Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

3. 2. Ereignisalgebra

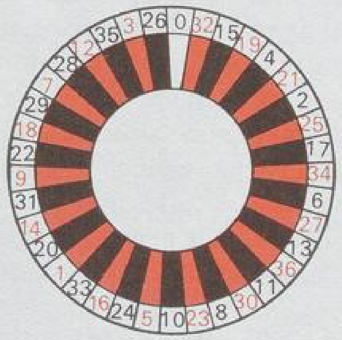
urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Man beachte im übrigen, daß man zwischen dem Ergebnis ω und dem Elementarereignis $\{\omega\}$ unterscheidet.
Da bei endlichen Ergebnisräumen Ω jede Teilmenge von Ω ein Ereignis ist, gilt dort auch, daß der Ereignisraum die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ des Ergebnisraums Ω ist. (Bei unendlichen Ergebnisräumen ist es leider viel komplizierter.)
Eine aus n Elementen bestehende Menge hat 2^n Teilmengen. Aus $|\Omega| = n$ ergibt sich damit für die Mächtigkeit des Ereignisraums der Wert $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^n$.

Ein Beweis der oben aufgeführten Behauptung kann folgendermaßen geführt werden. Es sei $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jede Teilmenge A von Ω läßt sich eineindeutig durch eine n-stellige Dualzahl beschreiben. Dabei bedeute 1 an der i-ten Stelle, daß das Element a_i in der Teilmenge A enthalten ist; 0 an der i-ten Stelle heißt dann natürlich, daß $a_i \notin A$ ist. So wird z. B. die Teilmenge $\{a_2, a_3, a_5\}$ durch die Dualzahl 011010 … 0 beschrieben.
Diese Dualzahlen sind die ganzen Zahlen von 0 bis zu einer größten Zahl N, die als Dualzahl an jeder der n Stellen eine 1 stehen hat, also $N = 111 \ldots 1$. Da sich die natürlichen Zahlen selber abzählen, sind dies $N + 1$ Zahlen. $N + 1$ schreibt sich als Dualzahl als 1, gefolgt von n Nullen, also $N + 1 = 1000 \ldots 0$. Das ist aber die natürliche Zahl 2^n. Somit gibt es 2^n Teilmengen von Ω, was zu zeigen war.

3.2. Ereignisalgebra

Ein Ereignis kommt selten allein! Umgangssprachlich werden Ereignisse durch die Wörter »und« und »oder« zu neuen Ereignissen zusammengesetzt. So lassen sich die Ereignisse »Es schneit« bzw. »Es stürmt« zum Ereignis »Schneesturm«, d. h. zu »Es schneit und es stürmt« zusammensetzen. Wie wirkt sich eine solche Zusammensetzung von Ereignissen im mathematischen Modell aus?
Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir das in den Spielkasinos verbreitete Glücksspiel Roulett.* Eine Kugel fällt in eines der Fächer einer drehbaren Scheibe, die von 0 bis 36 numeriert sind; 18 der Zahlen von 1 bis 36 sind rot, die anderen 18 schwarz, die 0 ist andersfarbig (siehe Figur 22.1). Man setzt auf dem Spielbrett (= tableau) Chips bestimmten Werts auf eine Zahl oder eine Zahlenkombination,



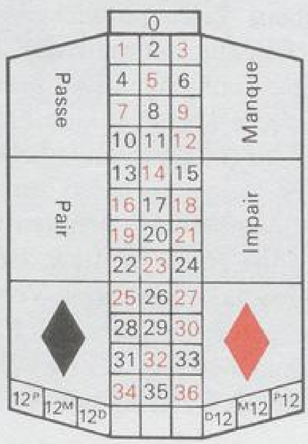


Fig. 22.1 Rad und Spielbrett des Rouletts

* Das Roulett ist wohl chinesischen Ursprungs. Die Idee, in eine sich drehende Zahlenscheibe eine Kugel zu werfen, scheint Anfang des 18. Jahrhunderts aufgekommen zu sein. 1734 veröffentlichte *M. Giradier* 6 neu erfundene Spiele, die alle auf diesem Prinzip beruhten. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstand in Paris die noch heute gültige Form des Roulettspiels.

