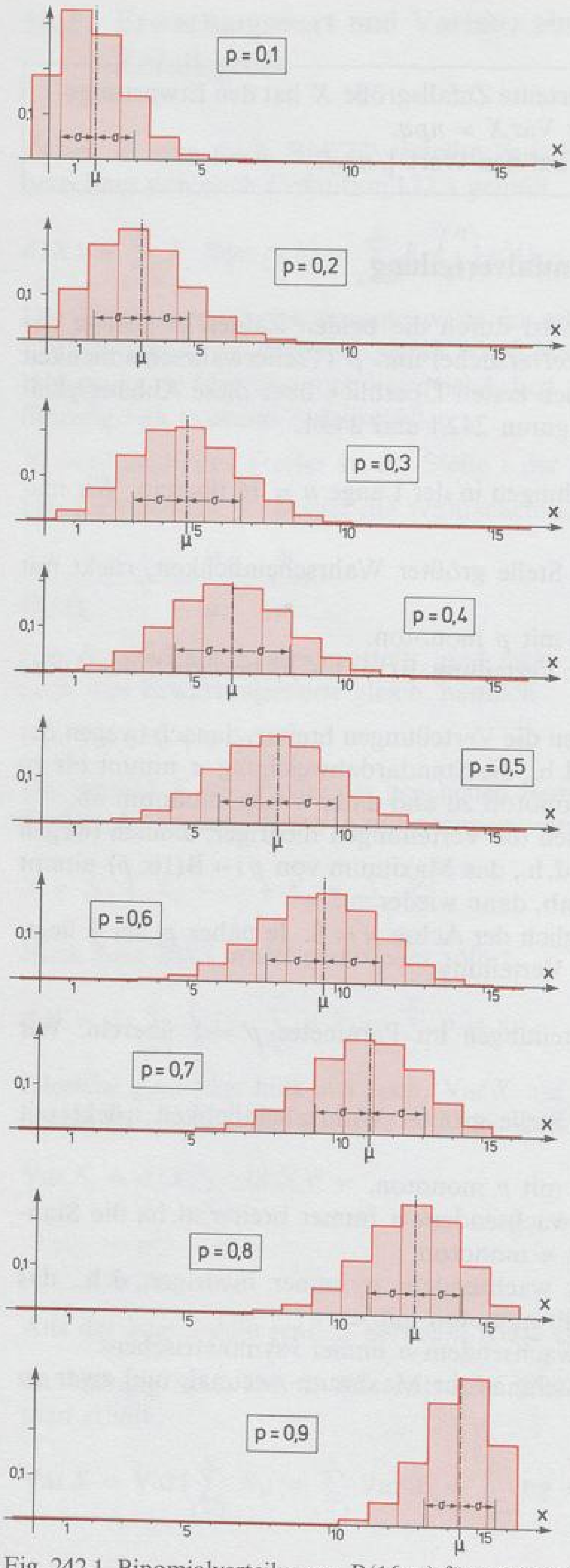
Jede Binomialverteilung $B(n; p)$ wird durch die beiden Zahlen n (Länge der *Bernoulli*-Kette = Anzahl der Einzelversuche) und p (Trefferwahrscheinlichkeit beim Einzelversuch) festgelegt. Einen ersten Überblick über diese Abhängigkeiten geben die Histogramme der Figuren 242.1 und 243.1.

In Figur 242.1 stimmen alle Verteilungen in der Länge $n = 16$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

1. Die Maximumstelle, d. h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem p nach rechts.
2. Der Erwartungswert μ wächst mit p monoton.
3. $B(16; p)$ liegt symmetrisch zur Verteilung $B(16; 1-p)$ bezüglich der Achse $x = 8$.
4. Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen breiter, danach (wegen der Symmetrie) wieder schmäler, d. h., die Standardabweichung σ nimmt bis zu einem Maximum bei $p = \frac{1}{2}$ monoton zu und dann wieder monoton ab.
5. Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen niedriger, danach (wegen der Symmetrie) wieder höher, d. h., das Maximum von $p \mapsto B(16; p)$ nimmt mit wachsendem p bis $p = \frac{1}{2}$ ab, dann wieder zu.
6. $B(16; \frac{1}{2})$ ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 8$. Je näher p bei $\frac{1}{2}$ liegt, um so »symmetrischer« ist die Verteilung.

In Figur 243.1 stimmen alle Verteilungen im Parameter $p = \frac{1}{5}$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

7. Die Maximumstelle, d.h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem n nach rechts.
8. Der Erwartungswert μ wächst mit n monoton.
9. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer breiter, d.h., die Standardabweichung σ wächst mit n monoton.
10. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer niedriger, d.h., das Maximum von $n \mapsto B(n; \frac{1}{5})$ fällt monoton mit n.
11. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer »symmetrischer«.
12. $B(4; \frac{1}{5})$, $B(9; \frac{1}{5})$ und $B(64; \frac{1}{5})$ nehmen ihr Maximum zweimal, und zwar an benachbarten Stellen k an.

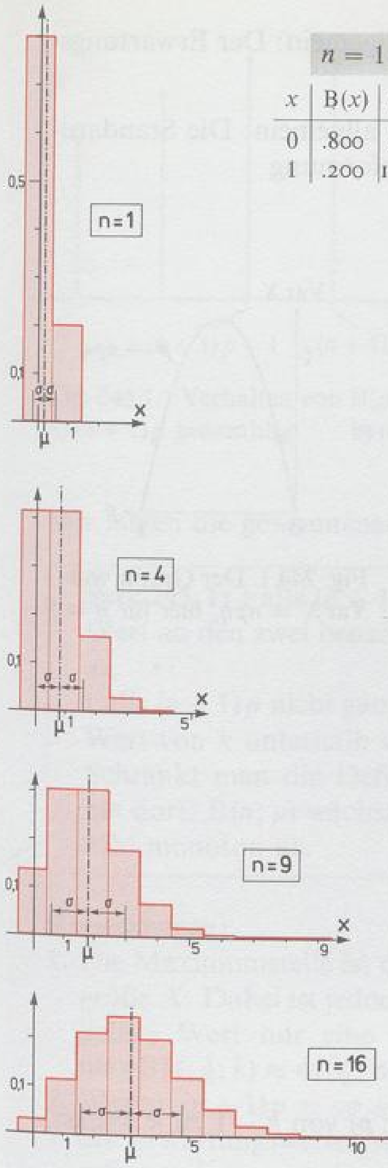


	$p = 0,1$		$p = 0,2$		$p = 0,3$	
x	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$
0	.185	.185	.028	.028	.003	.003
1	.329	.515	.113	.141	.023	.026
2	.275	.789	.211	.352	.073	.099
3	.142	.932	.246	.598	.146	.246
4	.051	.983	.200	.798	.204	.450
5	.014	.997	.120	.918	.210	.660
6	.003	.999	.055	.973	.165	.825
7	.000	1.000	.020	.993	.101	.926
8			.006	.999	.049	.974
9			.001	1.000	.019	.993
10					.006	.998
11					.001	1.000

	$p = 0,4$		$p = 0,5$		$p = 0,6$	
x	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$
1	.003	.003				
2	.015	.018	.002	.002		
3	.047	.065	.009	.011	.001	.001
4	.101	.167	.028	.038	.004	.005
5	.162	.329	.067	.105	.014	.019
6	.198	.527	.122	.227	.039	.058
7	.189	.716	.175	.402	.084	.142
8	.142	.858	.196	.598	.142	.284
9	.084	.942	.175	.773	.189	.473
10	.039	.981	.122	.895	.198	.671
11	.014	.995	.067	.962	.162	.833
12	.004	.999	.028	.989	.101	.935
13	.001	1.000	.009	.998	.047	.982
14			.002	1.000	.015	.997
15					.003	1.000

	$p = 0,7$		$p = 0,8$		$p = 0,9$	
x	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$	$\mathrm{B}(x)$	$F(x)$
5	.001	.002				
6	.006	.007				
7	.019	.026	.001	.001		
8	.049	.074	.006	.007		
9	.101	.175	.020	.027	.000	.001
10	.165	.340	.055	.082	.003	.003
11	.210	.550	.120	.202	.014	.017
12	.204	.754	.200	.402	.051	.068
13	.146	.901	.246	.648	.142	.211
14	.073	.974	.211	.859	.275	.485
15	.023	.997	.113	.972	.329	.815
16	.003	1.000	.028	1.000	.185	1.000

Fig. 242.1 Binomialverteilungen $\mathrm{B}(16; p)$ für verschiedene Parameterwerte p



$n = 1$

x	B(x)	$F(x)$
0	.800	.800
1	.200	1.000

$n = 4$

x	B(x)	$F(x)$
0	.410	.410
1	.410	.819
2	.154	.973
3	.026	.998
4	.002	1.000

$n = 9$

x	B(x)	$F(x)$
0	.134	.134
1	.302	.436
2	.302	.738
3	.176	.914
4	.066	.980
5	.017	.997
6	.003	1.000

$n = 16$

x	B(x)	$F(x)$
0	.028	.028
1	.113	.141
2	.211	.352
3	.246	.598
4	.200	.798
5	.120	.918
6	.055	.973
7	.020	.993
8	.006	.999
9	.001	1.000

$n = 25$

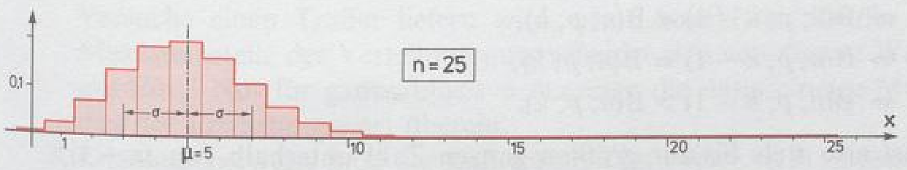
x	B(x)	$F(x)$
0	.004	.004
1	.024	.027
2	.071	.098
3	.136	.234
4	.187	.421
5	.196	.617
6	.163	.780
7	.111	.891
8	.062	.953
9	.029	.983
10	.012	.994
11	.004	.998
12	.001	1.000

$n = 64$

x	B(x)	$F(x)$
4	.002	.002
5	.005	.007
6	.011	.018
7	.024	.042
8	.042	.084
9	.066	.150
10	.091	.241
11	.111	.352
12	.123	.475
13	.123	.598
14	.112	.710
15	.093	.803
16	.071	.875
17	.050	.925
18	.033	.958
19	.020	.978
20	.011	.989
21	.006	.995
22	.003	.998
23	.001	.999
24	.001	1.000

$n = 100$

x	B(x)	$F(x)$
8	.001	.001
9	.001	.002
10	.003	.006
11	.007	.013
12	.013	.025
13	.022	.047
14	.034	.080
15	.048	.129
16	.064	.192
17	.079	.271
18	.091	.362
19	.098	.460
20	.099	.559
21	.095	.654
22	.085	.739
23	.072	.811
24	.058	.869
25	.044	.913
26	.032	.944
27	.022	.966
28	.014	.980
29	.009	.989
30	.005	.994
31	.003	.997
32	.002	.998
33	.001	.999
34	.000	1.000



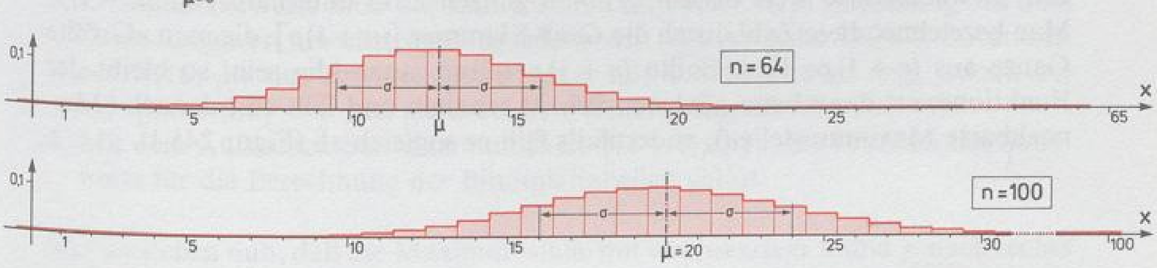


Fig. 243.1 Binomialverteilungen B(n; $\frac{1}{5}$) für verschiedene Längen n der *Bernoulli*-Kette

Zu 2. und 8. Nach Satz 241.1 ist $\mathscr{E}X = np$. Also gilt allgemein: Der Erwartungswert wächst mit n und mit p echt monoton.

Zu 4. und 9. Nach Satz 241.1 ist $\sigma = \sqrt{npq}$. Also gilt allgemein: Die Standardabweichung wächst echt monoton mit n. Aus der Umformung

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{-n(p-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}n}$$

ersieht man sofort, daß der Radikand $\operatorname{Var} X$ der Funktionsterm einer nach unten geöffneten Parabel ist, deren Scheitel bei $(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}n)$ liegt. (Vgl. Figur 244.1.) Das bedeutet aber, daß σ bei festem n für $p = \frac{1}{2}$ maximal wird.

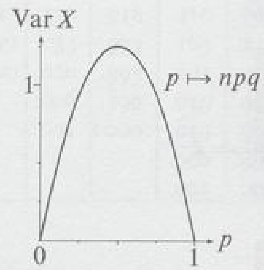


Fig. 244.1 Der Graph von $\operatorname{Var} X = npq$, hier für $n = 5$

Zu 1., 7. und 12. Das Maximum einer Binomialverteilung bezüglich x kann man leider nicht mit der Differentialrechnung bestimmen, da die Funktion ja gerade an den interessanten Stellen $0, 1, 2, \ldots, n$ unstetig und damit nicht differenzierbar ist. Hier hilft uns aber die in **14.3.** für diese Stellen gewonnene Rekursionsformel weiter, die wir weiter umformen.

$$\begin{aligned}
\frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \\
&= 1 + \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} - 1 = \\
&= 1 + \frac{(n-k+1)p - kq}{kq} = \\
&= 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}.
\end{aligned}$$

Der Zähler des Bruches entscheidet, ob und wann $B(n;p)$ von $k-1$ zu k wächst, konstant bleibt oder abnimmt:

$$\begin{aligned}
k < (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) < B(n;p;k),\\
k = (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) = B(n;p;k),\\
k > (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) > B(n;p;k).
\end{aligned}$$

$B(n;p)$ wächst also stets bis zur größten ganzen Zahl unterhalb von $(n+1)p$. Man bezeichnet diese Zahl durch die ***Gauß*-Klammer** $[(n+1)p]$, die man »Größte Ganze aus $(n+1)p$« liest. Sollte $(n+1)p$ selbst ganzzahlig sein, so bleibt der Funktionswert dann beim nächsten Schritt erhalten und fällt erst danach (2 benachbarte Maximumstellen); andernfalls fällt er sogleich ab (Figur 245.1).

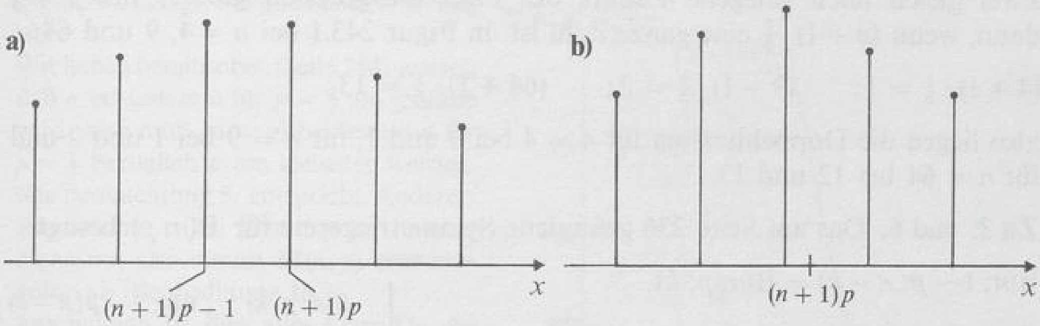


Fig. 245.1 Verhalten von $B(n; p)$ in der Umgebung des Maximums
a) $(n+1)p$ ganzzahlig, **b)** $(n+1)p$ nicht ganzzahlig

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

> **Satz 245.1:** Falls $(n+1)p$ ganzzahlig ist, nimmt $B(n; p)$ seinen maximalen Wert an den zwei benachbarten Stellen $k = (n+1)p - 1$ und $k = (n+1)p$ an.
> Falls $(n+1)p$ nicht ganzzahlig ist, liegt das einzige Maximum beim größten Wert von k unterhalb von $(n+1)p$, also bei $[(n+1)p]$.
> Schränkt man die Definitionsmenge von $B(n; p)$ auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ ein, so gilt dort: $B(n; p)$ wächst echt monoton bis zum Maximum und nimmt dann echt monoton ab.

