



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Stochastik**

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

2. 2. 2. Ziehen mit Zurücklegen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83580)

man diesen Vorgang **Ziehen ohne Zurücklegen**. In einem **Baumdiagramm** können wir die Ergebnisse dieses zweistufigen Experiments ablesen und zugleich sehen, wie sie zustande kommen können. Zum Zeichnen des Baumdiagramms (Figur 16.1) zerlegt man das Zufallsexperiment in seine Stufen und notiert die möglichen Teilergebnisse jeder Stufe. Dabei ist zu beachten, daß die Teilergebnisse einer Stufe vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe abhängig sind. So kann z. B. beim 2. Zug keine grüne Kugel mehr gezogen werden, wenn beim 1. Zug bereits die grüne Kugel gezogen wurde. Als zusätzliche Information kann man jeweils den Urneninhalt, hier als Zahlentripel, angeben. Eine andere Möglichkeit, einen Ergebnisraum für dieses Zufallsexperiment zu gewinnen, ist die **Mehrfelder-tafel** (Figur 16.2).  $\Omega_2$  enthält aufgrund seiner systematischen Konstruktion auch das Ergebnis gg, das jedoch ebenso wie die 7 beim Würfeln nicht auftreten kann. Dennoch ist  $\Omega_2$  ein zulässiger Ergebnisraum.

### 2.2.2. Ziehen mit Zurücklegen

Aus der Urne von Figur 15.1 sollen wieder 2 Kugeln entnommen werden. Diesmal jedoch wird nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt, der Urneninhalt gut durchgemischt und anschließend eine Kugel entnommen. Ein solches Vorgehen nennt man **Ziehen mit Zurücklegen**. Figur 16.3 zeigt ein zu diesem Versuch passendes Baumdiagramm. Der Vergleich mit Fig. 16.1 zeigt, daß jetzt die Teilergebnisse einer Stufe nicht mehr vom Teilergebnis der vorhergehenden Stufe

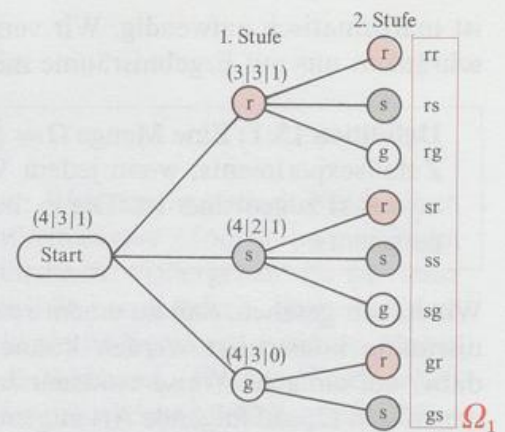


Fig. 16.1 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

		2. Zug		
		r	s	g
1. Zug	r	rr	rs	rg
	s	sr	ss	sg
	g	gr	gs	gg

$\Omega_2$

Fig. 16.2 Mehrfeldertafel für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1

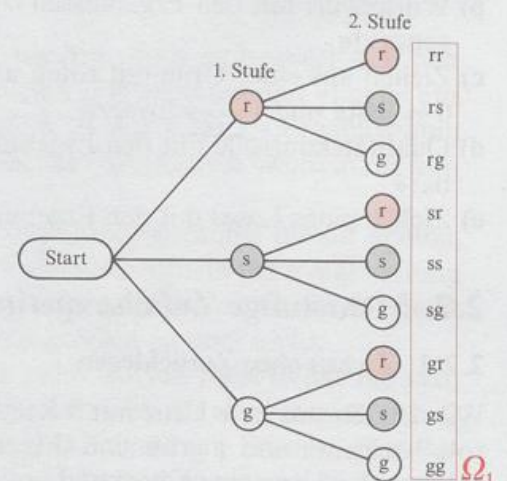


Fig. 16.3 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1



abhängen. Die Angabe des Urneninhalts erübrigt sich in diesem Baumdiagramm, da er sich ja während des Experiments nicht ändert.

Die Konstruktion einer Mehrfeldertafel für diesen Versuch führt wiederum zu Figur 16.2, wobei jetzt das Feld  $gg$  einem möglichen Ergebnis entspricht.

### 2.2.3. $n$ -Tupel als Ergebnisse

Manche Zufallsexperimente sind aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig**. Unsere obigen Beispiele zeigten 2stufige Zufallsexperimente.

Andererseits lassen sich oft komplizierte Zufallsexperimente dadurch übersichtlicher darstellen, daß man sie durch ein mehrstufiges Zufallsexperiment ersetzt. Zieht man etwa aus der Urne von Figur 15.1 die beiden Kugeln nicht nacheinander, sondern gleichzeitig, so ist das ein anderes reales Zufallsexperiment. Dieses läßt sich jedoch durch das Hintereinanderziehen ohne Zurücklegen ersetzen.\*

Wir wollen diesen Ersetzungsvorgang am Experiment »Gleichzeitiges Werfen von 2 Würfeln« nochmals verdeutlichen. Man findet einen Ergebnisraum für dieses Experiment leicht dadurch, daß man es durch das 2stufige Experiment »Werfen des 1. Würfels, anschließend Werfen des 2. Würfels« ersetzt. Alle Ergebnisse notiert man als Paare  $(a|b)$ , kurz auch  $ab$ , wobei  $a$  die Augenzahl des 1. Würfels und  $b$  die Augenzahl des 2. Würfels ist. Allgemein können wir folgende Regel formulieren:

**Regel:**

Die Ergebnisse eines  $n$ -stufigen Experiments sind  $n$ -Tupel  $(a_1|a_2|\dots|a_n)$ , kurz auch  $a_1a_2\dots a_n$ , wobei  $a_i$  irgendein Ergebnis des  $i$ -ten Teilexperiments ist.  $\Omega$  ist dann die Menge aller dieser  $n$ -Tupel. Jedes der  $n$ -Tupel stellt genau einen **Pfad** durch den Baum vom Start bis zu einem Endpunkt dar.

## Aufgaben

### Zu 2.1.

- In einer Klinik wird eine Statistik über das Geschlecht von Neugeborenen geführt. Wie heißt ein Ergebnisraum bei
  - Einzelkindern;
  - Zwillingen (eineiig);
  - Zwillingen (zweieiig), wenn das erstgeborene Kind zuerst notiert wird;
  - Drillingen?
 Gib jeweils die Mächtigkeit des Ergebnisraums an.
- Münze und Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie lautet ein Ergebnisraum? Wie viele Elemente enthält er?

\* Eine solche Ersetzung ist zwar plausibel, aber nicht selbstverständlich. Wir werden später auf Seite 106 noch darauf zurückkommen.