d. h. in unserer Sprechweise auf das Eintreten eines Ereignisses. Um alle wichtigen Ereignisse dieses Spiels beschreiben zu können, wählen wir als Ergebnisraum Ω die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$. Wie bei jedem Glücksspiel unterscheidet man zwischen Auszahlung und Gewinn. Auszahlung ist der Betrag, den der Spieler nach gewonnenem Spiel erhält, und es gilt:

$$\boxed{\text{Gewinn} = \text{Auszahlung minus Einsatz}}$$

Einen Überblick über die möglichen Ereignisse beim Roulettspiel gibt die folgende Aufstellung. Dabei ist noch zu beachten: Fällt die Kugel auf die 0, so wird die 0 bei plein, carré und à cheval wie eine normale Zahl behandelt; alle anderen Einsätze verfallen der Bank, in manchen Spielkasinos jedoch nur zur Hälfte.

Setzmöglichkeiten		Teilmenge von Ω	Auszahlung (als Vielfaches des Einsatzes)	Gewinn (als Vielfaches des Einsatzes)
Name	Beschreibung			
plein	eine Zahl	z. B. $\{7\}$	36	35
à cheval	2 angrenzende Zahlen	z. B. $\{13, 16\}$	18	17
transversale pleine	Querreihe von 3 Zahlen	z. B. $\{25, 26, 27\}$	12	11
transversale simple	2 benachbarte Querreihen	z. B. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	6	5
carré	4 Zahlen, deren Felder in einem Punkt zusammenstoßen, bzw. die ersten 4 Zahlen	z. B. $\{14, 15, 17, 18\}$ bzw. $\{0, 1, 2, 3\}$	9	8
colonne	Längsreihe von 12 Zahlen	z. B. $\{1, 4, 7, \ldots, 34\}$	3	2
douze premier	das erste Dutzend	$\{1, 2, \ldots, 12\}$	3	2
douze milieu	das mittlere Dutzend	$\{13, 14, \ldots, 24\}$	3	2
douze dernier	das letzte Dutzend	$\{25, 26, \ldots, 36\}$	3	2
pair	alle geraden Zahlen außer 0	$\{2, 4, \ldots, 36\}$	2	1
impair	alle ungeraden Zahlen	$\{1, 3, \ldots, 35\}$	2	1
rouge	alle roten Zahlen	$\{1, 3, \ldots, 36\}$	2	1
noir	alle schwarzen Zahlen	$\{2, 4, \ldots, 35\}$	2	1
manque	die 1. Hälfte	$\{1, 2, \ldots, 18\}$	2	1
passe	die 2. Hälfte	$\{19, 20, \ldots, 36\}$	2	1

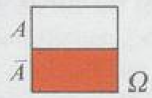
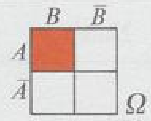
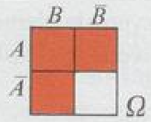
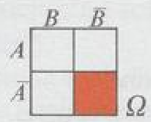
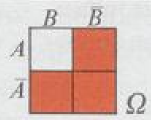
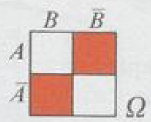
Für einen Spieler, der 2 Chips verschieden gesetzt hat, sind zwei Ereignisse interessant. Nehmen wir an, er setzt auf die carrés $\{4, 5, 7, 8\}$ und $\{5, 6, 8, 9\}$. Dann können für ihn folgende Möglichkeiten eintreten:

a) Er gewinnt mit beiden Chips. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{5, 8\}$, die man offenbar als Schnittmenge der beiden carré-Mengen erhält. (Sein Gewinn ist der 8fache Einsatz.)

b) Er gewinnt überhaupt etwas, d. h., Chip 1 oder Chip 2 gewinnt. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, die man offenbar als Vereinigungsmenge der beiden carré-Mengen erhält. (Sein Gewinn ist der 3,5fache Einsatz, wenn genau einer der Chips gewinnt, oder der 8fache Einsatz, wenn beide Chips gewinnen.)

c) Er gewinnt nicht. Das zugehörige Ereignis ist die Teilmenge $\{0, 1, 2, 3, 10, 11, \ldots, 36\}$, die man offenbar als Komplementmenge zur Menge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ erhält. (Sein Gewinn ist der $[-1]$fache Einsatz. Negativer Gewinn = Verlust!)

