Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Für alle $A, B, C \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:

Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	
Assoziativgesetze			
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C$		$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C$	
Distributivgesetze			
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
Idempotenzgesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	
Absorptionsgesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	
Gesetze von *De Morgan**	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	
Neutrale Elemente	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \emptyset = A$	
Dominante Elemente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \Omega = \Omega$	
Komplement	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$A \cup \bar{A} = \Omega$	$\bar{\bar{A}} = A$

A und $\bar{A}$ können nicht gleichzeitig eintreten, weil $A \cap \bar{A} = \emptyset$, also das unmögliche Ereignis ist. Es gibt aber neben $\bar{A}$ auch noch weitere Ereignisse (nämlich alle Teilmengen von $\bar{A}$), die nicht gleichzeitig mit A eintreten können. Man sagt allgemein:

Definition 25.1:
a) Die Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **disjunkt** genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$.
b) Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen **unvereinbar** oder **disjunkt,** wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h., wenn $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ gilt. Sie heißen **paarweise unvereinbar** oder **paarweise disjunkt,** wenn die Schnittmenge aus je zwei von ihnen leer ist, d.h., wenn für alle $i \neq j$ gilt: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Die Ereignisse A und $\bar{A}$ zerlegen gewissermaßen Ω in 2 disjunkte Mengen. Diese Vorstellung läßt sich verallgemeinern zu

Definition 25.2: Eine Menge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißt **Zerlegung** des Ergebnisraums Ω, wenn die Ereignisse A_i paarweise unvereinbar sind und wenn ihre Vereinigung Ω ergibt, d.h.
$A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Aufgaben

Zu 3.2.

1. Jemand hat drei Lose gekauft. Wir unterscheiden Niete (0) und Treffer (1).
   a) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_1, wenn die Lose unterschieden (z.B. numeriert) werden?
   b) Wie heißt ein Ergebnisraum Ω_2, wenn die Lose nicht unterschieden werden?

* Siehe Seite 403.

c) Gib für die Ereignisse A, B, C, D und E die Ergebnismengen aus Ω_1 bzw. Ω_2 an
$A :=$ »Mindestens ein Los ist ein Treffer«,
$B :=$ »Höchstens ein Los ist ein Treffer«,
$C :=$ »Jedes Los ist ein Treffer«,
$D :=$ »Das 1. und das 3. Los sind Treffer«,
$E :=$ »Das 1. und das 3. Los sind Treffer, und das 2. Los ist eine Niete«.

d) Beschreibe umgangssprachlich in jedem der beiden Fälle, soweit möglich, das Gegenereignis zu den Ereignissen aus **c)** und gib die Ergebnismengen an.

2. Eine Münze wird dreimal geworfen. Man unterscheidet Wappen (w) und Zahl (z). Wir betrachten folgende Ereignisse:
$A :=$ »Beim ersten Wurf erscheint Wappen«
$B :=$ »Beim dritten Wurf erscheint Zahl«
a) Gib die Ergebnismengen zu A und B an.
b) Beschreibe folgende Ereignisse in Worten und gib die zugehörigen Ergebnismengen an:
$A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$; $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap \bar{B}$.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $A \cup B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$?
d) Gib das Gegenereignis zu $\{www\}$ in Worten und als Ergebnismenge an.

Bild 26.1 Ergebnisse beim 3fachen Münzenwurf

3. Bei einem Wurf mit zwei Würfeln werde die Augensumme als Ergebnis notiert.
a) Gib einen Ergebnisraum Ω und seine Mächtigkeit an.
b) Beschreibe die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω:
$A :=$ »Die Augensumme ist prim.«
$B :=$ »Die Augensumme ist 1.«
$C :=$ »Die Augensumme ist gerade.«
$D :=$ »Die Augensumme ist nicht 6.«
$E :=$ »Die Augensumme ist 7.«
$F :=$ »Die Augensumme liegt zwischen 0 und 7.«

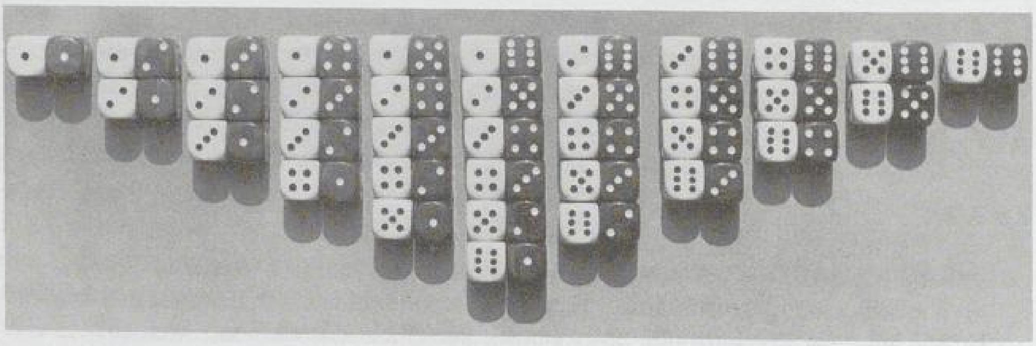

Bild 26.2 Augensummen zweier Würfel

4. Aus einer Lieferung werden 4 Stücke zur Prüfung entnommen. Sie werden auf brauchbar (1) bzw. unbrauchbar (0) hin untersucht.
a) Gib einen Ergebnisraum und seine Mächtigkeit an.
b) Beschreibe folgende Ereignisse durch Ergebnismengen:
$A :=$ »Das dritte Stück ist unbrauchbar.«
$B :=$ »Genau das dritte Stück ist unbrauchbar.«
$C :=$ »Mindestens zwei Stücke sind brauchbar.«
$D :=$ »Genau drei Stücke sind brauchbar.«
$E :=$ »Kein Stück ist brauchbar.«

