Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

abhängen. Die Angabe des Urneninhalts erübrigt sich in diesem Baumdiagramm, da er sich ja während des Experiments nicht ändert.
Die Konstruktion einer Mehrfeldertafel für diesen Versuch führt wiederum zu Figur 16.2, wobei jetzt das Feld gg einem möglichen Ergebnis entspricht.

2.2.3. *n*-Tupel als Ergebnisse

Manche Zufallsexperimente sind aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig.** Unsere obigen Beispiele zeigten 2stufige Zufallsexperimente.
Andererseits lassen sich oft komplizierte Zufallsexperimente dadurch übersichtlicher darstellen, daß man sie durch ein mehrstufiges Zufallsexperiment ersetzt. Zieht man etwa aus der Urne von Figur 15.1 die beiden Kugeln nicht nacheinander, sondern gleichzeitig, so ist das ein anderes reales Zufallsexperiment. Dieses läßt sich jedoch durch das Hintereinanderziehen ohne Zurücklegen ersetzen.*
Wir wollen diesen Ersetzungsvorgang am Experiment »Gleichzeitiges Werfen von 2 Würfeln« nochmals verdeutlichen. Man findet einen Ergebnisraum für dieses Experiment leicht dadurch, daß man es durch das 2stufige Experiment »Werfen des 1. Würfels, anschließend Werfen des 2. Würfels« ersetzt. Alle Ergebnisse notiert man als Paare $(a|b)$, kurz auch ab, wobei a die Augenzahl des 1. Würfels und b die Augenzahl des 2. Würfels ist. Allgemein können wir folgende Regel formulieren:

Regel:
Die Ergebnisse eines n-stufigen Experiments sind n-Tupel $(a_1|a_2|\dots|a_n)$, kurz auch $a_1a_2\dots a_n$, wobei a_i irgendein Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. Ω ist dann die Menge aller dieser n-Tupel. Jedes der n-Tupel stellt genau einen **Pfad** durch den Baum vom Start bis zu einem Endpunkt dar.

Aufgaben

Zu 2.1.

1. In einer Klinik wird eine Statistik über das Geschlecht von Neugeborenen geführt. Wie heißt ein Ergebnisraum bei
a) Einzelkindern;
b) Zwillingen (eineiig);
c) Zwillingen (zweieiig), wenn das erstgeborene Kind zuerst notiert wird;
d) Drillingen?
Gib jeweils die Mächtigkeit des Ergebnisraums an.

2. Münze und Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie lautet ein Ergebnisraum? Wie viele Elemente enthält er?

* Eine solche Ersetzung ist zwar plausibel, aber nicht selbstverständlich. Wir werden später auf Seite 106 noch darauf zurückkommen.

3. Der Gewinner bei einer Lotterie darf aus 5 Schallplatten (p, q, r, s, t) 3 auswählen. Gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an, wenn
a) beliebig ausgewählt werden darf;
b) grundsätzlich s gewählt werden muß;
c) bei Wahl von p stets auch q gewählt werden muß.

4. In einer Urne liegen vier mit 1 bis 4 numerierte Kugeln. Man zieht zwei Kugeln auf einmal. Gib einen Ergebnisraum an.

5. Wie lautet beim Zahlenlotto »6 aus 49« ein Ergebnisraum zum Zufallsexperiment
a) Ziehen der 6 Lottozahlen,
b) Ziehen der 6 Lottozahlen mit Zusatzzahl?
Die Urne enthält hier 49 Kugeln, die von 1 bis 49 numeriert sind.

6. Beim Werfen zweier Würfel bietet jemand folgende Mengen als Ergebnisräume an, wobei A die Augensumme der beiden Würfel bedeutet. Entscheide jeweils, ob wirklich ein Ergebnisraum vorliegt, und gib seine Mächtigkeit an.
a) $\Omega = \{(1|1); (1|2); (1|3); \ldots; (6|5); (6|6)\} = \{(a|b) | 1 \leqq a, b \leqq 6\}$
b) $\Omega = \{(1|1); (1|2); (1|3); \ldots; (5|6); (6|6)\} = \{(a|b) | 1 \leqq a \leqq b \leqq 6\}$
c) $\Omega = \{A$ ist prim; $A = 9$; A ist gerade, aber nicht $2\}$
d) $\Omega = \{A$ ist prim; A ist durch 3 teilbar$\}$
e) $\Omega = \{A$ ist durch 2 teilbar; A ist durch 3 teilbar; A ist durch 5 teilbar$\}$
f) $\Omega = \{A$ ist kleiner als 7; A ist größer als $7\}$

Zu 2.2.

