Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

5. 4. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Beweise:

1. Da die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen nicht-negative Zahlen sind, ist auch jede aus ihnen gebildete Summe nicht negativ.

2. Da Ω die Vereinigung aller Elementarereignisse ist und deren Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben, ist $P(\Omega) = 1$.

3. Da die Ereignisse A und B unvereinbar sind, gehört jedes Ergebnis aus $A \cup B$ entweder zu A oder zu B. Nach Eigenschaft **4** der Definition 42.1 erhält man die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B$ als Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse. Diese Summe läßt sich aber in zwei Teilsummen zerlegen, von denen die erste die Wahrscheinlichkeit von A und die zweite die Wahrscheinlichkeit von B liefern.

Formal sieht das so aus:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = P(A) + P(B).$$

Ist mindestens eines der Ereignisse A, B das unmögliche Ereignis $\emptyset$, so ist die Behauptung auf Grund von Eigenschaft **3** der Definition 42.1 trivialerweise richtig. Der formale Nachweis gelingt folgendermaßen:

$$A = \emptyset \wedge B \neq \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup B) = P(B) = 0 + P(B) = P(\emptyset) + P(B) = P(A) + P(B).$$

$$A = \emptyset \wedge B = \emptyset: \quad P(A \cup B) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = 0 + 0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) = P(A) + P(B).$$

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es oft zweckmäßig, anstelle eines Ereignisses A das Gegenereignis $\bar{A}$ zu betrachten. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse besteht ein enger Zusammenhang, der es gestattet, die Wahrscheinlichkeit des einen zu berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeit des anderen kennt. Es gilt nämlich

Satz 45.1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Beweis: Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse 1 ist und andererseits jedes Ergebnis ω entweder zu A oder zu $\bar{A}$ gehört, muß die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(A) + P(\bar{A})$ gleich 1 sein.

5.4. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Von alters her benützen die Menschen einfache Geräte, um Zufall zu erzeugen, der sowohl magischen Zwecken wie auch dem Spieltrieb dient. Solche Zufallsgeräte fand man in Form von kleinen Pyramiden, von abgeflachten Kugeln, als Pentaeder, Oktaeder und Ikosaeder, aber auch in menschlicher Gestalt. Wir wollen im Folgenden einige wichtige Beispiele solcher Zufallsgeräte vorstellen.

Bild 46.1 Ikosaeder

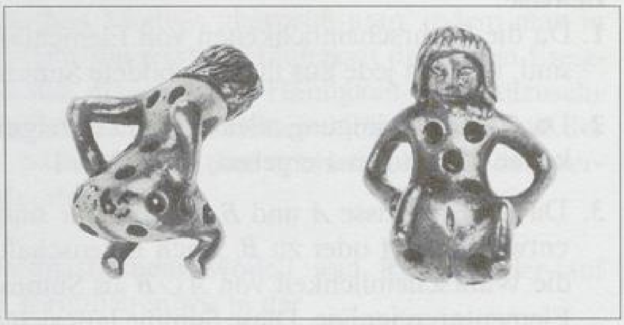

Bild 46.2 Zwei Würfel aus Silber in Gestalt von hokkenden Frauen (14 × 11 × 11 mm), Deutschland, 17. Jh. – Bayerisches Nationalmuseum. – Das Britische Museum besitzt ein winziges Silbermenschenpaar aus der römischen Antike mit derselben Augenverteilung: 1 auf dem Kopf, 4 am Gesäß, 2 und 3 auf den Schenkeln, 5 auf der Brust und 6 auf dem Rücken. Siehe Bild 227.1.

a) Der Astragalus*. Sprungbeine von Paarhufern wie Schaf und Ziege findet man schon in Gräbern aus prähistorischer Zeit (30000–20000 v. Chr.) und dann ab dem 3. Jahrtausend v. Chr. sehr verbreitet in Gräbern verschiedener Kulturen Mittel- und Südosteuropas, Vorderasiens und Chinas.

Die Beliebtheit dieses Spielgeräts bezeugen viele antike Quellen** und Kunstwerke, aber noch mehr die mitunter sehr hohe Anzahl von Astragali als Grabbeigaben; so fand man in Süditalien oft über 1000 Stück, teils echt von Schaf und Ziege, teils nachgebildet in Ton oder auch in Edelmetall. Spielregeln sind erst aus Großgriechenland bekannt; die Überlieferung ist leider sehr lückenhaft. Die Kenntnis der Regeln geht mit der Christianisierung verloren. Astragali waren mehr ein Spielgerät der Griechen als der Römer. In China sind Astragali seit alters her in Gebrauch. Bis in die Anfänge unseres Jahrhunderts waren sie in vielen Gegenden Europas, u. a. auch in Deutschland, ein beliebtes Spielgerät für Kinder. Heutzutage gibt es sogar schon Astragali aus Plastik! In Troia gefundene waren dagegen aus Blei (Troia VII–IX, ca. 1300 v. Chr.–4. Jh. n. Chr., Größe in cm z. B. 2,0 × 1,3 × 0,6).