Bemerkungen:

1. Die Maximumstelle ist der wahrscheinlichste Wert (= **Modalwert**) der Zufallsgröße X. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß für großes n auch der wahrscheinlichste Wert nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit besitzt. So ist z.B. $\max B(4; \frac{1}{5}; k) \approx 41\%$; aber $\max B(100; \frac{1}{5}; k) \approx 10\%$. (Siehe auch Figur 243.1.)
2. Wegen $(n+1)p = np + p = \mu + p$ liegt das Maximum immer in der Nähe des Erwartungswertes μ, also recht genau dort, wo wir es bei naiver Betrachtung vermuten würden: Wir rechnen ja damit, daß etwa der Bruchteil p aller Versuche einen Treffer liefern wird, also: Anzahl der Treffer $\approx n \cdot p$. Die Maximumstelle der Verteilung unterscheidet sich von diesem Wert höchstens um Eins! Nur für ganzzahliges μ stimmen die dann einzige Maximumstelle und der Erwartungswert überein.
3. Erstaunlicherweise muß der wahrscheinlichste Wert nicht notwendig das dem Erwartungswert am nächsten liegende k sein (vgl. Aufgabe 271/**67**). So ist z.B. bei $B(16; \frac{1}{10})$ der Erwartungswert $\mu = 1{,}6$; das Maximum liegt jedoch bei $k = [1{,}6 + 0{,}1] = 1$ und nicht bei dem näher gelegenen Wert $k = 2$.
4. Mit dem Aufsuchen der Maximumstelle $[(n+1)p]$ ist das Problem des Startwerts für die Berechnung der Binomialtabellen gelöst.

Wir verstehen nun, daß die Maximumstelle mit wachsendem n und p nach rechts rückt: $[(n+1)p]$ wächst sowohl mit n als auch mit p.

Zwei gleich hoch gelegene Punkte des Funktionsgraphen gibt es für $p = \frac{1}{5}$ dann, wenn $(n+1) \cdot \frac{1}{5}$ eine ganze Zahl ist, in Figur 243.1 bei $n = 4$, 9 und 64:

$$(4+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 1; \qquad (9+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 2; \qquad (64+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 13;$$

also liegen die Doppelmaxima für $n = 4$ bei 0 und 1, für $n = 9$ bei 1 und 2 und für $n = 64$ bei 12 und 13.

Zu 3. und 6. Das auf Seite 236 gefundene Symmetriegesetz für $\mathrm{B}(n; p)$ besagt

$$\mathrm{B}(n; 1-p; n-k) = \mathrm{B}(n; p; k).$$

Wegen
$n - k = \frac{1}{2}n + (\frac{1}{2}n - k)$ und $k = \frac{1}{2}n - (\frac{1}{2}n - k)$ liegen die Argumente $n - k$ und k symmetrisch zu $\frac{1}{2}n$, wie Figur 246.1 noch veranschaulicht. Damit erhält das Symmetriegesetz für Binomialverteilungen die Form von

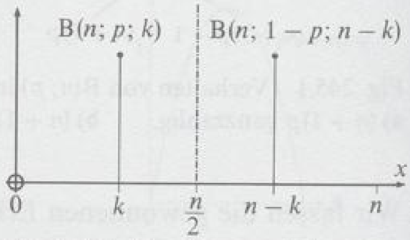


Fig. 246.1 Das Argument k von $\mathrm{B}(n; p; k)$ und das Argument $n - k$ von $\mathrm{B}(n; 1-p; n-k)$ liegen symmetrisch zu $\frac{1}{2}n$.

> **Satz 246.1:** Die Verteilungen $\mathrm{B}(n; p)$ und $\mathrm{B}(n; 1-p)$ liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $x = \frac{1}{2}n$. Insbesondere ist die Verteilung $\mathrm{B}(n; \frac{1}{2})$ in sich achsensymmetrisch bezüglich der Achse $x = \frac{1}{2}n$.

Zu 6. und 11. Um das »Symmetrischer-Werden« der Binomialverteilungen in Abhängigkeit von n und p zu zeigen, benötigt man ein Maß für die Abweichung von der Symmetrie. Man wählt hierfür für $\sigma \neq 0$ den Formparameter **Schiefe** (= *skewness*) einer Zufallsgröße, definiert durch

$$\boxed{\text{Schiefe} := \frac{\mathscr{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}}$$

Eine sehr mühsame Rechnung liefert für die Schiefe von Zufallsgrößen, die nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilt sind, den Wert $\dfrac{1-2p}{\sigma}$. Man erkennt daraus, daß die Schiefe genau dann 0 ist, wenn $p = \frac{1}{2}$ ist, was unserer Beobachtung **6.** entspricht. Aus $\dfrac{1-2p}{\sigma} = \dfrac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$ erkennt man unmittelbar, daß die Schiefe für wachsendes n bei festem p monoton gegen 0 konvergiert, was unserer Beobachtung **11.** entspricht.

Zu 5. und 10. Wir besitzen keinen einfachen Rechenausdruck für den Maximalwert einer Binomialverteilung. Wie wir aber später in Aufgabe 313/**15** zeigen werden, gibt es für große n eine Näherungsformel für den Maximalwert. Es gilt nämlich:

> Es sei $M(n; p)$ der Maximalwert der Binomialverteilung $\mathrm{B}(n; p)$, also $M(n; p) = \max\{\mathrm{B}(n; p; x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt für $0 < p < 1$ und großes n:
>
> $$M(n; p) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Figur 247.1 zeigt, wie gut diese Näherung ist.
Wir haben bereits oben (Seite 244) gezeigt, daß σ bei festem n für $p = \frac{1}{2}$ am größten wird. Also muß $\mathrm{M}(n; p)$ bei festem n für $p = \frac{1}{2}$ bezüglich p am kleinsten werden, was Beobachtung **5.** entspricht. Andererseits wächst σ bei festem p mit n echt monoton; also nimmt $\mathrm{M}(n; p)$ echt monoton ab (Beobachtung **10.**).
Anschaulich ist dies alles klar: Da die Histogramme immer breiter werden, ihre Flächeninhalte aber konstant den Wert 1 haben, sollte das höchste Rechteck des Histogramms immer niedriger werden.

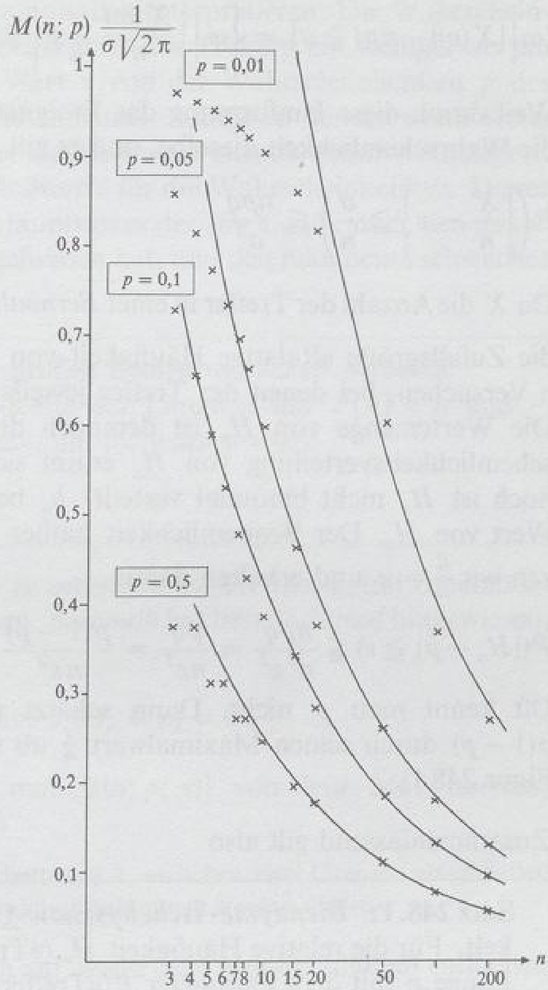


Fig. 247.1 Güte der Näherungsformel für die Maxima von Binomialverteilungen
Einzelpunkte: Maximalwerte $M(n; p)$ der Binomialverteilungen $\mathrm{B}(n; p)$.
Durchgezogene Kurven: zugehörige Näherungen $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$.
Beachte: Auf der n-Achse logarithmischer Maßstab!

14.7. Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* für binomial verteilte Zufallsgrößen und das Gesetz der großen Zahlen

Wenden wir die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*, nämlich

$$P(|X - \mu| \geqq a) \leqq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2},$$

auf binomial nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilte Zufallsgrößen X an, dann lassen sich μ und $\operatorname{Var} X$ durch np bzw. npq ersetzen, und wir erhalten

$$P(|X - np| \geqq a) \leqq \frac{npq}{a^2}.$$

Die Ungleichung $|X - np| \geqq a$ beschreibt kurz das Ereignis $\{\omega \mid |X(\omega) - np| \geqq a\}$. Dividiert man die in der Mengenklammer stehende Ungleichung durch n, so wird weiterhin dasselbe Ereignis beschrieben, also

$$\{\omega \,|\, |X(\omega) - np| \geqq a\} = \left\{\omega \,\Big|\, \left|\frac{X(\omega)}{n} - p\right| \geqq \frac{a}{n}\right\}.$$

Weil durch diese Umformung das Ereignis nicht verändert wurde, bleibt auch die Wahrscheinlichkeit dieselbe, und es gilt

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq \frac{a}{n}\right) \leqq \frac{npq}{a^2}.$$

Da X die Anzahl der Treffer in einer *Bernoulli*-Kette der Länge n ist, stellt $\frac{X}{n} =: H_n$ die Zufallsgröße »Relative Häufigkeit von Treffer in einer *Bernoulli*-Kette von n Versuchen, bei denen der Treffer jeweils die Wahrscheinlichkeit p hat« dar. Die Wertemenge von H_n ist demnach die Menge $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$, die Wahrscheinlichkeitsverteilung von H_n ergibt sich zu $P(H_n = \frac{k}{n}) = \mathrm{B}(n; p; k)$. Dennoch ist H_n nicht binomial verteilt! h_n bezeichne weiterhin einen bestimmten Wert von H_n. Der Bequemlichkeit halber setzen wir $\frac{a}{n} =: \varepsilon$ und erhalten damit

$$P(|H_n - p| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Oft kennt man p nicht. Dann schätzt man $p(1-p)$ durch seinen Maximalwert $\frac{1}{4}$ ab (vgl. Figur 248.1).

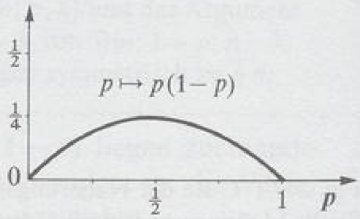


Fig. 248.1 Graph der Funktion $p \mapsto p(1-p)$

Zusammenfassend gilt also

> **Satz 248.1: *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung für die relative Häufigkeit.** Für die relative Häufigkeit H_n (»Treffer«) in einer *Bernoulli*-Kette der Länge n mit dem Parameter $P(\text{»Treffer«}) = p$ gilt:
>
> $$P(|H_n - p| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leqq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Bemerkung: Das *Tschebyschow*-Risiko $r_T = \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$ wird hier zu $r_T = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ und beträgt höchstens $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Sowohl in der Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten (**5.2.**) wie auch beim Versuch der Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch *v. Mises* wird ein intuitiver Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit sichtbar. Satz 248.1 gibt uns nun die Möglichkeit, diesen Zusammenhang zu erkennen. Dazu schreiben wir die *Tschebyschow*-Ungleichung von Satz 248.1 für das Gegenereignis auf, also

$$P(|H_n - p| < \varepsilon) \geqq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Diese Ungleichung können wir folgendermaßen interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die relative Häufigkeit des Treffers um weniger als ein beliebig kleiner, aber fest gewählter Wert ε von der Wahrscheinlichkeit p des Treffers unterscheidet, wächst mit zunehmender Länge n der *Bernoulli*-Kette und kommt dem Wert 1 beliebig nahe. Damit erweist sich die relative Häufigkeit für hinreichend großes n als guter »Meßwert« für die Wahrscheinlichkeit. Dieser Sachverhalt ist die Aussage des sog. Hauptsatzes der *Ars Conjectandi*, den *Jakob Bernoulli* (1655–1705) wohl um 1685 gefunden hat, und den man heute schwaches Gesetz der großen Zahlen nennt.*

Satz 249.1: Schwaches Gesetz der großen Zahlen von *Jakob Bernoulli*.
Ist A der Treffer einer *Bernoulli*-Kette der Länge n mit $P(A) = p$ und $H_n(A)$ seine relative Häufigkeit, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|H_n - p| < \varepsilon) = 1$$

Man könnte nun versucht sein, $\varepsilon = 0$ zu setzen, in der Hoffnung, mit zunehmendem n schließlich p exakt zu bestimmen. *Bernoulli* hat bereits darauf hingewiesen,

»daß sich dann das Gegenteil ergäbe«,

nämlich $$\lim_{n \to \infty} P(|H_n - p| = 0) = \lim_{n \to \infty} P(H_n = p) = 0\,,$$

was mit unserer Beobachtung über $\max\{\mathrm{B}(n; p; x)\}$ von Seite 246f. übereinstimmt, und daß wir den Wert von p

»nur mit einer bestimmten Annäherung erhalten, d.h. zwischen zwei Grenzen einschließen können, welche aber beliebig nahe beieinander angenommen werden dürfen«.

Der scheinbare Widerspruch klärt sich auf, wenn man bedenkt, daß im endlichen Intervall $]p - \varepsilon; p + \varepsilon[$ für großes n sehr viel mögliche Werte von H_n liegen, die alle im Abstand $\frac{1}{n}$ aufeinanderfolgen. Es gibt also ungefähr $\frac{2\varepsilon}{\frac{1}{n}} = 2n\varepsilon$ Werte für H_n in diesem Intervall, von denen jeder zwar eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit hat, die Summe all dieser Wahrscheinlichkeiten aber nahezu 1 ergibt.

Was besagt im Sinne der Analysis eigentlich $\lim_{n \to \infty} P(|H_n - p| < \varepsilon) = 1$? Diese Gleichung drückt doch aus, daß sich bei fest vorgegebenem positiven ε zu jeder beliebigen Schranke $\eta > 0$ eine Länge n_0 für *Bernoulli*-Ketten des Parameters p

* *Bernoulli* hat, wie er selbst in der *Ars Conjectandi* (ed. 1713) wohl um 1703/4 schreibt, dieses Problem schon 20 Jahre mit sich herumgetragen. Wie stolz er auf diesen Satz war, zeigen seine Worte am Schluß des Beweises in seinen Tagebüchern:

»Hoc inventum pluris facio quam si ipsam circuli quadraturam dedissem, quod si maxime reperiretur, exigui usus esset.«

»Diese Entdeckung gilt mir mehr, als wenn ich gar die Quadratur des Kreises geliefert hätte; denn wenn diese auch gänzlich gefunden würde, so wäre sie doch sehr wenig nütz.«

Der Name *Gesetz der großen Zahlen* stammt von *Siméon-Denis Poisson* (1781–1840), der 1837 einen allgemeinen Satz veröffentlichte, den er *la loi des grands nombres* nannte, und von dem das *Bernoulli*sche Gesetz der großen Zahlen ein Spezialfall ist.

finden läßt, so daß für alle $n \geqq n_0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die relative Trefferhäufigkeit um weniger als ε von der Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer unterscheidet, mindestens $1-\eta$ wird, daß also $P(|H_n - p| < \varepsilon) \geqq 1-\eta$ gilt. Nehmen wir z.B. $\eta = \frac{1}{10}$, so bedeutet $P(|H_n - p| < \varepsilon) \geqq 90\%$ nach der Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten: Bestimmt man sehr oft die relative Häufigkeit H_n des Treffers in *Bernoulli*-Ketten einer Länge $n \geqq n_0$ zum selben Parameter p, so erhält man in ungefähr mindestens 90% aller Fälle Werte h_n, die in das Intervall $]p-\varepsilon; p+\varepsilon[$ fallen. Diesen Sachverhalt drückt man dadurch aus, daß man sagt, $\boldsymbol{H_n}$ **konvergiere in Wahrscheinlichkeit nach** $\boldsymbol{p}$, oder auch, $\boldsymbol{H_n}$ **konvergiere stochastisch nach** $\boldsymbol{p}$. Figur 250.1 veranschaulicht diese Art von Konvergenz.

