Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

5. 3. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

5) Die Brauchbarkeit des stochastischen Modells überprüft man, indem man in einer möglichst langen Versuchsreihe die relative Häufigkeit des realen Ereignisses A_r bestimmt; dabei sollte sich diese relative Häufigkeit nicht allzusehr von der berechneten Wahrscheinlichkeit $P(A)$ unterscheiden. Ist man mit der Übereinstimmung unzufrieden, so wird man das stochastische Modell verändern und den Zyklus erneut durchlaufen.

Den Zusammenhang zwischen stochastischem Modell und Realität, der auf Seite 43 schematisch dargestellt ist, formulieren wir in der

Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten:
Die Aussage »Das Ereignis A hat die Wahrscheinlichkeit $P(A)$« bedeutet: Wiederholt man das gleiche Zufallsexperiment sehr oft (n-mal), so tritt das reale Ereignis A_r ungefähr mit der relativen Häufigkeit $P(A)$ ein, in Zeichen $h_n(A_r) \approx P(A)$, wobei das »Ungefähr« von der Länge n der Versuchsserie abhängt.

Die Präzisierung dieses »Ungefähr« ist eine der Aufgaben der Beurteilenden Statistik.

5.3. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Durch die Definition 42.1 wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung P axiomatisch über 4 Bedingungen festgelegt. Daraus lassen sich nun unmittelbar einige einfache Schlüsse ziehen, die uns beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten von Nutzen sein werden.
Zunächst stellen wir drei grundlegende Eigenschaften jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung heraus:

Satz 44.1: Nichtnegativität.
Die Funktion P ist nicht negativ, d.h.: Für alle Ereignisse A gilt $P(A) \geqq 0$.

Satz 44.2: Normiertheit.
Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, d.h. $P(\Omega) = 1$.

Satz 44.3: Additivität.
Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit von »A oder B« gleich der Summe aus der Wahrscheinlichkeit von A und der Wahrscheinlichkeit von B, d.h., es gilt folgende Summenformel:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Beweise:

1. Da die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen nicht-negative Zahlen sind, ist auch jede aus ihnen gebildete Summe nicht negativ.

2. Da Ω die Vereinigung aller Elementarereignisse ist und deren Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben, ist $P(\Omega) = 1$.

3. Da die Ereignisse A und B unvereinbar sind, gehört jedes Ergebnis aus $A \cup B$ entweder zu A oder zu B. Nach Eigenschaft **4** der Definition 42.1 erhält man die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B$ als Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse. Diese Summe läßt sich aber in zwei Teilsummen zerlegen, von denen die erste die Wahrscheinlichkeit von A und die zweite die Wahrscheinlichkeit von B liefern.

   Formal sieht das so aus:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = P(A) + P(B).$$

   Ist mindestens eines der Ereignisse A, B das unmögliche Ereignis $\emptyset$, so ist die Behauptung auf Grund von Eigenschaft **3** der Definition 42.1 trivialerweise richtig. Der formale Nachweis gelingt folgendermaßen:

$$A = \emptyset \wedge B \neq \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup B) = P(B) = 0 + P(B) = P(\emptyset) + P(B) = \\ = P(A) + P(B).$$

$$A = \emptyset \wedge B = \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = 0 + 0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) = \\ = P(A) + P(B).$$

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es oft zweckmäßig, anstelle eines Ereignisses A das Gegenereignis $\bar{A}$ zu betrachten. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse besteht ein enger Zusammenhang, der es gestattet, die Wahrscheinlichkeit des einen zu berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeit des anderen kennt. Es gilt nämlich

Satz 45.1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Beweis: Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse 1 ist und andererseits jedes Ergebnis ω entweder zu A oder zu $\bar{A}$ gehört, muß die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(A) + P(\bar{A})$ gleich 1 sein.

5.4. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Von alters her benützen die Menschen einfache Geräte, um Zufall zu erzeugen, der sowohl magischen Zwecken wie auch dem Spieltrieb dient. Solche Zufallsgeräte fand man in Form von kleinen Pyramiden, von abgeflachten Kugeln, als Pentaeder, Oktaeder und Ikosaeder, aber auch in menschlicher Gestalt. Wir wollen im Folgenden einige wichtige Beispiele solcher Zufallsgeräte vorstellen.