Da ein Astragalus an 2 Seiten rund ist, kann er nach dem Wurf nur auf einer von 4 Seiten zu liegen kommen. In manchen Spielen wurde die oben liegende Seite – wohl in Anlehnung an den Würfel – wie folgt bewertet: Konvexe Breitseite (»Bauch«) = 4, konkave Breitseite (»Rükken«) = 3, volle Schmalseite = 1, eingedrückte Schmalseite = 6. (Vgl. Bild 60.1)

Bild 46.3 Astragali aus dem etruskischen Vulci – Staatliche Antikensammlungen und Glyptothek, München

* Betonung auf der drittletzten Silbe; *ὁ ἀστράγαλος* = das Sprungbein. Es handelt sich um den kleinen, zwischen den Knöcheln des Schien- und Wadenbeins eingeklemmten, die Verbindung mit dem Fuße herstellenden Knochen. Die Römer nannten ihn *talus*.

** So erzählt z. B. *Patroklos* in der *Ilias* (23, 88), daß er als Junge aus Zorn jemanden beim Spiel mit den Knöcheln getötet hat. – Die Kaiser *Augustus* und *Claudius* würfelten gerne; letzterer schrieb sogar ein Buch über die Kunst des Würfelspiels (*Sueton: Caesarenleben*, Aug. 71 und Cl. 33). – Ein Epigramm des *Asklepiades* (3. Jh. v. Chr.) ist dem Schüler *Konnaros* gewidmet, der 80 Astragali als Preis in einem Schönschreibewettbewerb errang.

Über die relativen Häufigkeiten kann man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Astragalus-Wurf erhalten:

ω	1	3	4	6
$P(\{\omega\})$	0,1	0,35	0,48	0,07

Dabei ist natürlich zu beachten, daß jeder Astragalus eine etwas andere Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt. Diese Verschiedenheit mag vielleicht den Reiz des Spiels ausgemacht haben. Sicherlich aber kam sie der Magie sehr zunutze, so z. B. im berühmten Astragalorakel des Aphrodite-Heiligtums von Paphos auf Zypern.* Negerstämme in Südafrika verwenden Astragali heute noch zur Zukunftsdeutung.

b) Der Würfel.** Feilte man Astragali oder passend abgeschnittene Stücke von Röhrenknochen (Bild 47.3) zu, so hatte man 6 mögliche Ergebnisse, da sie auf alle 6 Seiten fallen konnten. Aus ihnen hat sich unser Spielwürfel entwickelt.

In Tepe Gawra (Irak) und Mohenjo Daro (Pakistan) fand man Tonwürfel aus dem Anfang bzw. Ende des 3. Jahrtausends v. Chr. (siehe Seite 40, Figur 47.1 und Figur 47.2). Würfel aus ägyptischen Gräbern sind etwa 4000 Jahre alt.
In China sind Würfel aus der Zeit um 600 v. Chr. erhalten. *Sophokles* (496–406) zufolge hat *Palamédes*, der große Erfindergenius der Griechen, die Würfel bei der Belagerung von Troja erfunden, um die dort hungernden Helden abzulenken***, wohingegen *Herodot* (490–430) meint, die Lyder hätten um 1500 v. Chr. die Würfel (und auch die Astragali) erfunden, um das hungernde Volk jeden zweiten Tag 18 Jahre lang über den Hunger hinwegzutrösten (I. 94). *Platon* (428–348) hingegen läßt *Sokrates* in *Phaidros* (274c) sagen, der ibisköpfige Gott *Thot* der Ägypter habe zuerst die Zahlen und dann das Würfelspiel erfunden. – Von der Leidenschaft der Germanen beim Würfelspiel berichtet *Tacitus* (um 55 – nach 115) in seiner *Germania* (24).