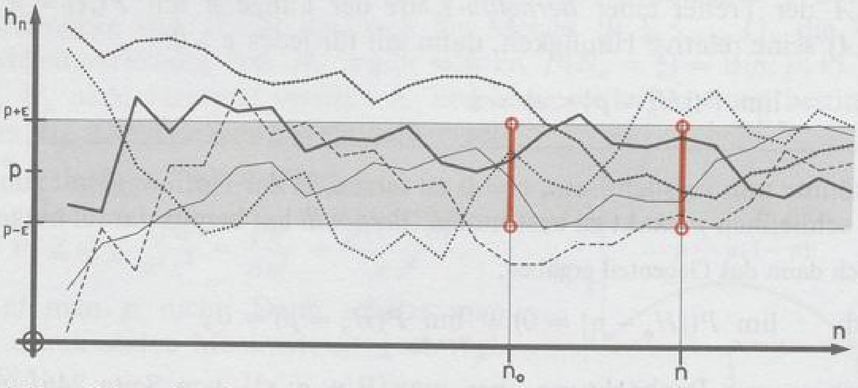


Fig. 250.1 Zum Schwachen Gesetz der großen Zahlen: Es gibt ein n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Werte h_n der relativen Häufigkeit H_n in das Intervall $]p-\varepsilon; p+\varepsilon[$ fallen, mindestens $1-\eta$ beträgt. – Anschaulich: Der Anteil der Schlangen, die durch das 2ε-Tor um p hindurchgehen, ist für $n \geqq n_0$ etwa $1-\eta$.*

Aus der stochastischen Konvergenz von H_n darf auf keinen Fall geschlossen werden, daß von dem gefundenen n_0 ab die relative Häufigkeit für noch größere Längen in dem Intervall $]p-\varepsilon; p+\varepsilon[$ bleibt, d.h., daß etwa $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(A) = P(A)$ gelte! Eine etwas schwächere Behauptung als diese hat im Jahre 1909 *Émile Borel* (1871–1956) für $p = \frac{1}{2}$ gefunden. Sie wurde 1917 von *Francesco Paolo Cantelli* (1875–1966) für $0 < p < 1$ verallgemeinert und heißt

Das starke Gesetz der großen Zahlen:

$$P(\lim_{n\to\infty} H_n = p) = 1$$

Es besagt, daß die relative Häufigkeit **fast sicher** gegen die zugehörige Wahrscheinlichkeit **konvergiert**.
Wir verzichten auf den Beweis, da wir dazu unendliche Ergebnisräume benötigten.

* Jede gezeichnete Schlange ist folgendermaßen entstanden: Zu jedem n werden n unabhängige Versuche gemacht, und dann h_n bestimmt. Z. B.: Um h_{100} zu bestimmen, müssen 100 unabhängige Versuche gemacht werden. Um dann eine Schlange bis $n = 100$ zeichnen zu können, müssen $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ Versuche ausgeführt werden! Man darf die Schlangen von Figur 250.1 nicht mit denen der Figuren 31.1, 33.1, 34.1 und 71.1 verwechseln, die die Entwicklung von h_n darstellen. So ist z.B. in Figur 31.1 die Entstehung von h_{800}(»Adler«) $= \frac{1}{2}$ dargestellt; die Schlange gibt also die Entwicklung für diesen einen Wert an.

Das schwache Gesetz der großen Zahlen rechtfertigt unsere Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten, d.h. die statistische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten. Um mit *Jakob Bernoulli* zu sprechen: Wir können die Wahrscheinlichkeit

»a posteriori fast ebenso genau finden, als wenn sie uns a priori bekannt«

wäre. Es liefert uns also gewissermaßen eine Meßvorschrift für die Wahrscheinlichkeit von solchen Ereignissen, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind. Die Wahrscheinlichkeit solcher Ereignisse läßt sich damit wie eine physikalische Konstante messen!

Bei flüchtiger Betrachtungsweise könnte man meinen, daß im Gesetz der großen Zahlen ein Zirkelschluß vorliegt, da es eine Aussage über einen Zusammenhang zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit macht, den man über die Interpretationsregel schon zur Grundlage der Definition der Wahrscheinlichkeit gemacht hat. Ein solcher circulus vitiosus liegt aber nicht vor, weil wir als Grundlage der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Axiomensystem von *Kolmogorow* völlig unabhängig vom Begriff der relativen Häufigkeit definiert haben. Das Gesetz der großen Zahlen zeigt nun, daß diese abstrakte Definition der Wahrscheinlichkeit genau den realen Hintergrund erfaßt, für dessen Beschreibung man die Wahrscheinlichkeitstheorie geschaffen hatte. Wir können nun auch noch verstehen, warum wir das Empirische Gesetz der großen Zahlen, die Stabilisierung der relativen Häufigkeit um einen festen Wert, nicht präzise formulieren konnten. Wir benötigen zu diesem Zweck nämlich den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Das schwache Gesetz der großen Zahlen drückt diese Stabilisierung aus; es besagt ja gerade, daß große Abweichungen der relativen Häufigkeit von diesem festen Wert nach einer sehr langen Versuchsreihe sehr unwahrscheinlich sind.

Die Aussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen wird von vielen Leuten mißverstanden. So neigen manche Lottospieler wie einst *d'Alembert* (1717–1783) dazu, gerade diejenigen Zahlen zu tippen, die bei den bis dahin erfolgten Ausspielungen sehr selten erschienen sind. Sie meinen nämlich, das schwache Gesetz der großen Zahlen arbeite wie ein Buchhalter, der darauf achtet, daß alle Zahlen gleich oft gezogen werden. Das schwache Gesetz der großen Zahlen arbeitet aber anders, nämlich gewissermaßen durch Überschwemmung*: Defizite oder Überschüsse, die sich bei den *absoluten* Häufigkeiten im Laufe der Zeit ergeben, werden in der *relativen* Häufigkeit dadurch ausgebügelt, daß sie als Differenzen im Zähler bei sehr großem Nenner keine Rolle mehr spielen. So hat z.B. die Zahl 13, wie die Tabelle zu Aufgabe 38/7 zeigt, nach 1225 Ziehungen ein Defizit von 29 gegenüber dem Sollwert von 150. Das bedeutet für die relative Häufigkeit ein Defizit von $\frac{29}{1225} < 2{,}4\%$. Dasselbe Defizit von 29 würde bei 10000 Ziehungen in der relativen Häufigkeit nur mehr 0,29% ausmachen; nach 1 Million Ziehungen spielt dieses Defizit mit 0,0029% aber keine Rolle mehr.

Analog sorgt beim *Galton*brett das schwache Gesetz der großen Zahlen dafür, daß auf lange Sicht, wenn immer mehr Kugeln durch den Nagelwald laufen, die Fächer immer genauer nach $B(n; \frac{1}{2})$ gefüllt werden. Dabei ist es offensichtlich

* swamping effect – *L. H. C. Tippett* prägte 1943 diesen Begriff.

unsinnig anzunehmen, daß eine startende Kugel weiß, in welchem Fach gerade Defizit herrscht, um bevorzugt dorthin zu springen.
Unterstellt man dem schwachen Gesetz der großen Zahlen also einen Buchhaltercharakter, so müßte man wider alle Vernunft annehmen, daß stochastische Geräte Gewissen und Gedächtnis hätten, wie es *Joseph Bertrand* (1822–1900) einmal treffend formulierte*. Wäre dem so, entgegnete 1785 *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) in seinen *Opuscula Analytica*** der Auffassung *d'Alemberts*,

»dann müßte jeder nach einem Jahr, ja nach einem Jahrhundert stattfindende Zug vom Ergebnis aller Züge abhängen, die seit undenklichen Zeiten an irgendwelchen Orten dieser Erde stattgefunden haben; Absurderes kann sicherlich kaum gedacht werden.«

14.8. Anwendungen der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*

Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* kann, je nach Bedarf, unterschiedlich formuliert werden. Wir stellen die drei häufigsten Formulierungen der *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung in der Form, in der sie sich am leichtesten merken lassen, zusammen:

1) Ist X eine Zufallsgröße mit $\mathscr{E}X = \mu$ und ist $a > 0$, dann gilt

$$P(|X-\mu| \geqq a) \leqq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}. \qquad \text{(Satz 184.1)}$$

2) Ist H_n die relative Häufigkeit eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit p in einer *Bernoulli*-Kette der Länge n und ist $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$P(|H_n - p| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leqq \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \qquad \text{(Satz 248.1)}$$

3) Ist $\bar{X}_n$ das arithmetische Mittel n gleichverteilter, paarweise unabhängiger Zufallsgrößen X_i mit $\mathscr{E}X_i = \mu$ und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$ und ist $a > 0$, dann gilt

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geqq a) \leqq \frac{\sigma^2}{na^2}. \qquad \text{(Aufgabe 271/71)}$$

Viele Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung handeln davon, daß das wahre Risiko, d.h., daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Werte einer Zufallsgröße X von ihrem Erwartungswert μ um mindestens a abweichen, eine gewisse Schranke η nicht überschreiten soll, kurz, daß

$$P(|X-\mu| \geqq a) \leqq \eta \tag{1}$$

sein soll. Anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, daß die Werte von X sich um weniger als a von μ unterscheiden, soll einen gewissen Mindestwert besitzen, d.h.,

* »On fait trop d'honneur à la roulette: elle n'a ni conscience ni mémoire.« (*Calcul des Probabilités*, p. XXII, 1889)
** Die Abhandlung lautet *Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in Calculo Probabilium*. – *Friedrich II.* bat *Euler* 1749 und 1763 um Rat bezüglich der Errichtung von Lotterien, um die Finanznot seines Staates zu beheben. Aus der Beschäftigung mit diesem Problem entstanden *Eulers* wahrscheinlichkeitstheoretische Arbeiten.

$$P(|X-\mu|<a) \geqq 1-\eta\,. \tag{2}$$

Da man nun auf Grund von Satz 184.1 weiß, daß das wahre Risiko höchstens so groß wie das *Tschebyschow*-Risiko r_T ist, ist Bedingung (1) für das wahre Risiko sicher erfüllt, wenn man das *Tschebyschow*-Risiko r_T höchstens so groß wie die Schranke η werden läßt, also (meist) weniger fordert, nämlich

$$P(|X-\mu| \geqq a) \leqq r_T \leqq \eta\,.$$

Es ist uns natürlich bewußt, daß man dadurch unter Umständen viel zu grobe Abschätzungen erhält. Wo möglich, wird man außerdem versuchen, mit $r_T = \eta$ auszukommen.

Nun zu den Aufgaben! Der einfachste Aufgabentyp ist derjenige, bei dem aus gegebenen Daten eine Schranke für das wahre Risiko gesucht wird.

Beispiel 1: Wie groß ist die Mindestwahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit für eine Sechs beim 100fachen Wurf eines L-Würfels um weniger als 0,05 von der Wahrscheinlichkeit für eine Sechs abweicht?

Lösung: An sich könnte man die gesuchte Wahrscheinlichkeit direkt berechnen. Mit $X :=$ »Anzahl der Sechsen bei 100 Würfen« erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(|H_{100}-\tfrac{1}{6}|<0{,}05) &= P(|\tfrac{X}{100}-\tfrac{1}{6}|<\tfrac{1}{20}) = P(|X-\tfrac{100}{6}|<5) = \\
&= P(11\tfrac{2}{3} < X < 21\tfrac{2}{3}) = \\
&= \sum_{k=12}^{21} \mathrm{B}(100;\tfrac{1}{6};k) = F_{1/6}^{100}(21) - F_{1/6}^{100}(11) = \\
&= 0{,}89982 - 0{,}07772 = 0{,}82210.
\end{aligned}$$

Hätten wir keine Tabellen, z.B. wenn $n = 80$ wäre, so müßten wir eine sehr mühsame Rechnung durchführen. Da ist man dann oft froh, wenn man die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch eine untere Schranke abschätzen kann. Wir suchen nun also eine untere Schranke für $P(|H_{100}-\frac{1}{6}|<0{,}05)$. Dazu gehen wir zum Gegenereignis über und suchen eine obere Schranke für $P(|H_{100}-\frac{1}{6}| \geqq 0{,}05)$.

Das *Tschebyschow*-Risiko $r_T = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{100\cdot 0{,}05^2}$ ist eine solche obere Schranke. Wir erhalten $r_T = \frac{5}{9} < 0{,}556$. Also ist

$P(|H_{100}-\frac{1}{6}|<0{,}05) \geqq 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9} > 44{,}4\%$.

Das bedeutet:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 44,4% liegen beim 100fachen Wurf eines L-Würfels die Werte h_{100} (»Sechs«) der relativen Häufigkeit H_{100} (»Sechs«) im Intervall $]\frac{1}{6}-0{,}05; \frac{1}{6}+0{,}05[\, = \,]\frac{7}{60}; \frac{13}{60}[$, was durch Figur 254.1 veranschaulicht wird.

In einer Vielzahl von Aufgaben wird nach der Zahl n der Versuche gefragt, die nötig sind, um das wahre Risiko nicht größer als η werden zu lassen.

Beispiel 2: Wie oft muß ein L-Würfel mindestens geworfen werden, damit mit einer Sicherheit von mindestens 60% das arithmetische Mittel der Augenzahlen um weniger als 0,25 vom Erwartungswert 3,5 abweicht?

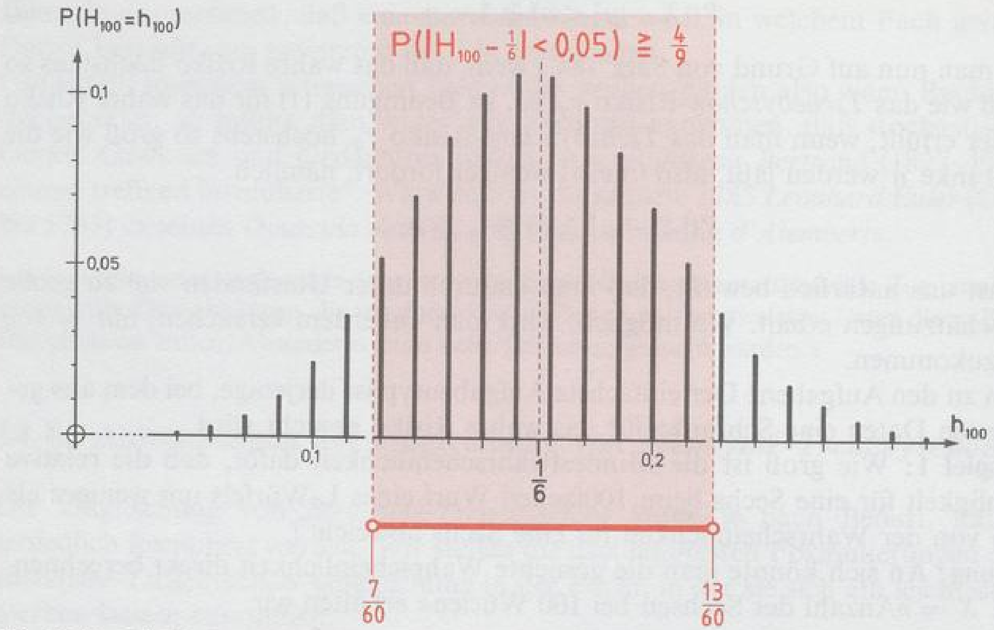


Fig. 254.1 Die Wahrscheinlichkeit, daß beim 100maligem Werfen eines L-Würfels die relative Häufigkeit der Sechs um weniger als $\frac{1}{20}$ von ihrer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ abweicht, ist mindestens $\frac{4}{9}$.