Unser Beispiel zeigt, daß sich umgangssprachliche Verknüpfungen von Ereignissen im mathematischen Modell ebenfalls ausdrücken lassen.
Die folgende Übersicht gibt uns für zwei Ereignisse A und B einige solche Möglichkeiten zusammenfassend an.

Sprechweisen	Term im mathematischen Modell	Veranschaulichung
Gegenereignis zu A; Nicht das Ereignis A	$\bar{A}$	
Ereignis A und Ereignis B; Beide Ereignisse; Sowohl A als auch B	$A \cap B$	
Ereignis A oder Ereignis B; Mindestens eines der Ereignisse	$A \cup B$	
Keines der Ereignisse; Weder A noch B	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$	
Höchstens eines der Ereignisse; Nicht beide Ereignisse	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	
Genau eines der Ereignisse; Entweder A oder B	$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$	

Durch die Mengenoperationen *Schnitt* ($\cap$), *Vereinigung* ($\cup$) und *Komplement* ($^-$) lassen sich alle aufgeführten Verknüpfungen von Ereignissen darstellen. Jede solche Verknüpfung liefert wieder eine Teilmenge von Ω, also ein Ereignis. Man sagt deshalb auch, der Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist bezüglich der Operationen $\cap$, $\cup$ und $^-$ abgeschlossen.
Da die Ereignisse im mathematischen Modell Mengen sind, gehorchen sie auch den Gesetzen der Mengenalgebra, die man in diesem Zusammenhang auch **Ereignisalgebra** nennt.
Wir erinnern in der folgenden Übersicht an einige wichtige Gesetze der Mengenalgebra.

Für alle $A, B, C \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:		
Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotenzgesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Absorptionsgesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Gesetze von *De Morgan**	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Neutrale Elemente	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \emptyset = A$
Dominante Elemente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$A \cup \bar{A} = \Omega$ $\quad \bar{\bar{A}} = A$

A und $\bar{A}$ können nicht gleichzeitig eintreten, weil $A \cap \bar{A} = \emptyset$, also das unmögliche Ereignis ist. Es gibt aber neben $\bar{A}$ auch noch weitere Ereignisse (nämlich alle Teilmengen von $\bar{A}$), die nicht gleichzeitig mit A eintreten können. Man sagt allgemein:

Definition 25.1:
a) Die Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **disjunkt** genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$.
b) Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen **unvereinbar** oder **disjunkt,** wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h., wenn $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ gilt. Sie heißen **paarweise unvereinbar** oder **paarweise disjunkt,** wenn die Schnittmenge aus je zwei von ihnen leer ist, d.h., wenn für alle $i \neq j$ gilt: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Die Ereignisse A und $\bar{A}$ zerlegen gewissermaßen Ω in 2 disjunkte Mengen. Diese Vorstellung läßt sich verallgemeinern zu

Definition 25.2: Eine Menge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißt **Zerlegung** des Ergebnisraums Ω, wenn die Ereignisse A_i paarweise unvereinbar sind und wenn ihre Vereinigung Ω ergibt, d.h.
$A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Aufgaben

Zu 3.2.

1. Jemand hat drei Lose gekauft. Wir unterscheiden Niete (0) und Treffer (1).
a) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_1, wenn die Lose unterschieden (z.B. numeriert) werden?
b) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_2, wenn die Lose nicht unterschieden werden?

* Siehe Seite 403.