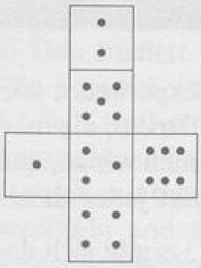

Fig. 47.1 Würfel von Tepe Gawra (Nord-Irak)

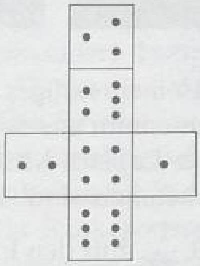

Fig. 47.2 Würfel von Mohendscho Daro (Pakistan)

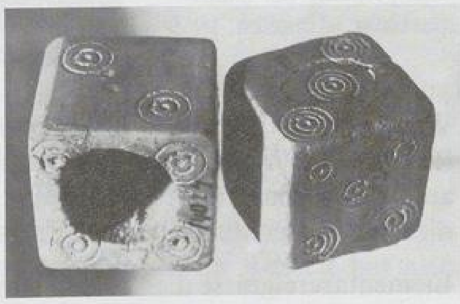

Bild 47.3 tesserae, Herkunft unbekannt – Staatliche Antikensammlungen und Glyptothek, München

* Über ein Astragalorakel berichtet *Sueton* (70–140) in *De vita Caesarum* (Tib. 14): *Tiberius* befragte auf dem Weg nach Illyrien das Orakel des dreiköpfigen Gottes Geryoneus bei Padua. Er mußte 4 goldene Astragali in die Aponusquelle, eine heiße Schwefelquelle (heute Bad Abano), werfen; sie zeigten den höchsten Wert. – *Tiberius* zog 11 v. Chr. und 6 n. Chr. nach Illyrien und errang dort Siege. Oder bezieht sich das Orakel auf das Jahr 14 n. Chr., als *Tiberius* auf dem Weg nach Illyrien von Boten nach Nola zurückgeholt wurde, damit er zur Stelle sei, wenn *Augustus* stürbe? Das von den Astragali vorausgesagte Glück ist auf alle Fälle eingetroffen.

** *ὁ κύβος* (kybos) = *Wirbelknochen, Würfel.* Bei den Römern hieß der sechsseitig beschriftete Würfel *tessera* (griechisches Fremdwort, abgeleitet von *τέσσαρες* = vier), wohl weil jede Seite viereckig ist.

*** frag. 438 N. – *Pausanias* (110–180) berichtet in seinem *Führer durch Griechenland* (II 20, 3), daß *Palamedes* die Würfel im Heiligtum der *Tyche* zu Argos weihte.

Ein idealer Würfel hat für alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Für seine Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt also die nebenstehende Tabelle.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Da hier die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, und da sich der bedeutende französische Mathematiker *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827)* vor allem mit solchen Zufallsexperimenten befaßte, wollen wir künftig einen idealen Würfel auch **Laplace-Würfel** (oder **L-Würfel**) nennen.

c) Die Münze. Das einfachste und wohl älteste Zufallsgerät ist die Münze, die vor allem bei Entscheidungen zwischen 2 Alternativen verwendet wird, z. B. bei der Seitenwahl im Fußballspiel. Solche scheibenförmigen Körper waren die Würfel der Indianer. Die beiden Seiten einer Münze haben unterschiedliche Namen wie Adler, Wappen, Kopf, Bild, Zahl usw.** Wir wollen sie durch die Symbole 0 und 1 unterscheiden. Für eine ideale Münze, die wir auch **Laplace-Münze** (oder **L-Münze**) nennen wollen, gilt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	0	1
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Bild 48.1
Bayerischer Guldentaler, geprägt 1560 unter Herzog *Albrecht V.* in München – Nachprägung der Stadtsparkasse München, 1980

Wirft man die Münze mehrmals, so liegt ein mehrstufiges Zufallsexperiment vor. Bei n-fachem Wurf besteht der Ergebnisraum dann aus den 2^n n-Tupeln, die man aus den Zahlen 0 und 1 bilden kann. Bei einer Laplace-Münze nehmen wir an, daß diese 2^n Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind. Damit hat jedes dieser Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\dfrac{1}{2^n}$. Für den Fall $n = 3$ ergibt sich damit, wie Bild 26.1 veranschaulicht, die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	000	001	010	011	100	101	110	111
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

d) Das Glücksrad. Schon die griechische Glücksgöttin *Tyche* hatte ebenso wie die römische *Fortuna* ein Glücksrad als Attribut. Auf Jahrmärkten wurde einst genauso

* Siehe Seite 411.