7. In einer Urne befinden sich 1 goldene, 2 rote und 3 schwarze Kugeln. Man zieht nacheinander 2 Kugeln
a) ohne Zurücklegen, **b)** mit Zurücklegen der Kugel nach jedem Zug.
Zeichne jeweils ein Baumdiagramm, gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an.

8. Eine Münze (A = Adler; Z = Zahl) wird dreimal geworfen. Zeichne ein Baumdiagramm.

9. 3 Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie kann dieses Experiment als mehrstufiges Experiment gedeutet werden? (Vgl. Aufgabe **8**)

•**10.** Der italienische Mathematiker *Luca Pacioli* (um 1445–1517)* behandelte 1494 in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* (fol. 197r) die Aufgabe, den Einsatz bei vorzeitigem Spielabbruch »gerecht« aufzuteilen, die unter den Namen *problème des partis* oder auch *problem of points* berühmt wurde**:

> »Eine Brigade spielt Ball. Eine Partie ist 10 Punkte wert; Sieger ist diejenige Mannschaft, die zuerst 60 Punkte erreicht. Jede Mannschaft setzt 5 Dukaten ein. Durch unvorhergesehene Umstände kann das Spiel nicht zu Ende gebracht werden. Die eine Seite hat 50 Punkte, die andere 20 erzielt. Man möchte wissen, welcher Teil des Einsatzes jeder Seite zufällt.«

Sei nun A bzw. B der Anteil des gesamten Einsatzes, der Mannschaft A bzw. B zugesprochen werden soll. Beide Seiten – so wird stillschweigend angenommen – seien gleich geschickt.
a) *Pacioli* sagt, er habe viele falsche Meinungen gefunden. Nach langer Rechnung behauptet er, die richtige Lösung sei, den Einsatz im Verhältnis des Spielstandes bei Abbruch aufzuteilen, also $A : B = 5 : 2$.
b) *Gerolamo Cardano* (1501–1576) bemerkte 1539, daß, wie selbst ein Knabe leicht einsehen könne, nicht der Spielstand bei Abbruch entscheidend sei für die gerechte Verteilung, sondern daß es auf die Anzahlen a bzw. b der den Seiten A bzw. B noch

* Siehe Seite 394ff.
** Das Problem findet sich bereits in italienischen mathematischen Manuskripten, das älteste aus dem Jahre 1380, und ist vermutlich arabischen Ursprungs. – *le parti* = der Anteil.

fehlende Siege bis zum Erreichen der n Siege ankomme*. Dann überlegt er, daß eine zweite Partie nur gewonnen werden kann, wenn die vorausgehende erste gewonnen wurde, eine 3. Partie nur, wenn die vorausgehende 1. und 2. Partie gewonnen wurden. Also ist zum Gewinn der a-ten Partie nötig, die 1., 2., …, $(a-1)$-te und schließlich die a-te Partie zu gewinnen. Der Einsatz ist somit im Verhältnis

$$A : B = (1 + 2 + \ldots + b) : (1 + 2 + \ldots + a)$$

aufzuteilen. Welche Aufteilung ergibt sich damit für die Aufgabe von *Pacioli*?

c) *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) kritisierte 1556** die Lösung von *Pacioli*: Hätte Mannschaft B nämlich noch keine Partie gewonnen, so würde sie gar nichts erhalten,

> »was zutiefst ungerecht sei. Deshalb sage ich, daß es sich eher um ein juristisches als um ein mathematisches Problem handelt. […] Am wenigsten wird es Streit geben, so scheint mir,«

wenn man den Einsatz im Verhältnis $A : B = (n + b - a) : (n + a - b)$

aufteilt. Sei nämlich $a \leqq b$. Dann liegt A um $b - a$ vor B. Der Seite A gebührt also $\frac{b-a}{n}$ des Einsatzes von B und $\frac{n}{n}$ des eigenen Einsatzes, d.h. $\frac{n+b-a}{2n}$ des gesamten Einsatzes. B hingegen verbleibt $\frac{n-(b-a)}{n}$ des eigenen Einsatzes.

