Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

2. 2. Mehrstufige Zufallsexperimente

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

ist mathematisch aufwendig. Wir verzichten daher im folgenden auf sie und beschränken uns auf Ergebnisräume mit endlich vielen Elementen.

> **Definition 15.1:** Eine Menge $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ heißt **Ergebnisraum** eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element ω_i aus Ω zugeordnet ist. Die ω_i heißen dann die **Ergebnisse** des Zufallsexperiments.

Wir haben gesehen, daß zu einem realen Zufallsexperiment verschiedene Ergebnisräume konstruiert werden können. Gewisse dieser Ergebnisräume hängen dabei auf einfache Weise voneinander ab. So sind z.B. die Ergebnisse von Ω_2 denen von Ω_4 auf folgende Art zugeordnet:

$$\Omega_2 = \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ \}$$

$$\Omega_4 = \{\ g\ ,\ u\ \}$$

Ω_4 nennt man eine **Vergröberung** von Ω_2 und umgekehrt Ω_2 eine **Verfeinerung** von Ω_4. Offensichtlich bedeutet eine Vergröberung einen Verlust an Information. Das Ergebnis »gerade« läßt nicht mehr erkennen, welche der Augenzahlen 2, 4 oder 6 gefallen ist. Diesen Informationsverlust nimmt man jedoch oft bewußt in Kauf, wenn die Fragestellung dies gestattet.

Da jeder Ergebnisraum durch einen Abstraktionsprozeß aus dem realen Zufallsexperiment gewonnen wird, ist es verständlich, daß umgekehrt zu einem mathematischen Ergebnisraum Ω durchaus verschiedene reale Zufallsexperimente gehören können. So kann $\Omega = \{0; 1\}$ aufgefaßt werden als Ergebnisraum folgender realer Zufallsexperimente:

a) Münzenwurf mit den Ergebnissen $0 :=$ »Wappen« und $1 :=$ »Zahl«

b) Würfelwurf mit den Ergebnissen $0 :=$ »gerade Augenzahl«, $1 :=$ »ungerade Augenzahl«

c) Ziehen aus einer Urne mit roten und schwarzen Kugeln mit den Ergebnissen $0 :=$ »rot« und $1 :=$ »schwarz«

d) Qualitätskontrolle mit den Ergebnissen $0 :=$ »unbrauchbar« und $1 :=$ »brauchbar«

e) Ziehen eines Loses mit den Ergebnissen $0 :=$ »Niete« und $1 :=$ »Treffer«

2.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

2.2.1. Ziehen ohne Zurücklegen

Wir denken uns eine Urne mit 8 Kugeln, von denen 4 rot, 3 schwarz und 1 grün sind (Figur 15.1). Wir entnehmen der Urne eine Kugel und notieren ihre Farbe. Dann entnehmen wir eine weitere Kugel und notieren ebenfalls ihre Farbe. Da die jeweils entnommene Kugel nicht in die Urne zurückgelegt wurde, nennt

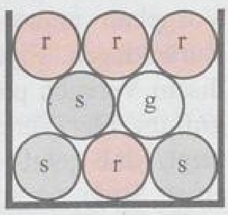

Fig. 15.1 Urne

man diesen Vorgang **Ziehen ohne Zurücklegen.** In einem **Baumdiagramm** können wir die Ergebnisse dieses zweistufigen Experiments ablesen und zugleich sehen, wie sie zustande kommen können. Zum Zeichnen des Baumdiagramms (Figur 16.1) zerlegt man das Zufallsexperiment in seine Stufen und notiert die möglichen Teilergebnisse jeder Stufe. Dabei ist zu beachten, daß die Teilergebnisse einer Stufe vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe abhängig sind. So kann z. B. beim 2. Zug keine grüne Kugel mehr gezogen werden, wenn beim 1. Zug bereits die grüne Kugel gezogen wurde. Als zusätzliche Information kann man jeweils den Urneninhalt, hier als Zahlentripel, angeben.

Eine andere Möglichkeit, einen Ergebnisraum für dieses Zufallsexperiment zu gewinnen, ist die **Mehrfeldertafel** (Figur 16.2). Ω_2 enthält aufgrund seiner systematischen Konstruktion auch das Ergebnis gg, das jedoch ebenso wie die 7 beim Würfeln nicht auftreten kann. Dennoch ist Ω_2 ein zulässiger Ergebnisraum.