** Die Griechen riefen »Nacht oder Tag« (νὺξ ἢ ἡμέρα), da sie eine schwarz-weiße Muschel verwendeten. Die Römer sagten »capita aut navia« (Kopf oder Schiff), weil der As auf der einen Seite einen doppelköpfigen Janus, auf der anderen einen Schiffsbug (oder -heck) zeigte. Die Franzosen rufen »pile ou face«.

wie heute bei Fernsehspielen das Glücksrad als Mittel zur Erzeugung zufälliger Ereignisse verwendet. Die einfachste Form ist eine in Sektoren eingeteilte Scheibe, über der sich ein Zeiger dreht oder die vor einem Zeiger gedreht wird (Figur 49.2). Soll ein Ergebnis a die Wahrscheinlichkeit p haben, so teilt man ihm einen Kreissektor zu, dessen Winkel $p \cdot 360°$ beträgt. Ein Beispiel zeigt Figur 49.3. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet:

ω	a	b	c	d
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

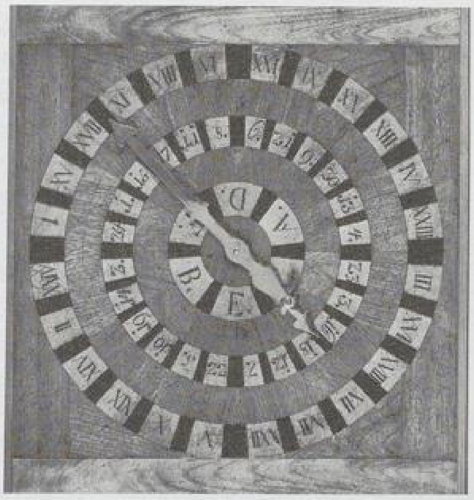

Bild 49.1 Glücksrad eines Spieltisches, Südwestdeutschland, 1780–1790. – Bayerisches Nationalmuseum

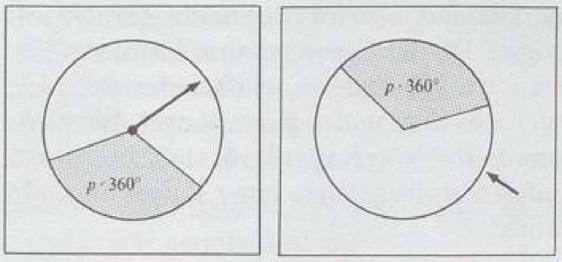

Fig. 49.2 Glücksräder

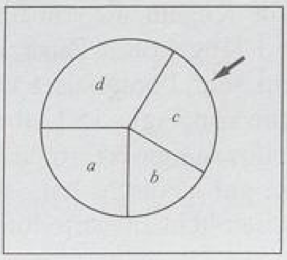

Fig. 49.3 Glücksrad mit 4 Ergebnissen

e) Das Roulett. Eine besondere Form des Glücksrades liegt beim Roulett vor. Die Kreisscheibe ist in 37 gleiche Sektoren aufgeteilt, der Zeiger durch eine rollende Kugel ersetzt.* Die Spielkasinos legen großen Wert darauf, daß die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, weil andernfalls routinierte Spieler aus den relativen Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeitsverteilung näherungsweise ermitteln und damit die Bank sprengen könnten. Ein ideales Roulett hat also folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	0	1	2	…	35	36
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$	…	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$

Aus dieser Verteilung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der Setzmöglichkeiten berechnen (vgl. dazu Seite 23). Im besonderen ergibt sich für die transversale pleine $\{16, 17, 18\}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{37} \approx 8{,}11\%$ und für das carre $\{4, 5, 7, 8\}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{37} \approx 10{,}81\%$, was mit den auf Seite 30 angegebenen relativen Häufigkeiten von 8,96% bzw. 10,69% recht gut übereinstimmt.

* Siehe Fußnote auf Seite 22.

Auf Grund der obigen Wahrscheinlichkeitsverteilung könnte man annehmen, daß man das 37fache seines Einsatzes von der Bank ausbezahlt bekommt, wenn die Zahl erscheint, auf die man gesetzt hat. In Wirklichkeit zahlt die Bank jedoch nur das 36fache des Einsatzes aus. In der Differenz liegt der Gewinn der Bank. Beim carré würde man eine Auszahlung von $\frac{37}{4}$ des Einsatzes erwarten; tatsächlich erhält man jedoch nur das $9(=\frac{36}{4})$fache des Einsatzes.