Lösung: Gesucht ist ein kleinstes n, so daß $P(|\bar{X}_n - 3{,}5| < 0{,}25) \geqq 60\% = 1 - \eta$. Da die Varianz der Zufallsgröße Augenzahl den Wert $\frac{35}{12}$ hat (Aufgabe 194/**44**), erhalten wir aus der *Tschebyschow*-Ungleichung

$$P(|\bar{X}_n - 3{,}5| \geqq 0{,}25) \leqq \frac{\frac{35}{12}}{n \cdot 0{,}25^2}.$$

Setzen wir das rechts stehende *Tschebyschow*-Risiko höchstens gleich der Schranke $\eta (= 40\%)$, dann gewinnen wir für n die folgende Abschätzung

$$\frac{35}{12 \cdot 0{,}25^2 \cdot n} \leqq 0{,}4 \Leftrightarrow n \geqq \frac{350}{3} = 116\tfrac{2}{3}, \qquad \text{also } n \geqq 117.$$

Somit gilt: Wirft man mindestens 117mal einen L-Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen vom Erwartungswert 3,5 um weniger als 0,25 abweicht, mindestens 60%, was Figur 255.1 veranschaulichen soll.

Schwieriger als diese beiden Aufgabentypen sind diejenigen, in denen ε- bzw. a-Intervalle gesucht sind. Dabei sind zwei Fragestellungen zu unterscheiden.

1. Fragestellung: Es ist dasjenige Intervall um p (bzw. μ) gesucht, in das die relative Häufigkeit H_n (bzw. das arithmetische Mittel $\bar{X}$) mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \eta$ trifft. Man sucht also ein ε, so daß die Bedingung

$$|H_n - p| < \varepsilon \Leftrightarrow p - \varepsilon < H_n < p + \varepsilon$$

mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit $1 - \eta$ erfüllt wird.

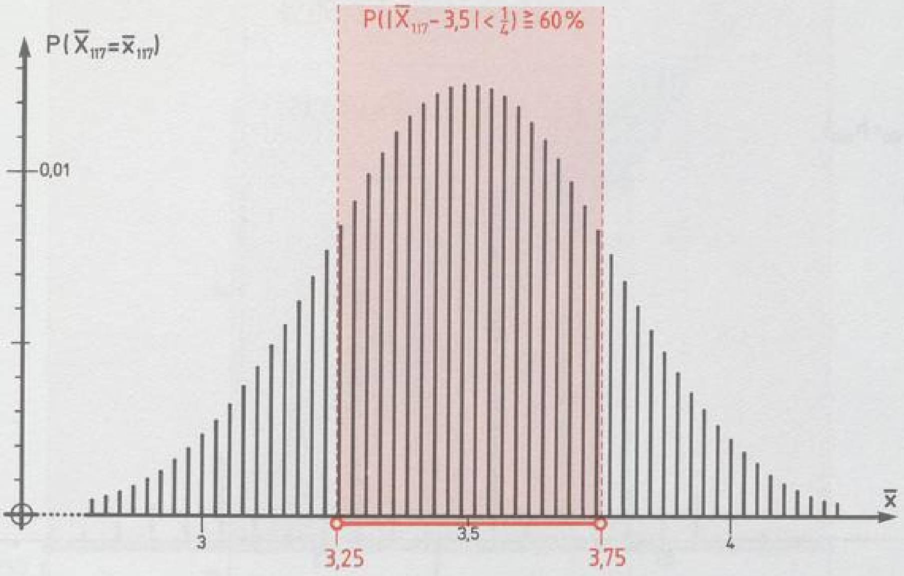


Fig. 255.1 Soll die Wahrscheinlichkeit, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen eines L-Würfels vom Erwartungswert 3,5 um weniger als $\frac{1}{4}$ abweicht, mindestens 60% betragen, so muß mindestens 117mal gewürfelt werden.
Gezeichnet ist vom Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\bar{X}_{117} = \bar{x})$ nur jeder dritte der 586 Stäbe (die bei $\bar{x} \in \{1, \frac{118}{117}, \frac{119}{117}, \ldots, 6\}$ liegen), sofern er mindestens $5 \cdot 10^{-5}$ mißt.

Beispiel 3: In welchem Intervall um $p = \frac{1}{6}$ liegt bei 100maligem Werfen eines L-Würfels die relative Häufigkeit für die Augenzahl 6 mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 60%?
Lösung: Gesucht ist ein ε, so daß

$$P(|H_{100} - \tfrac{1}{6}| < \varepsilon) = P(\tfrac{1}{6} - \varepsilon < H_{100} < \tfrac{1}{6} + \varepsilon) \geqq 60\%$$

wird. Statt dessen können wir auch

$$P(|H_{100} - \tfrac{1}{6}| \geqq \varepsilon) \leqq 40\%$$

fordern. Das ist sicher erfüllt, wenn das *Tschebyschow*-Risiko höchstens 40% wird, also

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{100\,\varepsilon^2} \leqq 0{,}4 \Leftrightarrow \varepsilon \geqq \tfrac{1}{24}\sqrt{2} = 0{,}0589\ldots$$

Für $\varepsilon = 0{,}059$ ist die Bedingung sicherlich erfüllt, d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% ergeben sich Werte h_{100}(»6«) der relativen Häufigkeit H_{100}(»6«) zwischen 0,107 und 0,226. Figur 256.1 veranschaulicht diesen Sachverhalt. – Bedenkt man noch, daß H_{100} nur Werte aus $\{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{99}{100}, 1\}$ annehmen kann, so läßt sich verschärfend sagen, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% die relative Häufigkeit H_{100}(»Sechs«) Werte im Intervall [0,11; 0,22] annimmt.

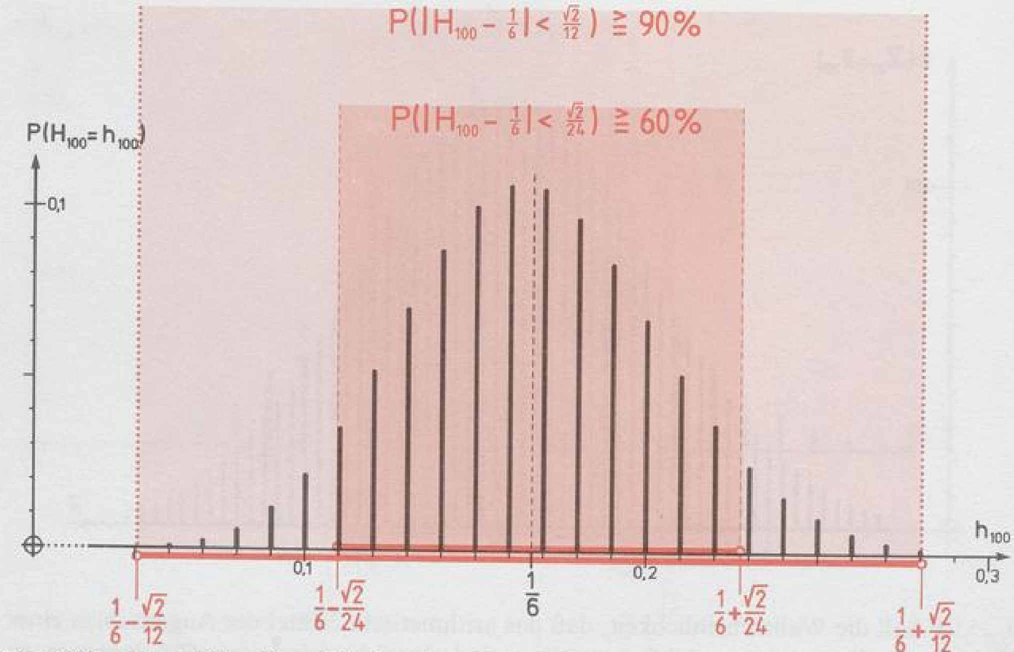


Fig. 256.1 Beim 100maligen Werfen eines L-Würfels ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 60%, daß die relative Häufigkeit des Ereignisses »Sechs« von seiner Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ um weniger als $\varepsilon = \frac{1}{24}\sqrt{2}$ abweicht. – Punktiert ist dasjenige ε-Intervall angegeben, das man wählen muß, falls man eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% fordert.

Die Aufgabenstellung von Beispiel 3 lautet allgemein $P(|H_n - p| < \varepsilon) \geqq 1 - \eta$ bzw. $P(|H_n - p| \geqq \varepsilon) \leqq \eta$. Mit dem Ansatz $r_T = \eta$, also $\frac{pq}{n\varepsilon^2} = \eta$, erhält man

$\varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{n\eta}}$, was zum Intervall $I(p) := \left]p - \sqrt{\frac{pq}{n\eta}};\ p + \sqrt{\frac{pq}{n\eta}}\right[$

führt. Es wird also jedem p ein Intervall $I(p)$ zugeordnet, in das die Werte h_n der relativen Häufigkeit H_n mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \eta$ hineinfallen. Figur 257.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang $p \mapsto I(p)$. Die Hüllkurve all dieser Intervalle ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$|h_n - p| = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n\eta}}.$$

2. Fragestellung: Der andere Fall der Intervallbestimmung besteht darin, daß man bei einer Versuchsserie der Länge n einen Wert h_n der relativen Häufigkeit H_n ermittelt hat und nun ein ε-Intervall um diesen Wert h_n angeben möchte, von dem man mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit sagen kann, daß es die unbekannte, aber feste Wahrscheinlichkeit p enthält. Solche Zufallsintervalle nannte 1934 *Jerzy Neyman** (1894–1981) **Vertrauensintervall** oder **Konfidenzintervall** für p.

* gesprochen jɛʒɨ nɛjman

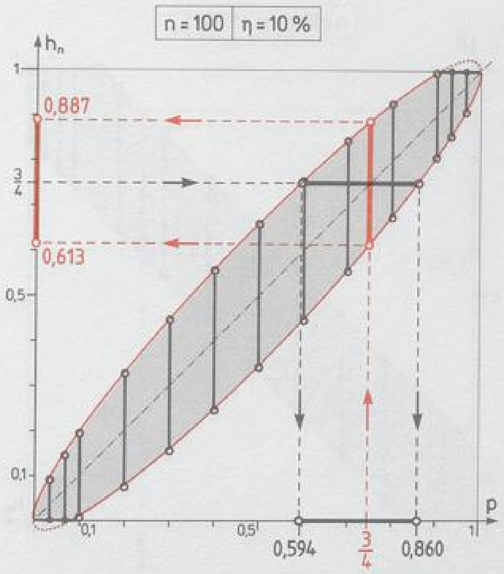


Fig. 257.1
Der Graph der Relation $p \mapsto I(p)$ ist die Punktmenge $\{(p|h_n)|h_n \in I(p) \cap [0;1] \wedge p \in [0;1]\}$, also das grau unterlegte Gebiet einschließlich des schwarzen Randes.
Für $p = \frac{3}{4}$ ist $I(\frac{3}{4}) =]\frac{3}{4} - \frac{1}{40}\sqrt{30}; \frac{3}{4} + \frac{1}{40}\sqrt{30}[\subset]0{,}613; 0{,}887[$ rot hervorgehoben.
In dieses Intervall fällt die relative Trefferhäufigkeit mindestens mit der Wahrscheinlichkeit 90%, wenn P(»Treffer«) $= \frac{3}{4}$ ist.
---: Geht man bei $h_n = \frac{3}{4}$ ein, so erhält man das zugehörige echte Konfidenzintervall auf der p-Achse (vgl. Figur 260.1).

Man konstruiert dazu *vor* der Ausführung des Zufallsexperiments ein möglichst enges Zufallsintervall $]H_n - \varepsilon; H_n + \varepsilon[$, das die unbekannte, aber feste Wahrscheinlichkeit p mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \eta$ überdeckt, für das also $P(|H_n - p| < \varepsilon) = P(H_n - \varepsilon < p < H_n + \varepsilon) \geqq 1 - \eta$ gilt.
Bei der 1. Fragestellung lag das ε-Intervall um den bekannten Wert p fest. Der Zufall steckte im Hineintreffen der relativen Häufigkeit H_n in dieses Intervall. Bei der 2. Fragestellung ist zwar auch p fest, aber nicht bekannt. Der Zufall bestimmt jetzt den Wert h_n der relativen Häufigkeit H_n und damit mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \eta$ das ε-Intervall um h_n, das so auf der Zahlengeraden liegt, daß es den gesuchten p-Wert überdeckt. Dabei hängt der Radius ε natürlich von η ab. (Das Verfahren ähnelt also dem Jagen einer Fliege mit einer Fliegenklatsche: Die Fliege ist das p, die Klatsche das ε-Intervall, die Klatschenmitte trifft zufallsgesteuert bei jedem Schlag auf das jeweilige h_n.)

Beispiel 4: Die ersten 100 Würfe von Tabelle 10.1 ergaben $h_{100}(\{6\}) = 0{,}18$. Für welches Intervall kann man mit einer Sicherheit von mindestens 90% schließen, daß es die Wahrscheinlichkeit p für eine Sechs enthält?

Lösung: Gesucht ist ein ε, so daß $P(H_{100}(\{6\}) - \varepsilon < p < H_{100}(\{6\}) + \varepsilon) \geqq 90\%$ wird. Dazu betrachten wir wieder das Gegenereignis, also

$P(|H_{100} - p| \geqq \varepsilon) \leqq 10\%$,

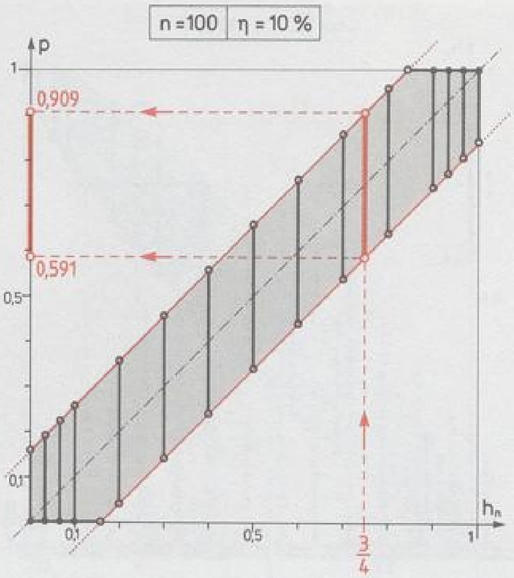


Fig. 258.1 Grobe Konfidenzintervalle. Der Graph der Relation $h_n \mapsto I(h_n)$ ist die Punktmenge $\{(h_n|p)|p \in I(h_n) \cap [0;1] \wedge h_n \in [0;1]\}$, also das grau unterlegte Gebiet einschließlich des schwarzen Randes. Für $h_{100} = \frac{3}{4}$ ist $I(\frac{3}{4}) =]\frac{3}{4} - \frac{1}{20}\sqrt{10}; \frac{3}{4} + \frac{1}{20}\sqrt{10}[\subset]0{,}591; 0{,}909[$ rot hervorgehoben. Man kann mit einer Sicherheit von mindestens 90% darauf vertrauen, daß dieses Intervall die Wahrscheinlichkeit $p = P(\text{»Treffer«})$ überdeckt, wenn die relative Häufigkeit des Treffers zu $h_{100} = \frac{3}{4}$ gemessen wurde.

was sicherlich erfüllt ist, wenn $\dfrac{pq}{100\,\varepsilon^2} \leqq \dfrac{1}{400\,\varepsilon^2} \leqq 10\%$.

Wir erhalten $\varepsilon \geqq \frac{1}{20}\sqrt{10} = 0{,}158\ldots$ Zum Zufallsergebnis $h_{100}(\{6\}) = 0{,}18$ gehört also das Intervall $]0{,}021; 0{,}339[$, von dem wir sagen können, es wurde auf Grund eines Verfahrens erhalten, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% zu einem Intervall führt, das die wahre Wahrscheinlichkeit p für die Augenzahl 6 bei diesem Würfel enthält.

Löst man die Aufgabenstellung von Beispiel 4 allgemein mit dem Ansatz $P(|H_n - p| \geqq \varepsilon) \leqq \dfrac{pq}{n\varepsilon^2} \leqq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} = \eta$, so erhält man $\varepsilon = \dfrac{1}{2\sqrt{n\eta}}$ und damit das **grobe Konfidenzintervall** $I(h_n) = \left]h_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n\eta}}; h_n + \dfrac{1}{2\sqrt{n\eta}}\right[$.