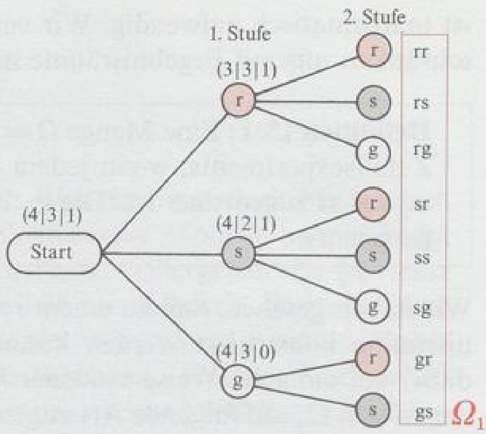

Fig. 16.1 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

		2. Zug		
		r	s	g
1. Zug	r	rr	rs	rg
	s	sr	ss	sg
	g	gr	gs	gg

Ω_2

Fig. 16.2 Mehrfeldertafel für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

2.2.2. Ziehen mit Zurücklegen

Aus der Urne von Figur 15.1 sollen wieder 2 Kugeln entnommen werden. Diesmal jedoch wird nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt, der Urneninhalt gut durchgemischt und anschließend eine Kugel entnommen. Ein solches Vorgehen nennt man **Ziehen mit Zurücklegen.** Figur 16.3 zeigt ein zu disem Versuch passendes Baumdiagramm. Der Vergleich mit Fig. 16.1 zeigt, daß jetzt die Teilergebnisse einer Stufe nicht mehr vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe

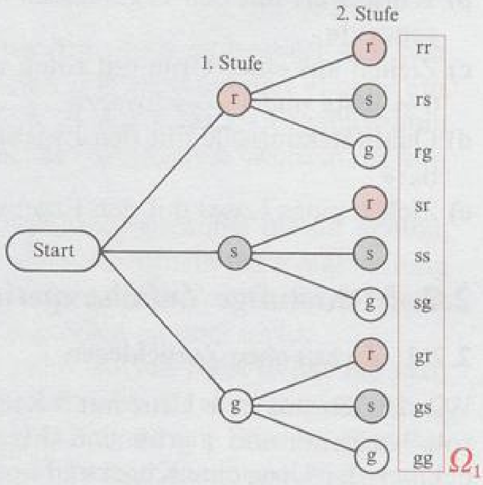

Fig. 16.3 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

abhängen. Die Angabe des Urneninhalts erübrigt sich in diesem Baumdiagramm, da er sich ja während des Experiments nicht ändert.
Die Konstruktion einer Mehrfeldertafel für diesen Versuch führt wiederum zu Figur 16.2, wobei jetzt das Feld gg einem möglichen Ergebnis entspricht.

2.2.3. n-Tupel als Ergebnisse

Manche Zufallsexperimente sind aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig.** Unsere obigen Beispiele zeigten 2stufige Zufallsexperimente.
Andererseits lassen sich oft komplizierte Zufallsexperimente dadurch übersichtlicher darstellen, daß man sie durch ein mehrstufiges Zufallsexperiment ersetzt. Zieht man etwa aus der Urne von Figur 15.1 die beiden Kugeln nicht nacheinander, sondern gleichzeitig, so ist das ein anderes reales Zufallsexperiment. Dieses läßt sich jedoch durch das Hintereinanderziehen ohne Zurücklegen ersetzen.*
Wir wollen diesen Ersetzungsvorgang am Experiment »Gleichzeitiges Werfen von 2 Würfeln« nochmals verdeutlichen. Man findet einen Ergebnisraum für dieses Experiment leicht dadurch, daß man es durch das 2stufige Experiment »Werfen des 1. Würfels, anschließend Werfen des 2. Würfels« ersetzt. Alle Ergebnisse notiert man als Paare $(a|b)$, kurz auch ab, wobei a die Augenzahl des 1. Würfels und b die Augenzahl des 2. Würfels ist. Allgemein können wir folgende Regel formulieren:

Regel:
Die Ergebnisse eines n-stufigen Experiments sind n-Tupel $(a_1|a_2|\dots|a_n)$, kurz auch $a_1a_2\dots a_n$, wobei a_i irgendein Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. Ω ist dann die Menge aller dieser n-Tupel. Jedes der n-Tupel stellt genau einen **Pfad** durch den Baum vom Start bis zu einem Endpunkt dar.

Aufgaben

Zu 2.1.

1. In einer Klinik wird eine Statistik über das Geschlecht von Neugeborenen geführt. Wie heißt ein Ergebnisraum bei
   a) Einzelkindern;
   b) Zwillingen (eineiig);
   c) Zwillingen (zweieiig), wenn das erstgeborene Kind zuerst notiert wird;
   d) Drillingen?
   Gib jeweils die Mächtigkeit des Ergebnisraums an.
2. Münze und Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie lautet ein Ergebnisraum? Wie viele Elemente enthält er?

* Eine solche Ersetzung ist zwar plausibel, aber nicht selbstverständlich. Wir werden später auf Seite 106 noch darauf zurückkommen.