Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

5. 1. Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.1. Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Bei zufallsbedingten Ereignissen hat man normalerweise ein subjektives Empfinden dafür, mit welchem Grad von Sicherheit, d.h. mit welcher »Wahrscheinlichkeit«, ein solches Ereignis eintreten wird. Als Beispiel für eine derartige subjektive Wahrscheinlichkeit diene der Satz »Morgen wird es wahrscheinlich regnen«.
Den Grad der Sicherheit entnimmt man der eigenen oder fremden Erfahrung. Dabei meint man, sich seines Urteils um so sicherer zu sein, je öfter man Erfahrungen in dieser Hinsicht gemacht hat. Dieser umgangssprachliche Wahrscheinlichkeitsbegriff beruht also auf Beobachtungen, wie oft ein Ereignis unter bestimmten Bedingungen eingetreten ist, d.h. also auf Beobachtungen der relativen Häufigkeit des Ereignisses. *Jakob Bernoulli* (1655–1705) schreibt im 4. Kapitel des 4. Teils seiner *Ars conjectandi*, einem der grundlegenden Werke der Wahrscheinlichkeitstheorie:

»Auch leuchtet es jedem Menschen ein, daß es nicht genügt, nur ein oder zwei Versuche angestellt zu haben, um auf diese Weise irgendein Ereignis beurteilen zu können, sondern daß dazu eine große Anzahl von Versuchen nötig ist; weiß doch selbst der beschränkteste Mensch aus irgendeinem natürlichen Instinkt heraus von selbst und ohne jede vorherige Belehrung (was fürwahr erstaunlich ist), daß um so geringer die Gefahr ist, vom wahren Sachverhalt abzuweichen, je mehr diesbezügliche Beobachtungen gemacht worden sind.«*

In einem mathematischen Modell des Zufallsgeschehens muß man den Ereignissen Zahlen als Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Man ist auf Grund der obigen Überlegungen geneigt, die relative Häufigkeit eines Ereignisses als Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in die Theorie einzuführen. Wir haben aber in **4.1.** gesehen, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses zunächst von der Anzahl der Versuche abhängt; bei gleicher Versuchsanzahl hängt der Wert der relativen Häufigkeit dann noch von der konkreten Versuchsfolge ab. Die Entscheidung, welchen der durch Versuche erhaltenen oder welchen der grundsätzlich möglichen Werte der relativen Häufigkeit eines Ereignisses man nun als Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nehmen soll, nimmt uns niemand ab. Die Mathematiker durchschlagen diesen gordischen Knoten dadurch, daß sie als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses alles akzeptieren, was nur bestimmten Bedingungen genügt. Selbstverständlich wird man sich bei der Aufstellung dieser Bedingungen leiten lassen von den Eigenschaften, die die relative Häufigkeit besitzt.
Zunächst erinnern wir an Eigenschaft (2) von Seite 35. Sie besagt, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses A die Summe der relativen Häufigkeiten derjenigen Elementarereignisse ist, deren Vereinigung das Ereignis A ergibt. Es genügt demnach, Wahrscheinlichkeitswerte für alle Elementarereignisse festzulegen. Dies kann aber wiederum nicht ganz willkürlich geschehen. Wegen Eigenschaft (1) müssen diese Wahrscheinlichkeitswerte Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$ sein, deren Summe wegen (4) den Wert 1 ergeben muß. Schließlich wollen wir

* Deinde nec illud quenquam latere potest, quod ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non sufficiat sumsisse unum alterumque experimentum, sed quod magna experimentorum requiratur copia; quando et stupidissimus quisque nescio quo naturae instinctu per se et nulla praevia institutione (quod sane mirabile est) compertum habet, quo plures ejusmodi captae fuerint observationes, eo minus a scopo aberrandi periculum fore.

dem unmöglichen Ereignis wegen (3) die Wahrscheinlichkeit 0 zuschreiben. Zusammenfassend können wir sagen: Wir verteilen die Wahrscheinlichkeit 1 auf die Elementarereignisse; dadurch ist aber wegen (2) automatisch allen Ereignissen des Ereignisraums eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.
Im mathematischen Modell des Zufallsgeschehens definiert man also die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als den Wert einer reellwertigen Funktion P, die Wahrscheinlichkeitsverteilung* heißt und die durch folgende Eigenschaften axiomatisch festgelegt wird.

Definition 42.1: Eine auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierte Funktion

$$P : A \mapsto P(A),\ D_P = \mathfrak{P}(\Omega)$$

heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ergebnisraum Ω**, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist eine Zahl aus dem Intervall $[0; 1]$, d.h., für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $0 \leqq P(\{\omega\}) \leqq 1$.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1, d.h., $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.
3. Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0, d.h., $P(\emptyset) := 0$.
4. Die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse, d.h., $P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Beispiel: Für den Würfel von Tabelle 10.1 bietet sich auf Grund der letzten Zeile von Tabelle 32.1 folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung an, wenn man als Ergebnisraum Ω die Menge der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 nimmt:

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	0,156	0,203	0,170	0,129	0,175	0,167

