Stochastik

Barth, Friedrich

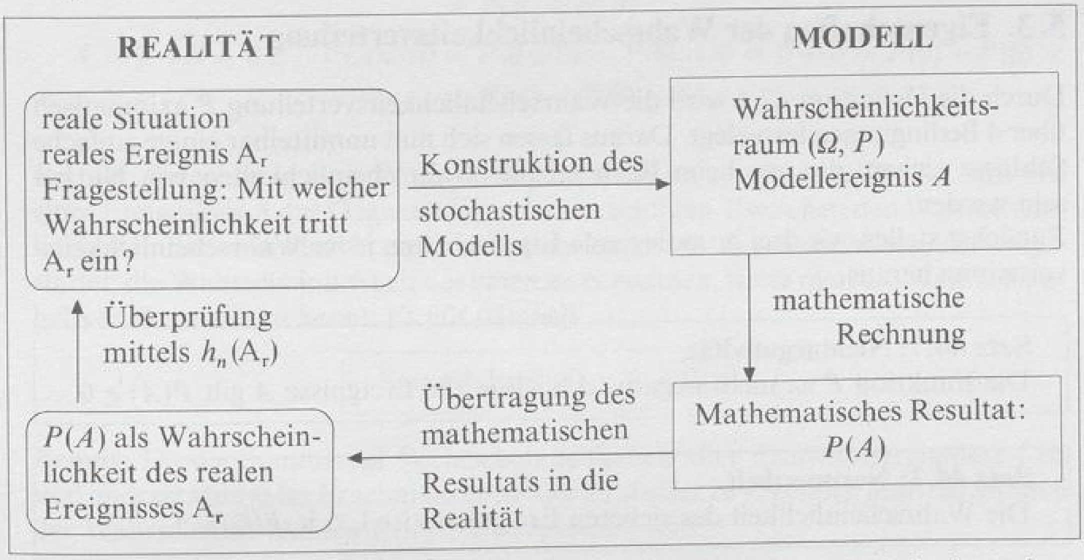
München, [20]03

5. 2. Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten

So wird man bei einem idealen Würfel auf Grund der Symmetrie für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ festlegen. Bei einem realen Würfel hingegen empfiehlt es sich, wie im obigen Beispiel durchgeführt, die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen in einer möglichst langen Versuchsserie zu bestimmen und diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen zu verwenden.
Mit der axiomatischen Festlegung der Wahrscheinlichkeit durch Definition 42.1 sind nun alle Begriffe vorhanden, die zur Konstruktion eines mathematischen Modells für ein reales Zufallsexperiment benötigt werden. Dieses stochastische Modell besteht aus der Menge Ω aller betrachteten Ergebnisse ω und aus der auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierten Wahrscheinlichkeitsverteilung P. Aus diesem Grunde nennen wir das Paar (Ω, P) **Wahrscheinlichkeitsraum** des Zufallsexperiments.

5.2. Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gelernt, wie man, von einem realen Zufallsexperiment ausgehend, ein stochastisches Modell für dieses Experiment konstruieren kann. Die Brauchbarkeit eines solchen Modells zeigt sich erst dann, wenn im Modell erarbeitete Erkenntnisse Erklärungen für eine reale Situation bieten oder Vorhersagen für reale Geschehnisse gestatten. Diesen Zusammenhang zwischen Realität und Modell wollen wir kurz nochmals zusammenfassen.



1) Fragestellung: Man möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein reales Ereignis A_r in einer realen Situation eintritt.
2) Man konstruiert zu dieser realen Situation ein stochastisches Modell, d.h. einen Wahrscheinlichkeitsraum, indem man einen passenden Ergebnisraum Ω und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P angibt. Dem realen Ereignis A_r entspricht ein Modellereignis A, das eine Teilmenge von Ω ist.
3) Man berechnet im Modell die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Modellereignisses.
4) Man nimmt nun diese Wahrscheinlichkeit $P(A)$ als »Wahrscheinlichkeit des realen Ereignisses A_r«.

5) Die Brauchbarkeit des stochastischen Modells überprüft man, indem man in einer möglichst langen Versuchsreihe die relative Häufigkeit des realen Ereignisses A_r bestimmt; dabei sollte sich diese relative Häufigkeit nicht allzusehr von der berechneten Wahrscheinlichkeit $P(A)$ unterscheiden. Ist man mit der Übereinstimmung unzufrieden, so wird man das stochastische Modell verändern und den Zyklus erneut durchlaufen.

Den Zusammenhang zwischen stochastischem Modell und Realität, der auf Seite 43 schematisch dargestellt ist, formulieren wir in der

Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten:
Die Aussage »Das Ereignis A hat die Wahrscheinlichkeit $P(A)$« bedeutet: Wiederholt man das gleiche Zufallsexperiment sehr oft (n-mal), so tritt das reale Ereignis A_r ungefähr mit der relativen Häufigkeit $P(A)$ ein, in Zeichen $h_n(A_r) \approx P(A)$, wobei das »Ungefähr« von der Länge n der Versuchsserie abhängt.

Die Präzisierung dieses »Ungefähr« ist eine der Aufgaben der Beurteilenden Statistik.

5.3. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Durch die Definition 42.1 wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung P axiomatisch über 4 Bedingungen festgelegt. Daraus lassen sich nun unmittelbar einige einfache Schlüsse ziehen, die uns beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten von Nutzen sein werden.
Zunächst stellen wir drei grundlegende Eigenschaften jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung heraus:

Satz 44.1: Nichtnegativität.
Die Funktion P ist nicht negativ, d.h.: Für alle Ereignisse A gilt $P(A) \geqq 0$.

Satz 44.2: Normiertheit.
Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, d.h. $P(\Omega) = 1$.

Satz 44.3: Additivität.
Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit von »A oder B« gleich der Summe aus der Wahrscheinlichkeit von A und der Wahrscheinlichkeit von B, d.h., es gilt folgende Summenformel:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$