Es wird also jedem Wert h_n ein Intervall $I(h_n)$ zugeordnet, das den unbekannten Wert p mindestens mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \eta$ enthält. Figur 258.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang $h_n \mapsto I(h_n)$. Die Hüllkurve dieser groben Konfidenzintervalle ist ein Parallelenpaar mit der Gleichung $|p - h_n| = \dfrac{1}{2\sqrt{n\eta}}$.

»Genauere« Näherung. Weil p unbekannt ist, mußten wir den Ausdruck pq aus r_T durch den Wert $\frac{1}{4}$ abschätzen. Kennte man p, so wäre für $p \neq \frac{1}{2}$ eine genauere ε-Bestimmung durch $\dfrac{pq}{n\varepsilon^2} = \eta$ möglich. Man erhielte $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{pq}{n\eta}}$. Nach dem

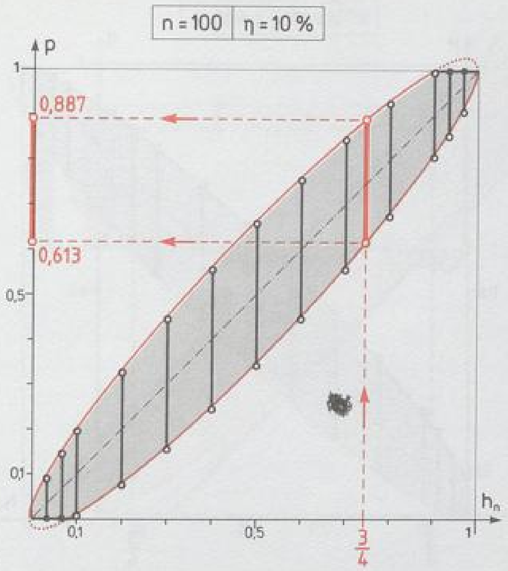


Fig. 259.1 Näherungskonfidenzintervalle. Der Graph der Relation $h_n \mapsto I(h_n)$ ist die Punktmenge $\{(h_n|p)|p \in \tilde{I}(h_n) \cap [0; 1] \wedge h_n \in [0; 1]\}$, also das grau unterlegte Gebiet einschließlich des schwarzen Randes. Für $h_{100} = \frac{3}{4}$ ist $\tilde{I}(\frac{3}{4}) =]\frac{3}{4} - \frac{1}{40}\sqrt{30}; \frac{3}{4} + \frac{1}{40}\sqrt{30}[\subset]0{,}613; 0{,}887[$ hervorgehoben. Man kann mit einer Sicherheit von etwa 90% darauf vertrauen, daß dieses Intervall die Wahrscheinlichkeit $p = P(\text{»Treffer«})$ enthält, wenn die relative Häufigkeit des Treffers zu $h_{100} = \frac{3}{4}$ gemessen wurde.

schwachen Gesetz der großen Zahlen ist aber h_n ein Näherungswert für p. Ersetzen wir also p durch h_n, so wird $\varepsilon \approx \sqrt{\frac{h_n(1-h_n)}{n\eta}}$.

Mit den Werten aus Beispiel 4 gewinnen wir $\varepsilon \approx \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{100 \cdot 0{,}1}} = 0{,}121\ldots$, also wie erwartet, ein kleineres Konfidenzintervall um 0,18 für $p = P(\{6\})$. Wir können damit sagen: Das Intervall $]0{,}059; 0{,}301[$ wurde durch ein Verfahren ermittelt, das mit einer Sicherheit von *ungefähr* mindestens 90% zu einem Intervall führt, das die wahre Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 bei diesem Würfel enthält.

Die genauere Näherung führt im allgemeinen Fall also zu einem

Näherungskonfidenzintervall $\tilde{I}(h_n) = \left]h_n - \sqrt{\frac{h_n(1-h_n)}{n\eta}}; \; h_n + \sqrt{\frac{h_n(1-h_n)}{n\eta}}\right[$.

Figur 259.1 zeigt den Zusammenhang $h_n \mapsto \tilde{I}(h_n)$. Die Hüllkurve dieser Näherungskonfidenzintervalle ist eine Ellipse mit der Gleichung $|p - h_n| = \sqrt{\frac{h_n(1-h_n)}{n\eta}}$, die mit der Ellipse aus Figur 257.1 übereinstimmt, wenn man die Achsenbezeichnungen p und h_n miteinander vertauscht. Diese Näherung ist vor allem für sehr kleine und sehr große h_n nicht sehr sinnvoll. In Figur 259.1 entartet z. B. für

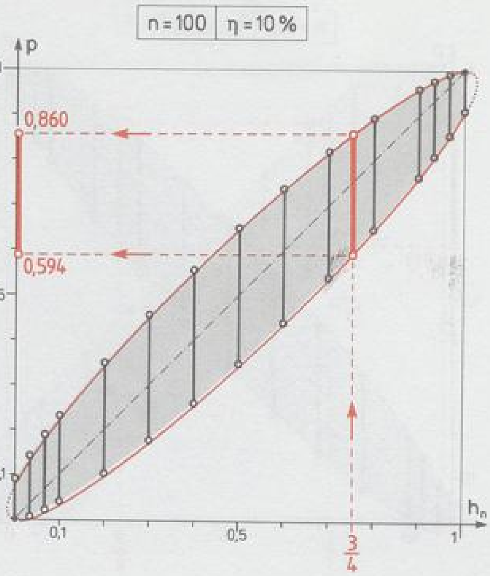


Fig. 260.1 Echte Konfidenzintervalle und die Konfidenzellipse $|p - h_n| = \sqrt{\frac{pq}{n\eta}}$. Das grau unterlegte Gebiet einschließlich des schwarzen Randes ist die Menge der Konfidenzintervalle. Für $h_{100} = \frac{3}{4}$ ist das zugehörige Konfidenzintervall $\mathfrak{I}(\frac{3}{4}) =]\frac{8}{11} - \frac{1}{44}\sqrt{34}; \frac{8}{11} + \frac{1}{44}\sqrt{34}[\subset]0{,}594; 0{,}860[$ rot hervorgehoben. Man kann mit einer Sicherheit von mindestens 90% darauf vertrauen, daß dieses Intervall die Wahrscheinlichkeit $p = P$(»Treffer«) überdeckt, wenn die relative Häufigkeit des Treffers zu $h_{100} = \frac{3}{4}$ gemessen wurde.

$h_n = 0$ das Vertrauensintervall für p zu einem Punkt. Das würde heißen, daß für $h_n = 0$ die Wahrscheinlichkeit p mit der Sicherheit $1 - \eta$ (in unserem Beispiel also 90%) den Wert 0 hätte, was sicher zuviel gesagt ist, wie die grobe Abschätzung von Figur 258.1 zeigt, die als grobes Konfidenzintervall für diesen Fall noch das Intervall $\left[0; \frac{1}{2\sqrt{n\eta}}\right[$ zuläßt.

Das **echte Konfidenzintervall** erhält man, wenn man das oben gefundene $\varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{n\eta}}$ verwendet und damit die Ungleichung $|h_n - p| < \varepsilon$ löst. Die Grenzen dieses offenen Intervalls sind somit die Lösungen der Gleichung

$$|h_n - p| = \sqrt{\frac{pq}{n\eta}}.$$

Bezeichnen wir die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung für p mit p_1 und p_2 (wobei $p_1 < p_2$ sein soll), dann wird jedem h_n das **echte Konfidenzintervall** $\mathfrak{I}(h_n) =]p_1; p_2[$ zugeordnet.

Man gewinnt dieses echte Konfidenzintervall übrigens graphisch, wenn man die Relation zwischen h_n und p aus Figur 257.1 von der h_n-Achse her liest. Zeichnet man die h_n-Achse, wie üblich, als Rechtswertachse, dann wird die Hüllellipse von Figur 257.1 an der Winkelhalbierenden gespiegelt. Es entsteht Figur 260.1, die

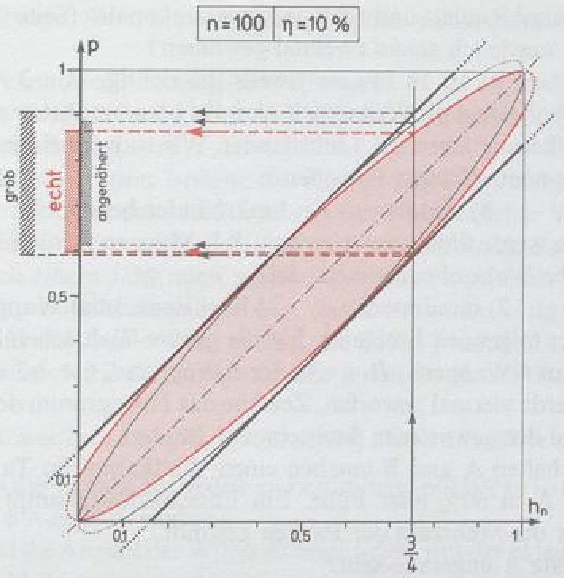


Fig. 261.1 Der Zusammenhang zwischen grobem, Näherungs- und echtem Konfidenzintervall einschließlich der Hüllkurven Parallelenpaar, Näherungskonfidenzellipse (schwarz) und echte Konfidenzellipse (rot). – Hervorgehoben ist der Wert $h_n = \frac{3}{4}$.

die echten Konfidenzintervalle samt der Konfidenzellipse mit der Gleichung $|p - h_n| = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n\eta}}$ als Hüllkurve zeigt.
In unserem konkreten Beispiel finden wir das echte Konfidenzintervall durch Lösen der quadratischen Gleichung $|0{,}18 - p| = \sqrt{\frac{p(1-p)}{100 \cdot 0{,}1}}$. Eine leichte Rechnung liefert $p_1 = 0{,}08965\ldots$ und $p_2 = 0{,}32852\ldots$ Damit können wir sagen: Das 90%-Konfidenzintervall]0,089; 0,329[wurde durch ein Verfahren ermittelt, das mit einer Sicherheit von mindestens 90% zu einem Intervall führt, das die wahre Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 bei diesem Würfel enthält. Das bedeutet: Führt man sehr oft dieses Verfahren durch, so werden mindestens 90% der so gefundenen Intervalle p enthalten. (Vgl. Aufgaben 275/**96** und **97**.)
Die vermeintlich genauere Schranke 0,301 von $\bar{I}(0{,}18)$ darf uns nicht täuschen! Sie ist ja nur ein Näherungswert. Zur Klärung zeigt Figur 261.1 den Zusammenhang zwischen dem Parallelenpaar der groben Abschätzung, der Hüllellipse sog. »genaueren« Näherung und der Konfidenzellipse.

Aufgaben

Zu 14.1.

1. Eine Urne enthält 6 schwarze, 8 weiße und 10 rote Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei 6maligem Ziehen mit Zurücklegen genau 3 rote Kugeln?
2. Eine Maschine stellt Stanzteile mit einem Ausschußanteil von 5% her. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 4 zufällig ausgewählte Teile ausnahmslos in Ordnung sind?

3. Ich spiele dreimal Roulett und setze jedesmal auf »pair« (Seite 22f.). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werde ich genau zweimal gewinnen?
4. Bei einer Prüfung ist zu 10 Fragen jeweils die richtige von 3 Antworten anzukreuzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man bei blindem Raten nur 3 richtige Lösungen?
5. In einer Bevölkerung leben 2% Linkshänder. Wie wahrscheinlich ist es, daß sich unter 7 zufällig zusammentreffenden Personen
   a) genau ein, **b)** mindestens ein Linkshänder befindet?
6. Eine L-Münze werde 8mal geworfen bzw. 8 L-Münzen werden 1mal geworfen.
   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß
      1) genau **2)** mindestens **3)** höchstens 3mal Wappen erscheint.
   b) Welches der folgenden Ereignisse hat die größte Wahrscheinlichkeit:
      $A :=$ »Genau 4 Wappen«, $B :=$ »3 oder 5 Wappen«, $C :=$ »2 oder 6 Wappen«?
7. Ein Würfel werde viermal geworfen. Zeichne das Histogramm der Verteilung der Zufallsgröße »Anzahl der geworfenen Sechsen« zur Breite 1.
8. Zwei Mannschaften A und B machen einen Wettkampf im Tauziehen*. Erfahrungsgemäß gewinnt A in 60% aller Fälle. Ein Entscheidungskampf bestehe aus n Partien. Sieger ist, wer die Mehrzahl der Partien gewinnt.
   a) Warum sollte n ungerade sein?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt die schwächere Mannschaft bei 3 bzw. bei 7 bzw. bei 15 Partien?
   •**c)** Wie viele Partien sollten mindestens »gezogen« werden, damit die Chance der schwächeren Mannschaft auf den Gesamtsieg unter $33\frac{1}{3}\%$ liegt?
9. Eine Sau ferkelt zweimal im Jahr. Die Wahrscheinlichkeit sei für männliche und weibliche Ferkel gleich groß.
   a) Wie groß ist in einem Wurf von 10 Ferkeln die Wahrscheinlichkeit für genau (höchstens, mindestens) 8 weibliche Ferkel?
   b) Wie groß ist im betrachteten Wurf die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein weibliches und mindestens ein männliches Ferkel geworfen werden?
   •**c)** Wie groß ist im Zehnerwurf die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens i weibliche und mindestens j männliche Ferkel geworfen werden? Welche Werte ergeben sich für $(i|j) = (2|2), (2|5), (5|5), (0|0), (4|8)$?
10. Von einer Familie ist bekannt, daß sie 8 Kinder hat.
   a) Welche Anzahl von Mädchen ist am wahrscheinlichsten, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt 0,5 ist?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt diese Anzahl wirklich auf?
   c) Der empirische Wert der Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt ist über lange Zeiträume hinweg konstant bei 0,514. Löse Aufgabe **a)** und **b)** für diesen Wert.
11. Bei einem Spiel hat Spieler A die Gewinnchance 0,7. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er trotzdem weniger als die Hälfte von 5 Spielen?
12. Bei einem Glücksautomaten besteht die Gewinnchance $\frac{1}{3}$ für ein Spiel.
   a) Ist die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal zu gewinnen, bei 3 oder bei 4 Spielen größer?
   •**b)** Zeichne diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl n der Spiele $(n = 1, \ldots, 10)$.
   •**c)** Für welche Anzahlen n ist die Wahrscheinlichkeit für genau 2maliges Gewinnen am höchsten bzw. liegt sie unter 10%?

•13. Jemand würfelt 60mal und hofft, genau 10mal die Eins zu erreichen. Wie groß ist die Chance dafür? – Sein Freund meint, man müsse viel öfter würfeln, um einen solchen Idealfall zu erreichen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 20 Einsen bei 120 Würfen?

* In den Jahren 1912 und 1920 war Tauziehen sogar olympische Disziplin.

14. Zwei Spieler vereinbaren: Wer bei 6maligem Würfeln mindestens k_0 Sechsen erzielt, hat gewonnen.
a) Bestimme k_0 so, daß das Spiel möglichst fair wird.
•**b)** Denke eine andere Vereinbarung über die Anzahl der zu erzielenden Sechsen aus, so daß das Spiel noch »fairer« wird.

•**15.** Bei einer schwierigen Operation besteht für Frauen die Chance 0,8, für Männer die Chance 0,7, danach noch mindestens 1 Jahr zu leben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 2 Frauen und 3 Männern (3 Frauen und 2 Männern), die diese Woche operiert werden mußten, nach einem Jahr noch genau 2 Personen am Leben?

16. **a)** Wie lang muß eine Zufallsziffernfolge sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als **1)** 99% **2)** 60% mindestens einmal die Ziffer 3 auftritt?
b) Überprüfe **2)** anhand der Zufallsziffertabelle in den *Stochastik-Tabellen*, Seite 47.

17. Drei Aufgaben aus *Christiaan Huygens*' (1629–1695) *De ratiociniis in aleae ludo* (1657).*

»*Aufgabe X*: Es ist die Anzahl der Würfe zu bestimmen, mit der es jemand wagen kann, mit einem Würfel 6 Augen zu werfen.«
»*Aufgabe XI*: Es ist die Anzahl der Würfe zu bestimmen, mit der es jemand wagen kann, mit zwei Würfeln 12 Augen zu werfen.«
»*Aufgabe XII*: Es ist zu bestimmen, mit wieviel Würfeln es jemand wagen kann, auf den ersten Wurf zwei Sechser zu werfen.«

18. Eine ideale Münze wird 40mal geworfen. Untersuche auf Unabhängigkeit:
$A :=$ »Nach dem 20. Wurf hat man 10 Adler«;
$B :=$ »Nach dem 21. Wurf hat man 11 Adler«.

