Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

3. 1. Definition

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

3. Ereignisräume

3.1. Definition

Vielfach interessiert man sich bei Zufallsexperimenten nur für eine gewisse Fragestellung. Es genügt dann, einen Ergebnisraum zu betrachten, der auf diese Fragestellung zugeschnitten ist. Beim »Mensch ärgere dich nicht«-Spiel z. B. interessiert bei Spielbeginn nur der Ergebnisraum $\Omega_1 = \{\text{Sechs, Nicht-Sechs}\}$, später vielleicht $\Omega_2 = \{\text{Vier, Nicht-Vier}\}$, wenn man eine bestimmte Figur eines Gegners schlagen will. Möchte man aber mehrere Fragestellungen mit demselben Ergebnisraum behandeln, so muß man ihn fein genug konstruieren. Beim »Mensch-ärgere-dich-nicht«-Spiel wählt man $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; damit können alle Situationen dieses Spiels beschrieben werden. Das Ergebnis »Nicht-Sechs« aus Ω_1 stellt sich jetzt allerdings als die Teilmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ von Ω dar, ebenso das Ergebnis »Nicht-Vier« aus Ω_2 als eine andere Teilmenge von Ω, nämlich $\{1, 2, 3, 5, 6\}$. Um diese Teilmengen von Ω von den Elementen von Ω, den Ergebnissen, abzuheben, führt man für sie eine eigene Bezeichnung ein. Man nennt sie **Ereignisse.** Ereignisse sind also Mengen, die als Elemente gerade die Ergebnisse enthalten, bei deren Erscheinen das Ereignis eintritt. So tritt z. B. das Ereignis »Nicht-Sechs« ein, wenn als Ergebnis die Augenzahl 1 erscheint. Dasselbe gilt für die Augenzahlen 2, 3, 4 oder 5. Wir formulieren nun allgemein:

Definition 21.1:

1. Jede Teilmenge A des endlichen Ergebnisraums Ω heißt **Ereignis.**
2. A **tritt** genau dann **ein,** wenn sich ein Versuchsergebnis ω einstellt, das in A enthalten ist.
3. Die Menge aller Ereignisse heißt **Ereignisraum.**

Durch diese Definition wurde der umgangssprachliche Begriff »Ereignis« mathematisch präzisiert. Damit können wir unser mathematisches Modell des Zufallsgeschehens weiter entwickeln. Der mathematische Begriff *Ereignis* umfaßt auch Sonderfälle, an die man vielleicht zunächst nicht gedacht hat. Besonders ausgezeichnete Teilmengen sind bekanntlich die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge Ω. Da die leere Menge $\emptyset$ kein Element enthält, kann das Ereignis $\emptyset$ nicht eintreten; man nennt $\emptyset$ daher **unmögliches Ereignis.** Im Gegensatz dazu enthält Ω alle Versuchsergebnisse, tritt also immer ein. Man nennt Ω daher auch **sicheres Ereignis.** Eine Sonderstellung nehmen bei den von uns betrachteten endlichen Ergebnisräumen die einelementigen Ereignisse ein. Ein solches $E = \{\omega\}$ tritt genau dann ein, wenn das betreffende Versuchsergebnis ω erscheint. Wir nennen solche einelementigen Ereignisse auch **Elementarereignisse.** Dieser Name wird verständlich, wenn man bedenkt, daß jedes Ereignis $A \neq \emptyset$ eines endlichen Ergebnisraums Ω eindeutig als Vereinigung von Elementarereignissen darstellbar ist, d. h.

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

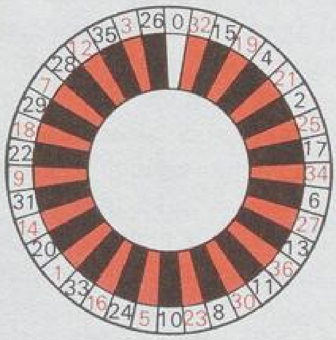
Beispiel: $A = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$.

Man beachte im übrigen, daß man zwischen dem Ergebnis ω und dem Elementarereignis $\{\omega\}$ unterscheidet.
Da bei endlichen Ergebnisräumen Ω jede Teilmenge von Ω ein Ereignis ist, gilt dort auch, daß der Ereignisraum die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ des Ergebnisraums Ω ist. (Bei unendlichen Ergebnisräumen ist es leider viel komplizierter.)
Eine aus n Elementen bestehende Menge hat 2^n Teilmengen. Aus $|\Omega| = n$ ergibt sich damit für die Mächtigkeit des Ereignisraums der Wert $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^n$.

Ein Beweis der oben aufgeführten Behauptung kann folgendermaßen geführt werden. Es sei $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jede Teilmenge A von Ω läßt sich eineindeutig durch eine n-stellige Dualzahl beschreiben. Dabei bedeute 1 an der i-ten Stelle, daß das Element a_i in der Teilmenge A enthalten ist; 0 an der i-ten Stelle heißt dann natürlich, daß $a_i \notin A$ ist. So wird z. B. die Teilmenge $\{a_2, a_3, a_5\}$ durch die Dualzahl 011010...0 beschrieben.
Diese Dualzahlen sind die ganzen Zahlen von 0 bis zu einer größten Zahl N, die als Dualzahl an jeder der n Stellen eine 1 stehen hat, also $N = 111\ldots1$. Da sich die natürlichen Zahlen selber abzählen, sind dies $N + 1$ Zahlen. $N + 1$ schreibt sich als Dualzahl als 1, gefolgt von n Nullen, also $N + 1 = 1000\ldots0$. Das ist aber die natürliche Zahl 2^n. Somit gibt es 2^n Teilmengen von Ω, was zu zeigen war.

3.2. Ereignisalgebra

Ein Ereignis kommt selten allein! Umgangssprachlich werden Ereignisse durch die Wörter »und« und »oder« zu neuen Ereignissen zusammengesetzt. So lassen sich die Ereignisse »Es schneit« bzw. »Es stürmt« zum Ereignis »Schneesturm«, d. h. zu »Es schneit und es stürmt« zusammensetzen. Wie wirkt sich eine solche Zusammensetzung von Ereignissen im mathematischen Modell aus?
Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir das in den Spielkasinos verbreitete Glücksspiel Roulett.* Eine Kugel fällt in eines der Fächer einer drehbaren Scheibe, die von 0 bis 36 numeriert sind; 18 der Zahlen von 1 bis 36 sind rot, die anderen 18 schwarz, die 0 ist andersfarbig (siehe Figur 22.1). Man setzt auf dem Spielbrett (= tableau) Chips bestimmten Werts auf eine Zahl oder eine Zahlenkombination,



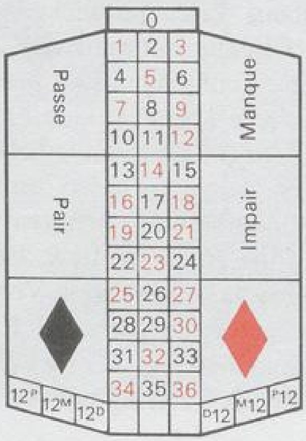


Fig. 22.1 Rad und Spielbrett des Rouletts

* Das Roulett ist wohl chinesischen Ursprungs. Die Idee, in eine sich drehende Zahlenscheibe eine Kugel zu werfen, scheint Anfang des 18. Jahrhunderts aufgekommen zu sein. 1734 veröffentlichte *M. Giradier* 6 neu erfundene Spiele, die alle auf diesem Prinzip beruhten. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstand in Paris die noch heute gültige Form des Roulettspiels.