Welches Verhältnis schlägt *Tartaglia* also für *Paciolis* Problem vor?

d) Zeichne ein Baumdiagramm, das die noch fehlenden möglichen Partien darstellt. Wie würdest du das Geld aufteilen?

e) Dem französischen Mathematiker *Pierre de Fermat* (1601–1665) gelang 1654 die Lösung des Problems sinngemäß durch Betrachten eines Baums, der alle denkbaren Verläufe bei weiteren 4 Partien darstellt. Warum nahm er gerade 4 Partien? Welchen Vorschlag zur Aufteilung des Geldes hat *Fermat* wohl gemacht?
Auf ganz andere Art gelangte *Blaise Pascal* (1623–1662) im selben Jahre zur gleichen Lösung. (Siehe Aufgabe 269/**66**).

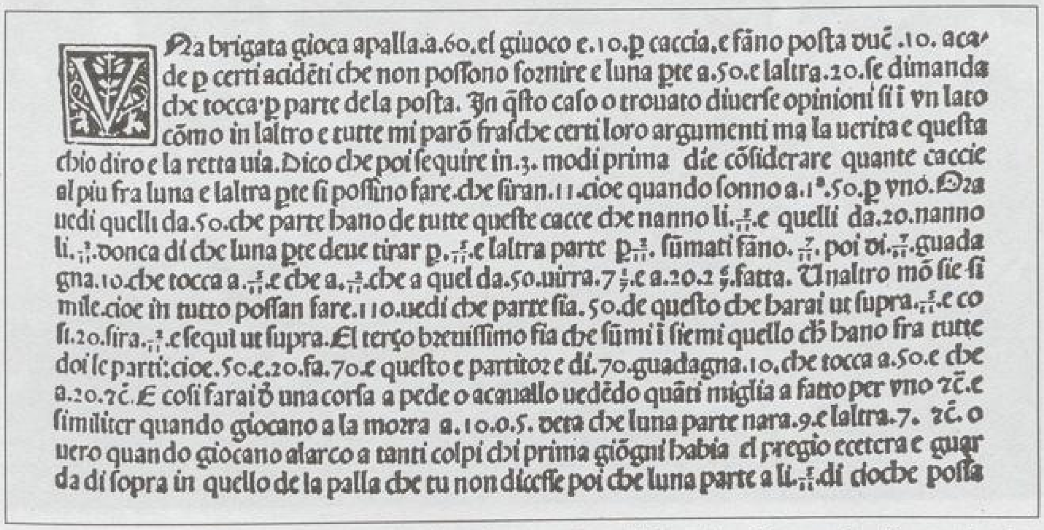
Va brigata gioca apalla.a.60.el giuoco e.10.p caccia.e fano posta duc.10.aca-
de p certi acideti che non possono fornire e luna pte a.50.e laltra.20.se dimanda
che tocca p parte dela posta. In qsto caso o trouato diuerse opinioni si i vn lato
como in laltro e tutte mi paro frasche certi loro argumenti ma la uerita e questa
chio diro e la retta uia. Dico che poi sequire in.3.modi prima dic cosiderare quante caccie
al piu fra luna e laltra pte si possino fare.che siran.11.cioe quando sonno a.1°.50.p vno. Ora
uedi quelli da.50.che parte hano de tutte queste cacce che nanno li.5/11.e quelli da.20.nanno
li.2/11.donca di che luna pte deue tirar p.5/11.e laltra parte p.2/11. sumati fano.7/11. poi di.7/11.guada
gna.10.che tocca a.5/11.e che a.2/11.che a quel da.50.uirra.7 1/7.e a.20.2 6/7.fatta. Unaltro mo sie si
mile.cioe in tutto possan fare.110.uedi che parte sia.50.de questo che harai ut supra.5/11.e co
si.20.sira.2/11.e sequi ut supra. El terço breuissimo sia che sumi i siemi quello ch hano fra tutte
doi le parti:cioe.50.e.20.fa.70.e questo e partitore e di.70.guadagna.10.che tocca a.50.e che
a.20.&c. E cosi farai d una corsa a pede o acauallo uededo quanti miglia a fatto per vno &c.e
similiter quando giocano a la morra a.10.o.5.dera che luna parte nara.9.e laltra.7. &c. o
uero quando giocano alarco a tanti colpi chi prima giogni habia el pregio eccetera e guar
da di sopra in quello de la palla che tu non dicesse poi che luna parte a li.5/11.di ciocche possa

Bild 19.1 Ausschnitt aus folio 197r der *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* des *Luca Pacioli* mit dem problème des partis

* *Practica Arithmetice*, Cap. LXI, 13, 14 und Cap. ult., 5.
** *General Trattato di numeri, et misure*, I, folium 265r.