# Stochastik

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

4. 1. Einführung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

# 4. Relative Häufigkeiten

## 4.1. Einführung

Gewinnt jemand beim Roulett mit einer transversale pleine, so erhält er mehr ausbezahlt als ein anderer, der bei gleichem Einsatz mit einem carré gewonnen hat. Die Spielbanken geben als Grund dafür an, daß ein carré »häufiger« auftritt als eine transversale pleine. Um diese Behauptung überprüfen zu können, braucht man ein Maß für die Häufigkeit eines Ereignisses. Dazu beobachtet man über einen längeren Zeitraum hinweg viele Wiederholungen desselben Zufallsexperiments und zählt, wie oft das interessierende Ereignis dabei eingetreten ist. Diese Zahl, die man **absolute Häufigkeit** des Ereignisses bei der betrachteten Versuchsfolge nennt, wird im allgemeinen mit der Anzahl der Versuche steigen. Die absolute Häufigkeit ist daher als Maß nicht geeignet. Ein brauchbares Maß ergibt sich jedoch, wenn man die absolute Häufigkeit relativiert, d.h., sie auf die Anzahl der Versuche bezieht. Dies geschieht, indem man die absolute Häufigkeit durch die Versuchsanzahl dividiert.

**Definition 30.1:** Tritt ein Ereignis $A$ bei $n$ Versuchen $k$-mal ein, so heißt $h_n(A) := \frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit** des Ereignisses $A$ in dieser Versuchsfolge.

Relative Häufigkeiten werden üblicherweise in Prozenten angegeben. Wer die Behauptung der Spielbanken nun mit Hilfe dieser Definition überprüfen möchte, kann sich z.B. anhand der von den Spielbanken veröffentlichten Ergebnislisten, den sog. Authentischen Roulette-Permanenzen, die relativen Häufigkeiten für ein carré und eine transversale pleine berechnen. So ergaben sich am Sonntag, dem 4. November 1962, am Tisch Nr. 1 des Spielcasinos Baden-Baden bei 346 Spielen 31mal die transversale pleine $\{16, 17, 18\}$ und 37mal das carré $\{4, 5, 7, 8\}$. Die relative Häufigkeit der besagten transversale pleine war also an diesem Tage $\frac{31}{346} = 8{,}96\%$, die relative Häufigkeit des besagten carrés jedoch $\frac{37}{346} = 10{,}69\%$.
Zur weiteren Veranschaulichung des Begriffs der relativen Häufigkeit greifen wir auf die Tabellen 10.1 und 11.1 zurück. So sind gemäß Tabelle 11.1 die relative Häufigkeit $h_{25}$ (»Adler«) $= \frac{11}{25} = 44\%$, $h_{50}$ (»Adler«) $= \frac{22}{50} = 44\%$ und $h_{75}$ (»Adler«) $= \frac{36}{75} = 48\%$ usw. Einen Überblick über die Abhängigkeit der relativen Häufigkeit $h_n$ (»Adler«) von $n$ bei dieser Versuchsfolge zeigt Figur 31.1. Dabei wurden nur die Werte der relativen Häufigkeit für Vielfache von 25 eingezeichnet und durch einen Streckenzug verbunden. Dieser Streckenzug soll lediglich die Entwicklung veranschaulichen, hat aber selbst keine Bedeutung für das Zufallsexperiment.

Obwohl in Tabelle 11.1 die Aufeinanderfolge von »Adler« und »Zahl« regellos ist, erwartet man naiverweise aus Symmetriegründen, daß Zahl und Adler etwa gleich häufig auftreten, die relative Häufigkeit von »Adler« also etwa 50% sein müßte.
Figur 31.1 zeigt, daß die relative Häufigkeit für »Adler« tatsächlich um den Wert