5. Zu einer Party erwartet Susanne 2 Mädchen und 3 Jungen. Die 5 Gäste treffen nacheinander ein. Beschreibe folgende Ereignisse durch Ergebnismengen:
$A :=$ »Der erste Gast ist ein Mädchen.«
$B :=$ »Unter den ersten drei Gästen sind die zwei Mädchen.«
$C :=$ »Der letzte Gast ist kein Junge.«

6. A, B, C seien drei beliebige Ereignisse. Beschreibe durch Terme der Ereignisalgebra
a) A und B, aber nicht C **b)** Alle drei **c)** Nur A
•**d)** Höchstens eines **e)** Mindestens eines **f)** Höchstens zwei
g) Mindestens zwei **h)** Genau eines **i)** Genau zwei
j) Keines **k)** Nur A und B **l)** Nur C nicht

7. Für eine Lieferung von 4 Motoren definiert man folgende Ereignisse:
$A :=$ »Mindestens ein Motor ist defekt« $B :=$ »Höchstens ein Motor ist defekt«
a) Interpretiere folgende Ereignisse:
1) $\bar{A}$ **2)** $\bar{B}$ **3)** $A \cap B$ **4)** $A \cup B$ **5)** $A \setminus B$ **6)** $B \setminus A$ **7)** $A \cup \bar{B}$
8) $\bar{A} \cup B$ **9)** $\bar{A} \cap \bar{B}$ **10)** $\bar{A} \cup \bar{B}$
b) Zeichne ein Mengendiagramm und verwende dabei als Elemente von Ω Quadrupel aus 0 und 1, wobei 0 bedeute, daß der entsprechende Motor defekt ist. 1011 heißt dann etwa »Der zweite Motor ist defekt; die anderen sind in Ordnung«.
c) Stelle die Mengen aus **a)** durch die Elemente von Ω nach **b)** dar.

8. Die Herren Huber (H), Meier (M) und Schmid (S) kandidieren für den Posten des Betriebsratsvorsitzenden. Die Ereignisse A, B, C werden definiert gemäß
$A :=$ »Herr Huber wird erster«,
$B :=$ »Herr Meier wird nicht letzter« und
$C :=$ »Herr Schmid wird letzter«.
a) Zeichne ein Diagramm von Ω. Stelle dabei die Wahlergebnisse als Tripel aus H, M und S dar.
•**b)** Schreibe mit Hilfe von A, B und C die Ereignisse $E :=$ »Huber wird letzter« und $F :=$ »Huber wird zweiter«.
c) Interpretiere die folgenden Ereignisse:
1) $A \cap B \cap C$; **2)** $\overline{A \cup B \cup C}$; **3)** $A \cup (B \cap \bar{C})$; **4)** $(A \cup B) \cap \bar{C}$.

9. Drei Briefe werden in drei Umschläge gesteckt. A_i sei das Ereignis »Brief i steckt im Umschlag i«.
Interpretiere folgende Ereignisse
a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ **b)** $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ **c)** $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ **d)** $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$
e) $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$

10. Untersuche auf Unvereinbarkeit alle Paare von Ereignissen aus
a) Aufgabe **1. c)**, **b)** Aufgabe **3. b)**, **c)** Aufgabe **4. b)**.

11. Untersuche, ob folgende Ereignisse unvereinbar sind:
a) A und $\overline{A \cup B}$; **b)** A und $\overline{A \cap B}$; **c)** A und $\bar{A} \cap B$; **d)** $\overline{A \cup B}$ und $\bar{A} \cap B$.

12. Prüfe die Gültigkeit folgender Behauptungen:
a) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, \bar{B}$ unvereinbar
b) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ unvereinbar
c) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, \bar{B}$ nicht unvereinbar
d) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ nicht unvereinbar.
Gib gegebenenfalls Gegenbeispiele an.

•**13.** **a)** Zeige: Die Ereignisse A, $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cap B$ bilden eine Zerlegung von Ω. Fertige dazu eine Skizze an.
b) Die Fußballmannschaften I und II spielen gegeneinander. A bedeute »I siegt«; B bedeute »II siegt«. Interpretiere die Ereignisse aus **a)**.

14. An einem Wettbewerb nehmen n Sportler teil. A_i sei das Ereignis »Der Sportler mit der Startnummer i erreicht den i-ten Platz«.
Interpretiere folgende Ereignisse:

a) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

c) $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ **d)** $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ **e)** $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap \bigcap_{k \neq i} \bar{A}_k)$.

Bild 28.1 Antike Spielmarke (= Chip) mit den Inschriften Casus Sortis = *Wechselfälle des Glücks* und *Wer spielt möge genügend einsetzen*. Außerdem zeigt die Spielmarke die 4 astragali des Venuswurfes.