Zu 14.2.

19. Eine Urne enthält 6 schwarze, 8 weiße und 10 rote Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei 6maligem Ziehen ohne Zurücklegen genau 3 rote Kugeln? Vergleiche das Ergebnis mit dem der Aufgabe 261/**1**.

20. Eine Urne enthalte 8 Kugeln, darunter 3 weiße. Man entnimmt ihr
a) vier **b)** zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße »Anzahl der weißen Kugeln in der Stichprobe« an und zeichne ein Stabdiagramm (10% $\hat{=}$ 1 cm).

21. Ein Komitee von 6 Personen wird aus 10 Männern und 5 Frauen ausgewählt. Berechne Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Anzahl der Männer im Komitee«.

22. In einer Kiste mit 20 Äpfeln sind 2 faule Äpfel. Man entnimmt auf gut Glück eine Stichprobe von 4 Äpfeln. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße »Anzahl der faulen Äpfel in der Stichprobe«.

23. **a)** Aus einem Skatspiel (32 Karten) werde eine Karte gezogen und wieder zurückgelegt. Wie oft muß dieser Vorgang mindestens ausgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 0,5 ist, mindestens 2 Herzkarten gezogen werden?
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mindestens 2 Herzkarten zu erhalten, wenn man die in **a)** ermittelte Anzahl von Karten auf einmal dem Spiel entnimmt.

* Die Aufgaben X und XI behandeln das Problem von *de Méré*. – Für Liebhaber geben wir den lateinischen Urtext von X an:
Propositio X: Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut una tessera 6 puncta iaciat.

24. **a)** Begründe die Bedingungen $K \leqq N$ und $n \leqq N$ in der Definition 233.1.
b) Zeige, daß $\{k \mid \max\{0; n-(N-K)\} \leqq k \leqq \min\{n; K\} \wedge k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ die Wertemenge einer nach $\mathrm{H}(N; K; n)$ verteilten Zufallsgröße ist.

25. Beweise, daß man $\mathrm{H}(N; K; n; k)$ auch in der Form $\dfrac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}$ schreiben kann.

26. Beweise: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \binom{N}{n}$

27. In einer Urne liegen 100 Kugeln, darunter 10 schwarze. Man zieht n Kugeln einmal mit und einmal ohne Zurücklegen. Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten dafür, dabei genau 2 schwarze Kugeln zu ziehen, falls **a)** $n = 2$, •**b)** $n = 10$, **c)** $n = 100$.

•**28.** Beweise unter Verwendung von Aufgabe **26**: Für den Erwartungswert einer nach $\mathrm{H}(N; K; n)$ verteilten Zufallsgröße X gilt: $\mathscr{E}X = n\dfrac{K}{N}$. Überprüfe damit den Wert aus Aufgabe **21**. – Führe den Beweis ohne Verwendung von Aufgabe **26**.

29. Beweise: Für die Varianz einer Zufallsgröße X gilt: $\operatorname{Var} X = \mathscr{E}(X(X-1)) + \mathscr{E}X - (\mathscr{E}X)^2$.

30. Beweise unter Verwendung von Aufgabe **29**: Ist X eine hypergeometrisch nach $\mathrm{H}(N; K; n)$ verteilte Zufallsgröße, dann gilt: $\operatorname{Var} X = n \cdot \dfrac{K}{N} \cdot \left(1 - \dfrac{K}{N}\right) \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$. Überprüfe den Wert aus Aufgabe **21**. – Die Endlichkeit des Urneninhalts wird durch $\dfrac{N-n}{N-1}$, den *finite population (correction) factor* (Endlichkeitsfaktor) berücksichtigt, der für festes n mit wachsendem N gegen 1 strebt.

Zu 14.3.

31. Bestimme aus einer Binomialtabelle:
a) $B(20; 0{,}8; 16)$ **b)** $B(100; 0{,}75; 87)$ **c)** $B(50; 0{,}5; 25)$
d) $\binom{10}{4} \cdot 0{,}2^4 0{,}8^6$ **e)** $0{,}6^{10}$ **f)** $0{,}99^{100}$

32. Bestimme aus den Stochastik-Tabellen $F_p^n(x)$ für

n	9	9	20	20	200	9	9	20	20	200
p	0,05	0,4	0,2	0,35	0,15	0,95	0,6	0,8	0,65	0,85
x	2	2	16	3,7	27,2	2	2	16	3,7	171,6

33. Z sei eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße. Bestimme aus einer Tabelle der kumulativen Werte die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses A:

	n	p	A		n	p	A
a)	20	0,8	$Z \leqq 8$	**g)**	50	0,45	$10 \leqq Z \leqq 20$
b)	20	0,2	$Z \geqq 8$	**h)**	50	0,75	$10 < Z \leqq 21$
c)	10	0,2	$Z = 2$	**i)**	50	0,65	$\lvert Z - 25\rvert \leqq 4$
d)	20	0,9	$Z < 7$	**j)**	100	0,65	$\lvert Z - 50\rvert > 7$
e)	10	0,6	$Z > 3$	**k)**	40	0,04	$\lvert Z - 1{,}6\rvert > 1$
f)	10	0,6	$Z \geqq 4$	**l)**	30	0,50	$\lvert Z - 15\rvert \geqq 5$

34. In einem Sack sind r rote Kugeln und w weiße Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert, die Kugel zurückgelegt und gut gemischt. Dies wird n-mal gemacht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man insgesamt
a) genau 5 rote, **b)** genau 5 weiße, **c)** mehr als 5 weiße Kugeln, **d)** keine weiße Kugel?
Rechnung für die Tripel $r; w; n$
1) 50; 50; 10 **2)** 70; 30; 10 **3)** 70; 30; 20 **4)** 30; 70; 20.

35. Eine ideale Münze wird 200mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Adler im Intervall [70, 130] bzw. [80, 120], [90, 110], [95, 105], [99, 101] bzw. ist sie genau gleich 100?

36. Eine ideale Münze wird geworfen. Der Anteil der Adler im Wurfergebnis liegt zwischen 40% und 60%. Wie wahrscheinlich ist dies bei 5, 10, 20, 50, 100 und 200 Würfen?

•37. Für n Würfe einer idealen Münze soll ein möglichst enges Intervall gefunden werden, in dem die Anzahl der Adler mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit liegen wird. Löse diese Aufgabe für $n = 10, 50, 100, 200$.

38. **a)** In einer Urne befinden sich 20 Kugeln; davon sind 8 schwarz. Es werden 3 Kugeln miteinander der Urne entnommen. Ein Treffer liegt vor, wenn sich darunter mindestens eine schwarze Kugel befindet. Der Versuch wird 10mal ausgeführt. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Treffer an.
b) Löse die Aufgabe **a)** allgemein: Von N Kugeln in der Urne sind S schwarz. m Kugeln werden miteinander entnommen; der Versuch wird n-mal ausgeführt.

39. Zum 50köpfigen Aufsichtsrat einer Firma gehören 8 Mathematiker. Durch das Los wird jährlich ein 5köpfiger Vorstand gewählt. In der 20jährigen Geschichte der Firma ist es 11mal vorgekommen, daß mindestens ein Mathematiker im Vorstand war. Wie wahrscheinlich ist es, daß derart häufig oder noch häufiger Mathematiker in den Vorstand gewählt werden? (Näherungslösung mit der Binomialtabelle genügt.)

40. Ein Tennis-Match ist entschieden, wenn einer der Spieler 3 Sätze gewonnen hat. Jeder Satz wird bis zur Entscheidung gespielt, d.h., im Tennis gibt es kein Unentschieden. Spieler A gewinne einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit p.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße $X :=$ »Anzahl der zur Entscheidung benötigten Sätze«. Überprüfe, ob die Summe der Wahrscheinlichkeiten den Wert 1 ergibt.
b) Berechne für 2 gleich starke Gegner die Werte der obigen Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Erwartungswert von X. – Zeichne ein Histogramm.

41. Eine Fußballmannschaft gewinne ihre Spiele allgemein mit der Wahrscheinlichkeit p und spiele mit der Wahrscheinlichkeit p' unentschieden. Unabhängigkeit der Spiele wird angenommen.
a) Man zeichne die »Gewinncharakteristik« für eine Runde von 5 Spielen, d.h. die Funktion $p \mapsto P$(»Mindestens 3 Spiele gewonnen«) (Einheit 10 cm). Für welchen Wert p ist die Gewinnchance für die Spielrunde genau gleich $\frac{1}{2}$? (Vermutung? – Graphische und rechnerische Prüfung!)
b) Nun werde wie üblich gewertet: Gewonnenes Spiel 2 Punkte, Unentschieden 1 Punkt, verlorenes Spiel 0 Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Runde zu gewinnen, d.h. mehr als die Hälfte aller erreichbaren Punkte zu erhalten? (Formel mit p und p'.) Setze die Daten $p = 0{,}7$ und $p' = 0{,}1$ ein und vergleiche mit dem entsprechenden Ergebnis aus **a)**.

42. Ein Taxistandplatz ist für 10 Taxen vorgesehen. Die Erfahrung zeigt, daß ein Wagen sich durchschnittlich 12 Minuten pro Stunde am Standplatz aufhält. Genügt es, den Standplatz für 3 wartende Wagen anzulegen, ohne daß dadurch in mehr als 15% aller Fälle ein Taxi keinen Platz findet?
Welche Anzahl von Taxen wird man am häufigsten am Standplatz antreffen?

43. Bei einer Versicherung sind 20 Agenten beschäftigt, die 75% ihrer Zeit im Außendienst verbringen. Wie viele Schreibtische müssen angeschafft werden, damit mindestens 90% der Innendienstzeit jeder Agent einen eigenen Schreibtisch zur Verfügung hat?

44. Anläßlich der Einführung des 8-Minuten-Takts für Ortsgespräche bietet ein Warenhaus Sanduhren an. Ungenauigkeiten bei der Herstellung bewirken, daß 10% der Uhren länger als 8 min laufen. Ein Lehrling packt eine Sendung von 50 Sanduhren aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Sendung genau (höchstens, mindestens) 6 länger laufende Uhren?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Sendung genau 6 länger laufende Sanduhren, die noch dazu beim Auspacken direkt nacheinander kommen?

c) Die Sendung enthalte genau 6 länger laufende Sanduhren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit folgen sie beim Auspacken direkt aufeinander?

Zu 14.5.

•**45.** Berechne Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße durch Zurückgehen auf ihre Definitionen.

46. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für folgende Zufallsgrößen:
$A :=$ Anzahl der Adler beim 8fachen Wurf einer Laplace-Münze,
$B :=$ Anzahl der Adler beim 16fachen Wurf einer Laplace-Münze,
$C :=$ Anzahl der Adler beim 160fachen Wurf einer Laplace-Münze,
$D :=$ Anzahl der Adler beim 10^6fachen Wurf einer Laplace-Münze,
$E :=$ Anzahl der Sechser beim 4fachen Wurf eines Laplace-Würfels,
$F :=$ Anzahl der Doppelsechser beim 24fachen Wurf zweier Laplace-Würfel,
$G :=$ Auszahlung in DM beim 100maligen Setzen von 0,5 DM auf Rouge beim Roulett.
(Warum ist die Zufallsgröße »Auszahlung« nicht binomial verteilt, wenn der Einsatz 1 DM beträgt?)

47. Zwei Schützen A und B treffen mit einer Sicherheit von 75% bzw. 85%. A erzielte bei 10 Schüssen 7 Treffer, B bei 20 Schüssen 16 Treffer. Wer war relativ zu seinen sonstigen Leistungen an diesem Tage der bessere?

48. Eine Zufallsgröße ist binomial verteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Berechne n und p für
a) $\mu = 8{,}1$ und $\sigma = 2{,}7$ **b)** $\mu = 72{,}9$ und $\sigma = 2{,}7$ **c)** $\mu = 8{,}1$ und $\sigma = 0{,}9\sqrt{7}$.

49. Eine Zufallsgröße X ist binomial verteilt mit $\mu = 3{,}2$ und $\sigma = 1{,}6$. Berechne, ggf. unter Verwendung der Rekursionsformel,
a) $P(X = 3)$, **b)** $P(X = 5)$, **c)** $P(X = 9)$, •**d)** $P(2 < X \leqq 8)$,
•**e)** $P(|X - \mu| < 2 \cdot \sigma)$.

50. Von einem Schock Eier sind im Schnitt 3 angeschlagen. Dorothea kauft 40 Eier und findet 5 angeschlagene.

a) Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße »Anzahl der angeschlagenen Eier«?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 40 Eiern mindestens 5 angeschlagene sind? Hat Dorothea besonderes Pech?

51. In einem großen Saustall befinden sich 1000 Säue. Im Jahr sind 2000 Würfe zu erwarten (vgl. Aufgabe 262/9). Wir nehmen an, daß es sich um Zehnerwürfe handelt. Bei wie vielen dieser Würfe enthält der Wurf voraussichtlich

a) kein männliches Ferkel, b) mindestens ein männliches Ferkel,
c) 1 oder 2 männliche Ferkel, d) genau 2 männliche Ferkel,
e) genau 5 männliche Ferkel?

52. Der Schützenkönig eines Kirchweihfestes geht auf folgenden Handel ein. Er schießt 10mal auf eine Scheibe. Für jeden Treffer ins Schwarze erhält er 100 DM. Trifft er nicht, so muß er jedesmal 200 DM bezahlen. Seine Treffsicherheit beträgt jedesmal 80%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens 8mal ins Schwarze trifft?

b) Wieviel Geld hat er zu erwarten?

53. Von einer Familie ist bekannt, daß sie 8 Kinder hat.

a) Wie viele Mädchen sind zu erwarten, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt 0,5 ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Anzahl wirklich angenommen?

c) Der empirische Wert der Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt ist über lange Zeiträume hinweg konstant 0,514. Löse Aufgabe **a)** und **b)** für diesen Wert.

d) Vergleiche diese Aufgabe mit Aufgabe 262/**10**.

54. Ein Schütze trifft mit 85% Sicherheit. Er nahm an 3 Wettbewerben teil. Beim 1. Wettbewerb traf er bei 10 Schüssen 8mal, beim 2. Wettbewerb bei 15 Schüssen 12mal und beim 3. Wettbewerb bei 20 Schüssen 16mal ins Schwarze. Wann war er relativ am besten und am schlechtesten?

55. Zum Klassentreffen 1981 haben sich 30 ehemalige Schüler im Restaurant »Il Mulino« verabredet. Der Organisator hatte allerdings nicht bedacht, daß im Großraum München 3 Restaurants dieses Namens existieren. Jeder geht auf gut Glück in eines der drei Restaurants.

a) Wie viele Exschüler sind im Schwabinger »Il Mulino« zu erwarten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen sich dort mehr als $\frac{2}{3}$ der Exschüler?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt keiner (kommen alle) dorthin?

d) Tatsächlich kommen 13 dorthin.

1) Wie wahrscheinlich ist dies?

2) Bei welcher Wahrscheinlichkeit $p = P$(»Entscheidung fürs Schwabinger Il Mulino«) ist diese Zahl am wahrscheinlichsten? Berechne dazu das Maximum der Funktion $p \mapsto \mathrm{B}(30; p; 13)$.

56. Eine Maschine stellt Werkstücke mit einem Ausschußanteil von 4% her.

a) Man entnimmt der laufenden Produktion 200 Stück. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgrößen $X :=$ Anzahl der defekten Stücke und $Y :=$ Anzahl der brauchbaren Werkstücke. – Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Ausschußstücke im Bereich $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?

b) Wie viele Werkstücke darf man höchstens entnehmen, damit man mit 95% Sicherheit nur brauchbare hat? Welche Anzahl erhält man, wenn man nur 90% Sicherheit fordert?