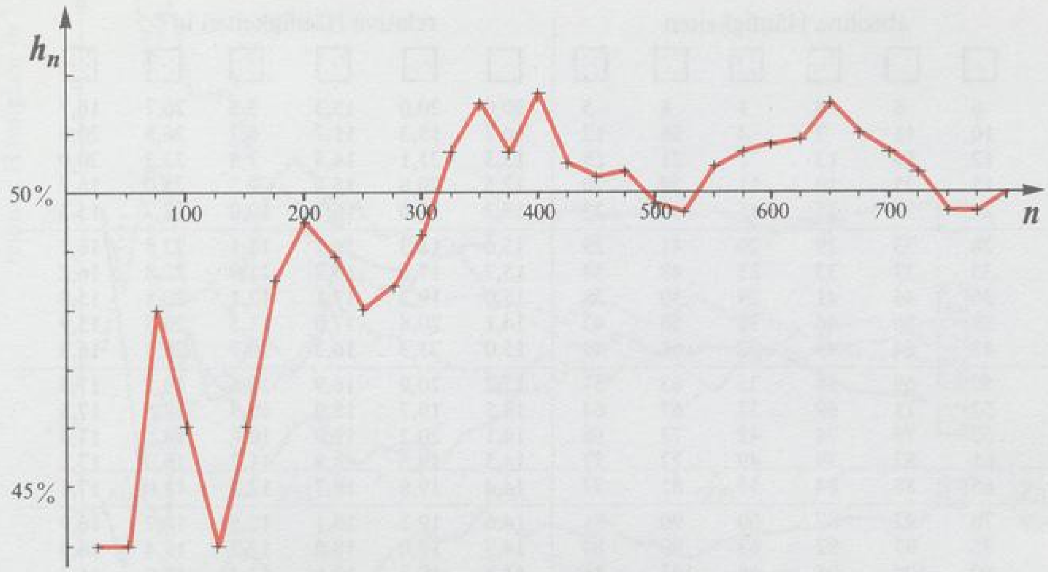


Fig. 31.1 Relative Häufigkeit $h_n$ (»Adler«) bei den 800 Münzenwürfen aus Tabelle 11.1

50% schwankt. Mit zunehmendem $n$ scheinen die Schwankungen kleiner zu werden, wenngleich immer wieder »Ausbrecher« auftreten. Trotzdem glaubt man daran, daß bei einer symmetrischen Münze die relative Häufigkeit für »Adler« sich immer weniger von dem Idealwert 50% unterscheidet, je größer die Anzahl der Versuche ist. So erhielt *Buffon** (1707–1788) für $h_{4040}$ (»Adler«) den Wert 50,69%, *K. Pearson*** (1857–1936) erzielte mit viel Geduld $h_{12000}$ (»Adler«) = 50,16% und $h_{24000}$ (»Adler«) = 50,05%.
Für dieses Verhalten der relativen Häufigkeit sagt man auch:
*»Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert.«*
Man kann vermuten, daß sich die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines bestimmten Ereignisses $A$ bei einem beliebig wiederholbaren Versuch mit zunehmender Versuchsanzahl $n$ *immer* um einen festen Wert stabilisiert. Im Laufe der Jahrhunderte haben die Erfahrungen gezeigt, daß diese Vermutung nicht zu Unrecht besteht. Sie ist also eine Erfahrungstatsache, die manchmal auch **Das empirische Gesetz der großen Zahlen** genannt wird. Die an sich überraschende Tatsache, daß auch das Zufallsgeschehen erkennbaren Gesetzen gehorcht***, ist die Grundlage der Stochastik, die diese Gesetzmäßigkeiten systematisch erforscht.
Ein weiteres Beispiel für die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten liefert uns die Serie von Würfelwürfen aus Tabelle 10.1. Wir berechnen dazu die absoluten und relativen Häufigkeiten der Augenzahlen nach 30, 60, ..., 1200 Würfen und geben sie in Tabelle 32.1 an; die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen werden durch Figur 33.1 veranschaulicht. Auch hier stellen wie in Figur 31.1 die Streckenzüge nur eine grobe Veranschaulichung der Entwicklung der relativen Häufigkeiten dar.