1 und **2** von Definition 42.1 sind offensichtlich erfüllt. Mit **3** und **4** liegen dann für alle 2^6 Ereignisse des Ereignisraums $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Wahrscheinlichkeiten fest. So hat z.B. das Ereignis »gerade Augenzahl« die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(\{2, 4, 6\}) &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \\ &= 0{,}203 + 0{,}129 + 0{,}167 = \\ &= 0{,}499. \end{aligned}$$

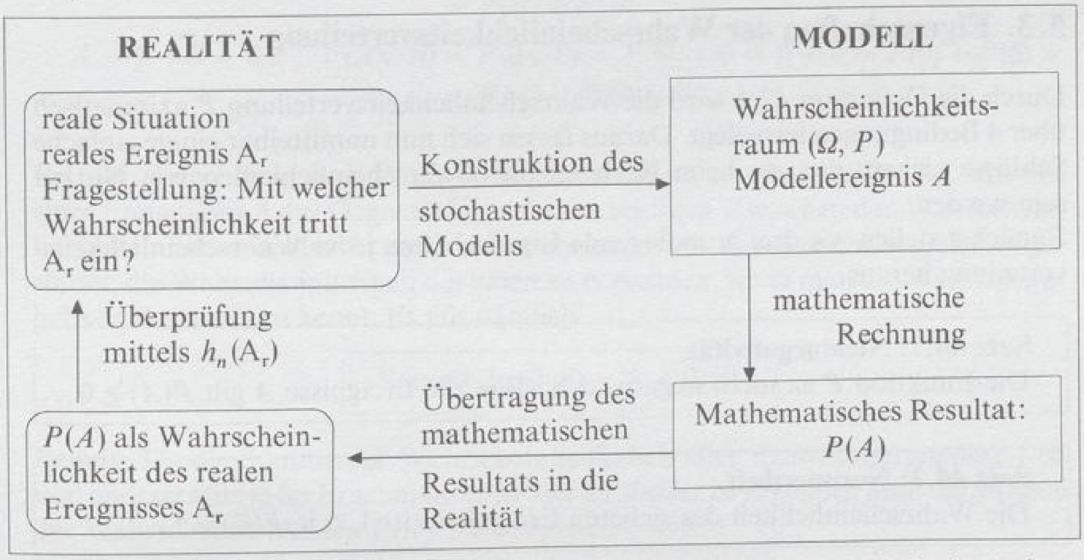
Die Festlegung der Funktionswerte $P(\{\omega\})$, d.h. der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, ist im Rahmen dieser Definition willkürlich. Man wird jedoch die Werte so festlegen, daß sie den jeweiligen Verhältnissen angepaßt sind.

* Das Funktionssymbol P kommt von *probabilitas*, dem lateinischen Wort für Wahrscheinlichkeit, aus dem das französische *probabilité* und das englische *probability* wurde. Es ist zum ersten Mal bei *Cicero* (106–43) belegt. Mit dem älteren Adjektiv *probabilis* bezeichnete man etwas, was Beifall und Anerkennung gefunden hatte, was sich als tüchtig herausgestellt hatte, und schließlich, was durch gute Gründe glaubhaft zu sein schien. – Das deutsche Wort *Wahrscheinlichkeit* (= es scheint wahr zu sein) entspricht jedoch genau dem lateinischen Begriff *verisimilitudo*, der erstmals bei *Apuleius* (um 125 – um 180) in den *Metamorphosen* (2, 27, 6) nachzuweisen ist.

So wird man bei einem idealen Würfel auf Grund der Symmetrie für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ festlegen. Bei einem realen Würfel hingegen empfiehlt es sich, wie im obigen Beispiel durchgeführt, die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen in einer möglichst langen Versuchsserie zu bestimmen und diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen zu verwenden.
Mit der axiomatischen Festlegung der Wahrscheinlichkeit durch Definition 42.1 sind nun alle Begriffe vorhanden, die zur Konstruktion eines mathematischen Modells für ein reales Zufallsexperiment benötigt werden. Dieses stochastische Modell besteht aus der Menge Ω aller betrachteten Ergebnisse ω und aus der auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierten Wahrscheinlichkeitsverteilung P. Aus diesem Grunde nennen wir das Paar (Ω, P) **Wahrscheinlichkeitsraum** des Zufallsexperiments.

5.2. Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gelernt, wie man, von einem realen Zufallsexperiment ausgehend, ein stochastisches Modell für dieses Experiment konstruieren kann. Die Brauchbarkeit eines solchen Modells zeigt sich erst dann, wenn im Modell erarbeitete Erkenntnisse Erklärungen für eine reale Situation bieten oder Vorhersagen für reale Geschehnisse gestatten. Diesen Zusammenhang zwischen Realität und Modell wollen wir kurz nochmals zusammenfassen.



1) Fragestellung: Man möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein reales Ereignis A_r in einer realen Situation eintritt.
2) Man konstruiert zu dieser realen Situation ein stochastisches Modell, d.h. einen Wahrscheinlichkeitsraum, indem man einen passenden Ergebnisraum Ω und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P angibt. Dem realen Ereignis A_r entspricht ein Modellereignis A, das eine Teilmenge von Ω ist.
3) Man berechnet im Modell die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Modellereignisses.
4) Man nimmt nun diese Wahrscheinlichkeit $P(A)$ als »Wahrscheinlichkeit des realen Ereignisses A_r«.