57. a) Fasse die ersten 1000 Würfe aus Tabelle 10.1 als 100 *Bernoulli*-Ketten der Länge 10 auf. Nimm als Treffer »Wurf eines Daus«* und erstelle die empirische Verteilung der Zufallsgröße »Anzahl der Dause bei 10 Würfen«. Berechne daraus den empirischen Mittelwert $\hat{\mu}$ und die empirische Wahrscheinlichkeit $\hat{p}$.

b) Berechne die Verteilung $\mathrm{B}(n; \hat{p})$ und vergleiche mit der empirischen Verteilung.

58. a) Vergleiche für eine nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilte Zufallsgröße den Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit P(»Mindestens 1 Treffer«) für die Zahlenwerte

1) $n = 2$; $p = 0{,}005$ **2)** $n = 3$; $p = 0{,}1$ **3)** $n = 3$; $p = 0{,}01$

b) Beweise die Näherungsformel: Für eine nach $\mathrm{B}(n;p)$ verteilte Zufallsgröße gilt, falls der Erwartungswert μ nahe bei Null liegt: $P(X \geqq 1) \approx \mu$.

c) Berechne mit Hilfe dieser Näherungsformel $P(X \geqq 1)$ für $n = 100$ und $p = \frac{1}{2000}$. Was liefert der Taschenrechner für $P(X \geqq 1)$?

59. Eine nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilte Zufallsgröße hat die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ.

a) Drücke n und p durch σ und μ aus. **b)** Beweise, daß $\sigma^2 \leqq \mu$ gilt.

c) Beweise, daß für $\sigma^2 < \mu$ die Zahl $\mu - \sigma^2$ ganzzahlig in μ^2 enthalten ist.

* Das Daus (Plural: Dause, auch Däuser), gelegentlich auch Taus, bedeutet beim Würfelspiel »zwei Augen«, was im Englischen mit *deuce* bezeichnet wird. Zur Etymologie: Daus < spätalthochdeutsch dus < südfrz. dous < lat. duos für duo.

60. X sei nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilt. Wie groß muß n sein, damit das 3σ-Intervall um μ zwischen 0 und n liegt, d.h., $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma] \subset [0; n]$, falls p zwischen 0,1 und 0,9 liegt?

61. **a)** Jemand wettet, daß bei einem 20fachen Wurf einer Laplace-Münze 9-, 10- oder 11mal Zahl erscheint. Wie müssen die Einsätze verteilt sein, damit die Wette fair ist? (Exakter Wert)

b) Wie ist die Verteilung der Einsätze für eine faire Wette, wenn man eine L-Münze 10-, 20-, 40-, 100mal wirft und jedesmal darauf wettet, daß die Anzahl der Adler im Bereich $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt?

62. Bei einem Glücksrad ist ein Sektor mit $p \cdot 360°$ für die 1 als Treffer vorgesehen. Der Rest liefert 0 als Niete. Das Glücksrad muß n-mal gedreht werden. Gibt es dabei genau einen Treffer, dann wird ein Preis ausbezahlt. Für welches p ist die Wahrscheinlichkeit für einen Preis am größten? Berechne für dieses p den Erwartungswert der Anzahl der Treffer. – Welcher Wert ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, wenn n gegen Unendlich strebt?

63. A und B vereinbaren folgende Spielregel: A wirft drei 5-DM-Münzen, B wirft zwei 5-DM-Münzen. (Die Münzen seien Laplace-Münzen.) Gewonnen hat der Spieler, der mehr Adler geworfen hat. Im Fall eines Remis wird ein neues Spiel gespielt.

a) Die Spielergebnisse werden als Paare (Anzahl der Adler von A | Anzahl der Adler von B) notiert. Stelle den dazu passenden Ergebnisraum auf.

b) Es werden die folgenden Ereignisse definiert: $A :=$ »A gewinnt das Spiel«, $B :=$ »B gewinnt das Spiel«, $R :=$ »Remis«. Gib die entsprechenden Ergebnismengen an.

c) Stelle tabellarisch die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des Ergebnisraums aus **a)** auf. Liegt ein Laplace-Experiment vor? Begründung!

d) Berechne $P(A)$, $P(B)$ und $P(R)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den ersten 3 Spielen keine Entscheidung fällt?

e) X sei die Zufallsgröße »Spielausgang«; sie nehme die Werte $-1, 0, 1$ an, wenn B gewinnt, wenn Remis eintritt bzw. wenn A gewinnt. Zeichne das Histogramm mit der Breite 1 und die kumulative Verteilungsfunktion dieser Zufallsgröße. Wie kann man aus der kumulativen Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »B verliert nicht« entnehmen? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

f) Es werden nun so viele Spiele gespielt, bis schließlich A oder B gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A Sieger wird?

g) Der Gewinner des in **f)** beschriebenen Spiels erhält alle 5 Münzen, also 25 DM. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße $Y :=$ »Anzahl der von A gewonnenen DM«. Ist das Spiel fair?

h) Nun werde vereinbart, höchstens 5 Spiele zu spielen. S sei die Zufallsgröße »Anzahl der Spiele, die nötig sind, bis eine Entscheidung gefallen ist«; für den Fall, daß alle 5 Spiele remis enden, soll S auch den Wert 5 annehmen. Welcher einfache Ergebnisraum kann hier nun zugrundegelegt werden? Wie groß ist seine Mächtigkeit? Berechne den Erwartungswert von S. Welche Bedeutung hat er?

i) Welcher Wert ergibt sich für $\mathscr{E}S$ aus **h)**, wenn man die Beschränkung auf 5 Spiele fallenläßt?

64. Zwei Wanderer A und B gehen mit Schritten der Länge 1 auf der Zahlengeraden unabhängig voneinander spazieren. A beginnt bei 0 und geht jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ einen Schritt nach rechts (d.h. in positiver Richtung), mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ einen Schritt nach links. Er bleibt nie stehen. B beginnt bei $-k$ und geht jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{8}$ einen Schritt nach rechts, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8}$ ruht er sich eine Sekunde aus, was auch schon in der 1. Sekunde eintreten kann.

a) Die beiden Wanderer gehen k Sekunden lang. Man schreibe $+1$ für einen Schritt nach rechts, -1 für einen Schritt nach links und 0 für eine Sekundenpause. Gib für $k = 3$ je einen Ergebnisraum Ω_A bzw. Ω_B für A bzw. B an und bestimme die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_A und P_B.

b) Die Zufallsgröße A_k bzw. B_k ordne jedem Ergebnis die Zahl zu, auf der der Wanderer sich nach k Sekunden befindet. Gib je eine Wertetabelle für A_3 bzw. B_3 an.
Beachte: B_3 beginnt bei -3 (siehe oben).
Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen für A_3 bzw. B_3 auf.

c) Gib die kumulative Verteilungsfunktion für A_3 an. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A sich nach 3 Sekunden auf einer positiven Zahl befindet.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich A und B nach genau drei Sekunden am selben Ort befinden?

e) Zeige, daß A nach genau $k = 2n - 1$ Sekunden sicher nicht in 0 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A und B sich nach genau $k = 2n$ Sekunden in 0 befinden?

f) Berechne $\mathcal{E}(A_3)$ und $\mathcal{E}(B_3)$, allgemein $\mathcal{E}(A_k)$ und $\mathcal{E}(B_k)$.
Hinweise: 1. Stelle A_k als Summe von k Zufallsgrößen dar.
2. Beachte, daß $B_k + k$ eine nach $B(k; p)$ verteilte Zufallsgröße ist.

65. Ein Händler bezieht Spieltetraeder von zwei Herstellern A und B. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Händler, daß sich in der Produktion des Lieferanten A etwa 90%, in der des Lieferanten B etwa 70% L-Tetraeder befinden. A liefert dreimal soviel wie B.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einer willkürlich ausgewählten Pakkung zu 20 Stück genau 4 Nicht-L-Tetraeder befinden?

b) Aus den Packungen, die sich äußerlich nicht unterscheiden, wird auf gut Glück eine ausgewählt. Sie enthält genau 4 Nicht-L-Tetraeder. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit wurde ihr Inhalt vom Hersteller A geliefert?

66. Le problème des partis. – Vergleiche Aufgabe **18/10**. Zwei Spieler A und B spielen um einen Einsatz ein Spiel, das aus mehreren Partien besteht. Gewinner soll derjenige sein, der als erster n Partien gewonnen hat. A gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit p eine Partie, B mit $q = 1 - p$. Aus irgendwelchen Gründen brechen A und B das Spiel beim Stand

$$\text{(Siege von A)} : \text{(Siege von B)} = \alpha : \beta = (n-a) : (n-b)$$

ab; dabei bedeuten a bzw. b die Anzahlen derjenigen Partien, die A bzw. B noch gewinnen müßten, um Sieger zu sein. Wie ist der Einsatz bei Spielabbruch »gerecht« aufzuteilen?

a) Leite dazu einen der folgenden Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit eines Sieges von A her:

de Moivre (1711): $$\sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k} p^{a+b-k-1} q^k$$

Montmort (1713): $$p^a \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+k-1}{k} q^k$$

b) Löse damit die folgenden historischen Aufgaben. Vergleiche deine gefundene Lösung mit den seinerzeit gemachten Vorschlägen über die Aufteilung des Einsatzes.

A. Beide Spieler sind gleich geschickt.

I. *Luca Pacioli* (1494):
$n = 6$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$; Vorschlag 5 : 2

II. *Gerolamo Cardano* (1539):
1) $n = 10$, $\alpha = 7$, $\beta = 9$; Vorschlag 1 : 6
2) $n = 10$, $\alpha = 3$, $\beta = 6$; Vorschlag 5 : 14

III. *Niccolò Tartaglia* (1556):

1) $n = 6, \alpha = 5, \beta = 3$; Vorschlag 2:1
2) $n = 60, \alpha = 50, \beta = 30$; Vorschlag 2:1
3) $n = 60, \alpha = 10, \beta = 0$; Vorschlag 7:5

IV. *Giobattista Francesco Peverone* (1558)*:

$n = 10, \alpha = 7, \beta = 9$; Vorschlag: 1:6

V. Am 29.7.1654 schrieb *Blaise Pascal* einen Brief an *Pierre de Fermat*, in dem er mehrere Aufgaben dieses Typs löste:

1) $n = 3, \alpha = 2, \beta = 1$; Vorschlag 3:1
2) $n = 3, \alpha = 2, \beta = 0$; Vorschlag 7:1
3) $n = 3, \alpha = 1, \beta = 0$; Vorschlag 11:5
4) Ist $\alpha = n - 1$ und $\beta = 0$, so soll im Verhältnis $(2^n - 1):1$ aufgeteilt werden.
5) Ist $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ bei einem Spiel von n Partien, so soll der Anteil von A am Einsatz $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)$ betragen. Dabei bedeute

$$n!! := \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gelesen »n Doppelfakultät«.

VI. *Jakob Bernoulli* gibt in seiner *Ars Conjectandi* (1713) einen einfacheren Ausdruck für A's Anteil aus **V. 5)** an: Es fehle dem B nur ein Spiel mehr als dem A (d.h., es ist $b = a + 1$), dann erhält A vom Einsatz den Anteil $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{2a}}\binom{2a}{a}\right)$.
Zeige die Richtigkeit dieser Behauptung.

B. Beide Spieler sind nicht gleich geschickt.

I. *Abraham de Moivre* (1667–1754) veröffentlichte** 1711 als erster eine solche Aufgabe als Problem II in *De Mensura Sortis*:
Dem A fehlen 4 Siege und dem B 6 Siege zum Gewinn. Die Chance des A, eine Partie zu gewinnen, verhält sich zu der von B wie 3:2.
Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

II. Zur Einübung der in der Einleitung der 2. Auflage der *Doctrine of Chances* (1738) aufgestellten Formeln rechnet *de Moivre* einige einfache Fälle durch.

1) »Case IX$^{\text{th}}$. A and B play together, A wants 1 Game of being up, and B 2; but the Chances whereby B may win a Game, are double to the number of Chances whereby A may win the same: 'tis requir'd to assign the respective Probabilities of winning.«
2) »Case X$^{\text{th}}$. Supposing that A wants 3 Games of being up, and B 7; but that the proportion of Chances which A and B respectively have for winning a Game are 3 to 5, to find the respective Probabilities of winning the Set.«

III. Welche Aufteilung des Einsatzes wäre beim Problem von *Pacioli* gerecht, wenn man auf Grund des Spielstandes bei Spielabbruch annimmt, daß sich die Geschicklichkeiten der Spieler wie die Spielstände verhalten?

* *Due brevi e facili Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geometria.*

** Die unter **a)** angegebene Formel von *de Moivre* teilte bereits *Johann Bernoulli* am 17.3.1710 brieflich *Montmort* mit, der wiederum seine Formel am 1.3.1712 an *Nikolaus Bernoulli* schrieb und sie dann in die zweite Auflage seines *Essay d'Analyse sur le Jeux de Hazard* (1713) aufnahm.
Auch *Jakob Bernoulli* beschäftigte sich mit ungleich geschickten Spielern, wie der Abschnitt IV seines *Lettre a un Amy sur les Parties du Jeu de Paume* zeigt, der als Anhang zu seiner *Ars Conjectandi* abgedruckt wurde.

Zu 14.6.

67. a) Welche Beziehung muß zwischen n und p bestehen, damit bei einer Binomialverteilung der wahrscheinlichste Wert k_w nicht der dem Erwartungswert am nächsten liegende k-Wert ist?

b) Zeige, daß im Fall der Aufgabe **a)** der wahrscheinlichste Wert k_w der zweitnächste k-Wert ist.

68. a) Zeige: Die Schiefe der Binomialverteilung $B(n;p)$ ist positiv für $0 < p < \frac{1}{2}$ und negativ für $\frac{1}{2} < p < 1$.

b) Zeige: Die Schiefe einer nach $B(n; 1-p)$ verteilten Zufallsgröße ist gleich der negativen Schiefe einer nach $B(n;p)$ verteilten Zufallsgröße.

c) Berechne die Schiefe für die Verteilungen $B(16;p)$ aus Figur 242.1.

d) Berechne die Schiefe für die Verteilungen $B(n;\frac{1}{5})$ aus Figur 243.1.

•69. a) Bestimme Median, 1. und 3. Quartil und das Quantil der Ordnung 90% für eine nach $B(16;p)$ binomial verteilte Zufallsgröße mit $p \in \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}\}$ mit Hilfe der Tabellen von Figur 242.1.

b) Verfahre ebenso mit den Verteilungen von Figur 243.1.

c) Bestimme mit Hilfe von Tabellen dieselben Werte für Zufallsgrößen, die binomial nach $B(8;0{,}35)$, $B(50;0{,}1)$, $B(100;0{,}9)$ und $B(200;0{,}6)$ verteilt sind.

Zu 14.7.

•70. *Jakob Bernoulli* (1655–1705) formulierte das **Gesetz der großen Zahlen** folgendermaßen:

»Es verhalte sich die Zahl der fruchtbaren Fälle zur Zahl der unfruchtbaren Fälle wie $r:s$, also zur Zahl aller Fälle wie $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$, was zwischen den Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ liegt. Dann können so viele Versuche gemacht werden, daß es beliebig (z.B. c-mal) wahrscheinlicher ist, daß die Anzahl der fruchtbaren Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen als außerhalb falle, d.h., daß die Anzahl der fruchtbaren zur Anzahl aller Beobachtungen ein Verhältnis haben wird, das weder größer als $\frac{r+1}{t}$ noch kleiner als $\frac{r-1}{t}$ ist.«

Bernoulli beweist dies, indem er die Anzahl n der Versuche bestimmt, die dazu nötig sind. Er findet: n muß mindestens so groß wie die größere der beiden folgenden Zahlen v_1 und v_2 sein.

$$v_1 := \left(m_1 + \frac{s(m_1-1)}{r+1}\right)t, \quad \text{wobei} \quad m_1 \geqq \frac{\lg(s-1)c}{\lg(r+1)-\lg r} \wedge m_1 \in \mathbb{N}_0,$$

$$v_2 := \left(m_2 + \frac{r(m_2-1)}{s+1}\right)t, \quad \text{wobei} \quad m_2 \geqq \frac{\lg(r-1)c}{\lg(s+1)-\lg s} \wedge m_2 \in \mathbb{N}_0.$$

Zum Abschluß seines unvollendeten Werks zeigt er, daß, wenn $r:s$ den Wert 1,5 hat, man nicht $r:s = 3:2$, sondern wie $30:20$ oder gar wie $300:200$ setzen solle, um dadurch die Grenzen einzuengen. Im Falle $30:20$ bestimmt er dann die Anzahl der Versuche für $c = 1000$, 10^4 und 10^5.

a) Bestimme die Anzahl n der Versuche für die angegebenen c-Werte.