* Genaueres in Aufgabe 226/**22** und Aufgabe 369/**30**. – Siehe auch Seite 401.
** gesprochen: piəsn. Siehe Seite 420.
*** »Le hazard a des regles qui peuvent être connues«, schreibt *Montmort* (1678–1719) im Vorwort zu seinem *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (1708).

| absolute Häufigkeiten | | | | | | relative Häufigkeiten in % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
| 6 | 6 | 4 | 1 | 8 | 5 | 20,0 | 20,0 | 13,3 | 3,3 | 26,7 | 16,7 |
| 10 | 11 | 7 | 4 | 16 | 12 | 16,7 | 18,3 | 11,7 | 6,7 | 26,8 | 20,0 |
| 12 | 19 | 13 | 7 | 21 | 18 | 13,3 | 21,1 | 14,5 | 7,8 | 23,3 | 20,0 |
| 15 | 25 | 19 | 11 | 30 | 20 | 12,5 | 20,8 | 15,8 | 9,2 | 25,0 | 16,7 |
| 26 | 27 | 25 | 15 | 34 | 23 | 17,3 | 18,0 | 16,7 | 10,0 | 22,7 | 15,3 |
| 28 | 33 | 29 | 20 | 41 | 29 | 15,6 | 18,3 | 16,1 | 11,1 | 22,8 | 16,1 |
| 33 | 37 | 33 | 25 | 48 | 34 | 15,7 | 17,6 | 15,7 | 11,9 | 22,8 | 16,2 |
| 36 | 46 | 41 | 29 | 50 | 38 | 15,0 | 19,2 | 17,1 | 12,1 | 20,8 | 15,8 |
| 38 | 56 | 46 | 31 | 56 | 43 | 14,1 | 20,8 | 17,0 | 11,5 | 20,8 | 15,9 |
| 45 | 64 | 49 | 32 | 61 | 49 | 15,0 | 21,3 | 16,3 | 10,7 | 20,3 | 16,3 |
| 50 | 69 | 56 | 35 | 63 | 57 | 15,2 | 20,9 | 16,9 | 10,6 | 19,1 | 17,3 |
| 52 | 71 | 69 | 37 | 67 | 64 | 14,5 | 19,7 | 18,9 | 10,3 | 18,6 | 17,8 |
| 55 | 79 | 74 | 42 | 72 | 68 | 14,1 | 20,2 | 19,0 | 10,8 | 18,5 | 17,4 |
| 61 | 82 | 79 | 49 | 77 | 72 | 14,5 | 19,5 | 18,8 | 11,7 | 18,3 | 17,1 |
| 65 | 88 | 84 | 55 | 81 | 77 | 14,4 | 19,6 | 18,7 | 12,2 | 18,0 | 17,1 |
| 70 | 92 | 87 | 60 | 90 | 81 | 14,6 | 19,2 | 18,1 | 12,5 | 18,7 | 16,9 |
| 75 | 97 | 92 | 63 | 99 | 84 | 14,7 | 19,0 | 18,0 | 12,3 | 19,4 | 16,5 |
| 80 | 104 | 98 | 68 | 102 | 88 | 14,8 | 19,3 | 18,1 | 12,4 | 18,9 | 16,3 |
| 87 | 110 | 103 | 74 | 103 | 93 | 15,0 | 19,3 | 18,1 | 13,0 | 18,1 | 16,3 |
| 92 | 121 | 109 | 76 | 107 | 95 | 15,3 | 20,2 | 18,2 | 12,7 | 17,8 | 15,8 |
| 103 | 125 | 111 | 78 | 113 | 100 | 16,3 | 19,9 | 17,6 | 12,4 | 17,9 | 15,9 |
| 110 | 131 | 114 | 84 | 116 | 105 | 16,7 | 19,9 | 17,3 | 12,7 | 17,6 | 15,9 |
| 113 | 139 | 117 | 87 | 120 | 114 | 16,4 | 20,1 | 17,0 | 12,6 | 17,4 | 16,5 |
| 118 | 145 | 118 | 89 | 129 | 121 | 16,4 | 20,1 | 16,4 | 12,4 | 17,9 | 16,8 |
| 121 | 150 | 121 | 95 | 134 | 129 | 16,1 | 20,0 | 16,1 | 12,7 | 17,9 | 17,2 |
| 130 | 157 | 126 | 96 | 137 | 134 | 16,7 | 20,1 | 16,2 | 12,3 | 17,6 | 17,2 |
| 134 | 162 | 136 | 100 | 142 | 136 | 16,6 | 20,0 | 16,8 | 12,3 | 17,5 | 16,8 |
| 142 | 170 | 139 | 101 | 149 | 139 | 16,9 | 20,2 | 16,6 | 12,0 | 17,7 | 16,6 |
| 146 | 175 | 141 | 104 | 157 | 147 | 16,8 | 20,1 | 16,2 | 11,9 | 18,1 | 16,9 |
| 152 | 182 | 143 | 110 | 161 | 152 | 16,9 | 20,2 | 15,9 | 12,2 | 17,9 | 16,9 |
| 156 | 186 | 153 | 115 | 163 | 157 | 16,8 | 20,0 | 16,5 | 12,4 | 17,5 | 16,9 |
| 161 | 190 | 159 | 120 | 169 | 161 | 16,8 | 19,8 | 16,6 | 12,5 | 17,6 | 16,8 |
| 166 | 194 | 167 | 124 | 172 | 167 | 16,8 | 19,6 | 16,9 | 12,5 | 17,4 | 16,9 |
| 168 | 203 | 176 | 129 | 175 | 169 | 16,5 | 19,9 | 17,3 | 12,6 | 17,2 | 16,6 |
| 171 | 208 | 180 | 132 | 181 | 178 | 16,3 | 19,8 | 17,1 | 12,6 | 17,2 | 16,9 |
| 173 | 215 | 183 | 138 | 189 | 182 | 16,0 | 19,9 | 16,9 | 12,8 | 17,5 | 16,8 |
| 176 | 223 | 189 | 142 | 195 | 185 | 15,9 | 20,1 | 17,0 | 12,8 | 17,6 | 16,7 |
| 180 | 232 | 194 | 146 | 198 | 190 | 15,8 | 20,3 | 17,0 | 12,8 | 17,4 | 16,7 |
| 185 | 236 | 201 | 148 | 204 | 196 | 15,8 | 20,2 | 17,3 | 12,6 | 17,4 | 16,7 |
| 187 | 244 | 204 | 155 | 210 | 200 | 15,6 | 20,3 | 17,0 | 12,9 | 17,5 | 16,7 |

Tab. 32.1 Auswertung von Tabelle 10.1

Die Schreibweise $h_n(A)$ legt die falsche Vermutung nahe, daß der Wert $h_n(A)$ nur von der Versuchsanzahl $n$ abhängt, sonst aber für das Ereignis $A$ kennzeichnend ist. In Wirklichkeit hängt diese Zahl $h_n(A)$ auch noch von der konkret durchgeführten Versuchsfolge ab. So kann z. B. der Wert $h_{10}$ (»Adler«) je nach Versuchsfolge jeden der 11 Werte $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, 1$ annehmen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts fassen wir die 800 Münzenwürfe aus Tabelle 11.1 als 8 Versuchsfolgen zu je 100 Würfen auf. Im Bild ergeben sich damit 8 Streckenzüge für die relative Häufigkeit $h_n$ (»Adler«). Vergröbert sind sie in Figur 34.1 dargestellt, wo jeweils nur die Werte für die Vielfachen von 5 eingezeichnet sind, die in Tabelle 33.1 zusammengestellt wurden.

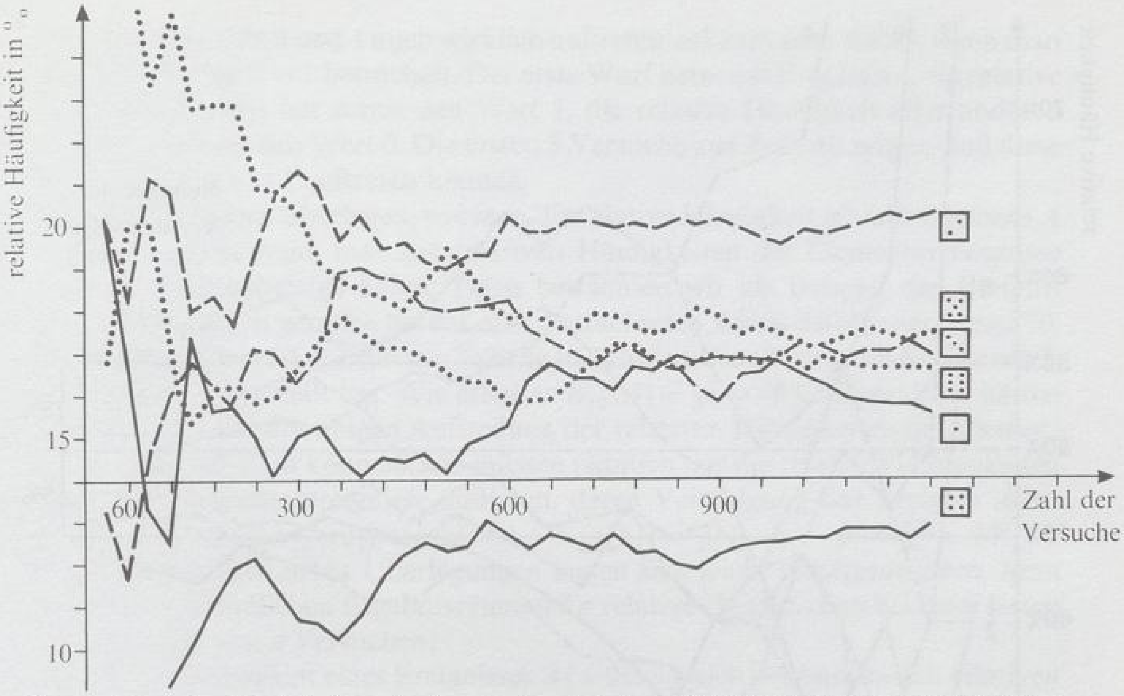


Fig. 33.1 Relative Häufigkeiten der Augenzahlen bei den 1200 Würfelwürfen von Tabelle 10.1

| Anzahl der Versuche in der Serie | Nummer der Versuchsserie 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 40,0 | 40,0 | 20,0 | 100,0 | 20,0 | 100,0 | 100,0 | 60,0 |
| 10 | 40,0 | 30,0 | 20,0 | 80,0 | 20,0 | 80,0 | 50,0 | 40,0 |