•b) Bestätige *Bernoullis* Behauptung, daß, ausgehend von $c = 1000$, bei Erhöhung des c-Wertes um eine Zehnerpotenz die Anzahl der Versuche um 5708 erhöht werden muß.

c) Löse **a)** und **b)** für das Verhältnis $300:200$.

71. a) Beweise: Sind die Zufallsgrößen X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ paarweise unabhängig und gleichverteilt mit $\mathscr{E}X_i = \mu$ und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$, dann gilt für ihr arithmetisches Mittel $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ folgende *Tschebyschow*-Ungleichung: $P(|\bar{X}_n - \mu| < a) \geqq 1 - \frac{\sigma^2}{na^2}$.

b) Wie lautet das für $\bar{X}_n$ geltende schwache Gesetz der großen Zahlen? Welche meßtechnische Bedeutung hat dieses Gesetz?

c) Beweise mit Hilfe der Ungleichung aus **a)** den Satz 248.1.

Zu 14.8.

72. In einer Urne liegen 2000 schwarze und 3000 weiße Steinchen. Man zieht 200mal ein Steinchen mit Zurücklegen.

a) Schätze mit Hilfe der *Tschebyschow*-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, daß mindestens 60 und höchstens 100 schwarze Steinchen gezogen werden.

b) Berechne diese Wahrscheinlichkeit exakt.

73. Ein L-Würfel werde n-mal geworfen und die relative Häufigkeit der Sechs bestimmt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* die Wahrscheinlichkeit dafür ab, den »Idealwert« $\frac{1}{6}$ um mehr als $\frac{1}{30}$ zu verfehlen. Berechne anschließend, falls möglich, die exakten Wahrscheinlichkeiten.

a) $n = 10$, **b)** $n = 200$, **c)** $n = 1000$.

74. In einer Urne sind 1000 Kugeln, darunter 300 weiße. Man zieht n-mal eine Kugel mit Zurücklegen.

a) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit kann man nach *Tschebyschow* prophezeien, daß die Anzahl der weißen Kugeln nicht mehr als $\mu + 0{,}05 \cdot n$ und nicht weniger als $\mu - 0{,}05 \cdot n$ beträgt?

b) Zeichne die Graphen der Funktionen $n \mapsto r_T$ und $n \mapsto 1 - r_T$. Gib die Funktionswerte für $n = 100$, 200 und 1000 an.

•**75.** In einem Behälter befinden sich 10^{25} Moleküle eines Gases. Sie fliegen völlig regellos durcheinander. Ein Zufallsexperiment bestehe darin, zu einem beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen, wie viele Moleküle in der linken Hälfte des Behälters sind. Für jedes Molekül seien die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die beiden Behälterhälften gleich groß, und die Moleküle mögen sich unabhängig voneinander bewegen. (Diese Annahme ist für ein Gas vernünftig, weil die Moleküle nur für winzige Zeitspannen an Zusammenstößen beteiligt sind und den überwiegenden Teil der Zeit frei dahinfliegen.)

a) Wie groß ist nach der *Tschebyschow*-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit höchstens, weniger als 49,95% oder mehr als 50,05% aller Moleküle in der linken Behälterhälfte zu finden? Was besagt das Ergebnis?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind rechts und links genau gleich viele Moleküle? (Rechenausdruck genügt.)

c) Es wird in dem Behälter ein winziger Teilbereich ins Auge gefaßt, der im »Idealfall« n_0 Moleküle enthalten würde. Im ganzen Behälter sind es n Moleküle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Molekül in dem ausgewählten Teilbereich anzutreffen? Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, daß der Idealwert der Molekülzahl im Teilbereich um mindestens 0,1% unter- oder überschritten wird?

d) Die Wahrscheinlichkeit für die in **c)** besprochene »Schwankung« der Molekülzahl soll gleich 0,5 sein. Gib mit Hilfe der dort vorgenommenen Abschätzung eine obere Schranke für die Anzahl n_0 der Moleküle an. Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit so vielen Molekülen unter Normalbedingungen (273 K und 1013 mbar)?

76. a) Wie oft muß man eine Münze werfen, damit man die Wahrscheinlichkeit für »Adler« mit einer Sicherheit von mindestens 90% auf 2 Prozentpunkte* genau durch die relative Häufigkeit von »Adler« annähern kann?

* In der Umgangssprache gibt man die Differenz zwischen zwei Prozentzahlen in **Prozentpunkten** an. Man beachte: Steigt z. B. die Arbeitslosenquote von 4% auf 5%, dann steigt sie um 1 Prozentpunkt, aber um 25%.

b) Ersetze in **a)** Münze durch Würfel und »Adler« durch »Sechs« und löse dafür die Aufgabe.

c) Welchen Wert für n erhält man in **b)**, wenn man davon ausgeht, daß P(»Sechs«) höchstens 20% beträgt?

77. Wie oft muß man eine L-Münze mindestens werfen, damit sich mit einer Sicherheit von mindestens 99% die relative Häufigkeit von »Adler« um weniger als 1 Prozentpunkt von der Wahrscheinlichkeit für »Adler« unterscheidet?

78. **a)** Es soll mit mindestens 60% Sicherheit ausgesagt werden, daß man auf Grund einer Stichprobe die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in ein Intervall der Länge 0,04 einschließen kann. Wie groß muß die Stichprobe mindestens sein?

b) Wie ändert sich die Stichprobenlänge, wenn man bei gleicher Sicherheit das Intervall für p nochmals auf die Hälfte reduzieren will?

79. Eine Lieferung enthält einen unbekannten Anteil p defekter Stücke. Man möchte durch eine Stichprobe der Länge n den Anteil p bis auf $\frac{1}{20}$ genau mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 95% bestimmen. Bestimme n. (Rechne mit Zurücklegen!)

80. **a)** Wie viele Personen muß man mindestens befragen, um den Stimmenanteil einer Partei mit einem Fehler von höchstens 5 Prozentpunkten vorhersagen zu können, wenn diese Vorhersage eine Sicherheit von mindestens 95% haben soll?

b) Wie ändert sich diese Mindestanzahl, wenn man mit 85% Sicherheit zufrieden ist?

c) Welche Mindestanzahlen ergeben sich bei **a)** und **b)**, wenn man eine Genauigkeit von 2 Prozentpunkten fordert?

81. **a)** In einer Kleinstadt gibt es 10000 Wähler. Der Bürgermeisterkandidat Theodor möchte durch eine Befragung von n willkürlich ausgewählten Personen das Wahlergebnis mit einer Sicherheit von 97,5% bis auf ± 1000 Theodor-Wähler vorhersagen lassen. Welche Zahl n ist hinreichend?

b) Bei der letzten Wahl stimmten 6000 der 10000 Wähler für Theodor. Wie viele Befragungen sind jetzt hinreichend, wenn Theodor durch seine Leistungen im Amt davon ausgehen kann, daß seine Beliebtheit

1) sich nicht verändert hat,

2) gestiegen ist, und er mit mindestens 8000 Theodor-Wählern rechnet?

82. Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers in einer *Bernoulli*-Kette habe den Wert $p = \frac{r}{t}$. *Jakob Bernoulli* berechnete die Anzahl der Versuche, die nötig sind, damit es c-mal wahrscheinlicher ist, daß die relative Häufigkeit des Treffers in das Intervall $\left[\frac{r-1}{t}; \frac{r+1}{t}\right]$ fällt als daß sie außerhalb fällt. (Vergleiche dazu Aufgabe 271/**70**.)
Schätze mit Hilfe der Ungleichung von *Tschebyschow* diese Zahl ab für $r:s = 20:30$ (bzw. $200:300$) und $c = 10^3$, 10^4 und 10^5. Dabei ist $r + s = t$. Vergleiche die erhaltenen Werte mit den von *Bernoulli* gefundenen.

83. Zur Stabilität einer Folge von Häufigkeiten.

a) Eine ideale Münze wird 500mal geworfen. In welchem Bereich liegt die erzielte Anzahl von Adlern mit 99%iger Sicherheit? Wie ist es bei 2000 Würfen?

b) Löse **a)** für einen idealen Würfel hinsichtlich der Anzahl der Sechsen.

c) Löse **b)** für ein ideales Ikosaeder.

84. In einer Urne befinden sich 100 Kugeln, davon 20 weiße. Es wird 200mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

a) In welchem bezüglich μ symmetrischen Intervall liegt mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln?

b) Berechne die exakte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln in dem unter **a)** gefundenen Intervall liegt.

c) Bestimme mit Hilfe von Tabellen ein möglichst kleines Intervall für die Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% aus **a)**.

85. Jemand bietet uns eine Urne mit Kugeln dar. Einige davon sind weiß. Wir dürfen 100mal eine Kugel mit Zurücklegen ziehen und sollen auf Grund unserer »Stichprobe« erraten, welches Intervall (in Abhängigkeit von h_{100}) den Anteil p der weißen Kugeln mit einer Sicherheit von mindestens 50% bzw. 90% enthält. Gib die Intervalle an.

86. a) Der 800fache Münzenwurf von Tabelle 11.1 hat zufällig genau 400mal »Adler« ergeben. Welches Intervall enthält die Wahrscheinlichkeit von »Adler« bei dieser Münze mit mindestens 99,6% Sicherheit? Bestimme das grobe, das Näherungs- und das echte Konfidenzintervall.

b) Welche Intervalle ergeben sich, wenn man nur
1) 95%, **2)** 90%, **3)** 80% Sicherheit fordert?

87. Ein Würfel wird 300mal geworfen. Dabei fällt 250mal die Eins.

a) Bestimme mit Hilfe der *Tschebyschow*-Ungleichung das grobe Konfidenzintervall, so daß man mit einer Sicherheit von 99% darauf vertrauen kann, daß $p = P(\text{»Eins«})$ diesem Intervall angehört.

b) Bestimme das Näherungskonfidenzintervall.

c) Bestimme das echte Konfidenzintervall.

•**d)** Zeichne für die gegebenen Daten das Parallelenpaar, die Näherungsellipse und die Konfidenzellipse wie in Figur 261.1.

88. Jemand will sein Schätzverfahren so einrichten, daß bei einer Stichprobenlänge von 100 die Irrtumswahrscheinlichkeit schlimmstenfalls 1% beträgt. Die Urteile haben die Form:

| Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *minus* Häufigkeit des Auftretens in der Stichprobe | $< a$

Wie muß a gewählt werden?

89. Der Würfel von Tabelle 10.1 ist offensichtlich unsymmetrisch, wie Tabelle 32.1 zeigt. Trotz der Bevorzugung von »Zwei« wird man annehmen dürfen, daß $P(\text{»Zwei«}) \leqq 0{,}25$ ist, und sicherlich ist $P(\text{»Vier«}) \leqq 0{,}15$. Man ermittle unter diesen Voraussetzungen Intervalle, die $P(\text{»Zwei«})$ bzw. $P(\text{»Vier«})$ mit mindestens 99% Sicherheit enthalten.

90. Aus einer Zeitungsmeldung vom 30. 1. 71:

»Das Interesse an Apollo 14 ist in der Bundesrepublik nach wie vor stark. Nach dem Ergebnis der Befragung von 1024 Einwohnern, ob sie sich für die Mondlandung genauso interessierten wie für das letzte Unternehmen dieser Art, sagten 28%, sie interessierten sich mehr dafür.«

Nehmen wir an, die 1024 Befragten seien eine echte Zufallsauswahl aus der Bevölkerung. In welchem Intervall kann man dann mit mindestens 97,5% Sicherheit den wahren Prozentsatz p derjenigen Bundesdeutschen vermuten, die sich damals besonders stark für die Mondlandung interessiert haben?
Berechne dazu
a) das grobe **b)** das Näherungs- **c)** das echte Konfidenzintervall.

91. Von einer Urne mit 1000 Kugeln sei von vornherein bekannt, daß sie höchstens 200 weiße Kugeln enthält. Es wird eine Stichprobe von 100 Stück mit Zurücklegen entnommen. Man schätzt die Anzahl der weißen Kugeln in der Urne zu $X = 1000 \cdot h_{100}$, falls $h_{100} \leqq \frac{1}{5}$, andernfalls zu 200 und gibt über die Urne folgendes Urteil ab:

»| geschätzte Zahl *minus* wirkliche Zahl weißer Kugeln | < 50«

Gib mit Hilfe der *Tschebyschow*-Ungleichung eine obere Schranke für die Irrtumswahrscheinlichkeiten an.

92. Man hat die Vermutung, daß in einer Urne, die nur schwarze und rote Kugeln enthält, doppelt soviel rote wie schwarze Kugeln liegen. Man zieht 300mal eine Kugel mit Zurücklegen und entschließt sich, die Vermutung nicht abzulehnen, wenn man mehr als 180- und weniger als 220mal eine rote Kugel zieht.

a) Schätze die Wahrscheinlichkeit ab, mit der man irrtümlicherweise von der Vermutung abgeht.

b) Wie müßte man die Entscheidungsregel abändern, damit die Wahrscheinlichkeit aus **a)** kleiner als 5% bzw. 5‰ wird?

93. Jemand möchte testen, ob eine Münze eine Laplace-Münze ist. Dazu wirft er sie 500mal und hält sie für eine Nicht-L-Münze, falls weniger als 230mal oder mehr als 270mal »Adler« fällt.

a) Schätze die Wahrscheinlichkeit ab, mit der irrtümlicherweise eine L-Münze für eine Nicht-L-Münze gehalten wird.

b) Ändere die Entscheidungsregel so ab, daß die Wahrscheinlichkeit aus **a)** kleiner als 10% bzw. 5% wird.

94. Im September 1964 haben sich 41% von 1000 befragten Bundesdeutschen für die Todesstrafe ausgesprochen.

a) Gib das grobe Konfidenzintervall an, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% den wahren Anteil p der Befürworter der Todesstrafe enthält.

b) Berechne das Näherungskonfidenzintervall mit $h_n \approx p$.

c) Berechne das echte Konfidenzintervall.

d) Löse **a)**, **b)** und **c)**, falls 41% von 10000 Befragten für die Todesstrafe gewesen wären.

95. Eine Repräsentativumfrage unter 4000 Bürgern ergab, daß 600 bei der nächsten Wahl den Kandidaten A wählen würden.

a) Welches Intervall enthält die Wahrscheinlichkeit für einen A-Wähler mit einer Sicherheit von 90%?

b) In welchem Bereich liegen mit 90% Sicherheit die absoluten A-Wählerzahlen, wenn alle 80000 Wahlberechtigten auch wählen?

c) Mit welcher Mindestsicherheit kann man behaupten, daß bei einer Umfrage unter 4000 Bürgern die relative Häufigkeit für einen A-Wähler im [14%; 16%]-Intervall liegt, falls die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für einen A-Wähler 15% beträgt?

Auf Grund der langwierigen Rechnungen empfiehlt sich bei den folgenden Aufgaben Gruppenarbeit oder Auswertung mit Hilfe eines Computers.

96. Fasse Tabelle 10.1 als eine Serie von 20 Versuchen zu je 60 Würfen auf. Bestimme unter Verwendung der linken Hälfte von Tabelle 32.1 die 20 Werte von H_{60}(»Sechs«). Berechne die 75%- bzw. 90%-Konfidenzintervalle für $p = P$(»Sechs«) und trage sie jeweils in ein Koordinatensystem ein, dessen Abszisse die Nummer der Versuchsserie angibt und dessen Ordinatenachse eine p-Achse ist.

97. In Tabelle 33.1 sind 8 Versuchsserien zu je 100 Würfen aus den 800 Würfen von Tabelle 11.1 konstruiert worden. Fasse sie durch Halbieren als 16 Serien zu je 50 Würfen auf und gib die 16 Werte an, die H_{50}(»Adler«) angenommen hat. Berechne die 75%- bzw. 90%-Konfidenzintervalle für $p = P$(»Adler«) und trage sie jeweils in ein Koordinatensystem ein, dessen Abszisse die Nummer der Versuchsserie angibt und dessen Ordinatenachse eine p-Achse ist.