| 15 | 33,3 | 40,0 | 26,7 | 80,0 | 33,3 | 60,0 | 46,7 | 46,7 |
| 20 | 40,0 | 35,0 | 40,0 | 75,0 | 35,0 | 55,0 | 55,0 | 50,0 |
| 25 | 44,0 | 36,0 | 44,0 | 68,0 | 36,0 | 48,0 | 52,0 | 44,0 |
| 30 | 40,0 | 40,0 | 43,3 | 66,7 | 43,3 | 43,3 | 50,0 | 36,7 |
| 35 | 40,0 | 40,0 | 45,7 | 65,7 | 40,0 | 48,6 | 54,3 | 34,3 |
| 40 | 42,5 | 42,5 | 45,0 | 60,0 | 35,0 | 50,0 | 60,0 | 37,5 |
| 45 | 44,4 | 46,7 | 46,7 | 62,2 | 37,8 | 53,3 | 60,0 | 37,8 |
| 50 | 44,0 | 46,0 | 42,0 | 64,0 | 40,0 | 56,0 | 60,0 | 38,0 |
| 55 | 45,5 | 45,5 | 43,6 | 61,8 | 41,8 | 58,2 | 56,4 | 40,0 |
| 60 | 48,3 | 48,3 | 45,0 | 63,3 | 43,3 | 56,7 | 55,0 | 43,3 |
| 65 | 47,7 | 49,2 | 46,2 | 60,0 | 44,6 | 56,9 | 53,8 | 43,1 |
| 70 | 45,7 | 48,6 | 44,3 | 57,1 | 44,3 | 57,1 | 54,3 | 41,4 |
| 75 | 48,0 | 52,0 | 45,3 | 56,0 | 45,3 | 56,0 | 53,3 | 41,3 |
| 80 | 46,3 | 53,8 | 45,0 | 56,3 | 46,3 | 55,0 | 51,3 | 42,5 |
| 85 | 44,7 | 55,3 | 45,9 | 58,8 | 44,7 | 54,1 | 51,8 | 43,5 |
| 90 | 43,3 | 55,5 | 45,6 | 57,8 | 44,4 | 53,3 | 51,1 | 44,4 |
| 95 | 45,3 | 54,8 | 47,4 | 56,8 | 42,1 | 54,8 | 50,5 | 46,3 |
| 100 | 46,0 | 53,0 | 49,0 | 58,0 | 43,0 | 55,0 | 50,0 | 46,0 |

Tab. 33.1 Entwicklung der relativen Häufigkeiten (in %) bei je 100 Münzenwürfen in 8 Versuchsfolgen

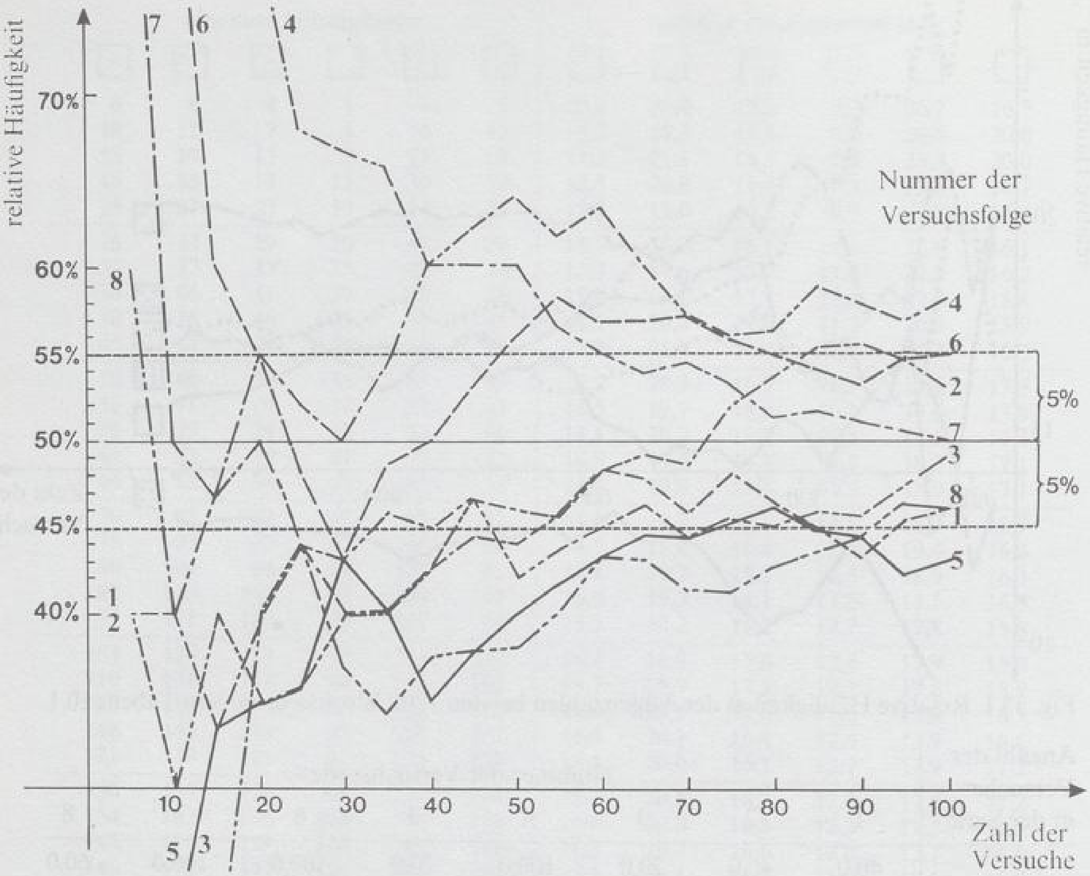


Fig. 34.1 Relative Häufigkeit von »Adler« bei je 100 Münzenwürfen in Abhängigkeit von der Versuchsfolge

## 4.2. Eigenschaften der relativen Häufigkeit

Wir betrachten die erste Zeile von Tabelle 10.1. Sie stellt die Ergebnisse einer Folge von 30 Versuchen (Würfelwurf) dar. Die relativen Häufigkeiten der Ereignisse $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

| Ereignis | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{4\}$ | $\{5\}$ | $\{6\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| relative Häufigkeit | $\frac{6}{30}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{4}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{8}{30}$ | $\frac{5}{30}$ |

Diese relativen Häufigkeiten sind positive rationale Zahlen unter 1.
Allgemein kann man sagen: Tritt das Ereignis $A$ bei $n$ Versuchen $k$-mal ein, so gilt offenbar $0 \leqq k \leqq n$ und damit $0 \leqq \dfrac{k}{n} \leqq 1$. Also:

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses $A$ in einer Versuchsfolge der Länge $n$ ist eine rationale Zahl aus dem Intervall $[0; 1]$, d.h.

(1) $$\boxed{0 \leqq h_n(A) \leqq 1}$$