f) Die Urne*. In ein Gefäß, Urne genannt, wird eine Anzahl von Kugeln gegeben, die man durch Numerierung, Farbgebung oder andere Kennzeichen unterscheidet. Durch gründliches Mischen erreicht man, daß jede Kugel die gleiche Chance hat, gezogen zu werden. Man unterscheidet 2 Fälle. Beim *Ziehen mit Zurücklegen* wird jeweils eine bestimmte Anzahl von Kugeln gezogen und nach Feststellung ihrer Merkmale in die Urne zurückgegeben; der Urneninhalt bleibt also stets gleich. Beim *Ziehen ohne Zurücklegen* werden gewisse Anzahlen von Kugeln nacheinander gezogen und die gezogenen Kugeln nicht mehr zurückgelegt. Der Urneninhalt ändert sich nach jedem Zug. Das Ziehen ohne Zurücklegen kann auch durch gleichzeitige Entnahme mehrerer Kugeln ersetzt werden. Das bekannteste Beispiel für ein Urnenexperiment ist das Ziehen der Lottozahlen.** Die Urne enthält 49 Kugeln, die von 1 bis 49 numeriert sind. Es wird (wegen der Zusatzzahl) 7mal je 1 Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Da der Ergebnisraum für dieses Experiment sehr kompliziert ist, betrachten wir ein anderes, einfacheres Beispiel: Die Urne von Figur 15.1 enthält 4 rote, 3 schwarze und 1 grüne Kugel. Wir denken sie uns numeriert, so daß der Urneninhalt $\Omega = \{r1, r2, r3, r4, s1, s2, s3, g\}$ ist. Da man gut gemischt hat, ist es vernünftig, für das Ziehen einer Kugel folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung anzunehmen:

ω	r1	r2	r3	r4	s1	s2	s3	g
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Das Ereignis $R :=$ »Die gezogene Kugel ist rot« hat dann die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(R) &= P(\{r1, r2, r3, r4\}) = \\ &= P(\{r1\}) + P(\{r2\}) + P(\{r3\}) + P(\{r4\}) = \\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \\ &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man $P(S) = \frac{3}{8}$ und $P(G) = \frac{1}{8}$.
Interessiert man sich nur für die Farbe der gezogenen Kugel, so wird man als gröberen Ergebnisraum $\Omega_1 = \{r, s, g\}$ wählen. Auf ihm wird man dann folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 festlegen:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

* Siehe Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.
** Siehe Fußnote auf Seite 38.

g) Zufallszahlen. Die praktische Durchführung von umfangreichen Zufallsexperimenten ist zeitraubend und mühsam. Es liegt daher nahe, Maschinen heranzuziehen und durch sie Zufallsexperimente simulieren zu lassen. Da Maschinen aber (zumindest in erster Näherung) deterministisch arbeiten, muß man durch geeignete Manipulationen den Zufall auf den Maschinenablauf einwirken lassen. Dazu bedient man sich vielfach der sogenannten Zufallszahlen.
Die häufigste Form der Angabe von Zufallszahlen ist eine »zufällige« Folge der Ziffern 0, 1, 2, …, 9. Eine solche Folge kann auf sehr unterschiedliche Art und Weise erzeugt werden:

1) Durch Werfen eines regulären Ikosaeders, bei dem je zwei der 20 kongruenten Dreiecksflächen dieselbe Ziffer tragen. (Bild 46.1)

2) Durch Werfen von Laplace-Münzen, wobei man sich die Zahlen im Dualsystem dargestellt denkt. Zur Beschreibung der Ziffern 0, 1, …, 9 braucht man dann vier Münzenwürfe. Man ignoriert dabei Ergebnisse, die größere Zahlen als 9 liefern.

Die Serie	1000	1100	1001	0000	1011	0111	…
liefert	8	(12)	9	0	(11)	7	…

Die eingeklammerten Zahlen werden ausgelassen.

3) Durch Beobachtung geeigneter physikalischer Vorgänge, wie etwa des radioaktiven Zerfalls oder des Rauschens bei Elektronenröhren.

4) Durch kompliziertere Rechenvorschriften, die von Computern durchgeführt werden. Die so erzeugten Zufallszahlen heißen auch *Pseudozufallszahlen.*

»Gute« Zufallszifferntabellen müssen gewissen grundlegenden Bedingungen genügen. Wir nennen hier nur:

a) Die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ziffern sollten annähernd gleich sein: $h_n(0) \approx h_n(1) \approx \ldots \approx h_n(9) \approx \frac{1}{10}$.

b) Die relativen Häufigkeiten von Ziffernpaaren sollten annähernd gleich sein: $h_n(00) \approx h_n(01) \approx \ldots \approx h_n(99) \approx \frac{1}{100}$.

c) Analoge Bedingungen müssen Ziffertripel, Ziffernquadrupel, … erfüllen.

Die Ziffernfolge 01234567890123456789012345 67… erfüllt zwar die Bedingung **a)** sehr gut, nicht jedoch **b).** Es handelt sich also um eine schlechte Zufallsziffernfolge.
Die erste Tafel mit Zufallsziffern wurde 1927 von *L. H. C. Tippett** herausgegeben. Tabelle 51.1 stellt eine Zufallszifferntabelle dar. Wir benützen sie zur Simulation

* Siehe Seite 395.

29303	50239	68113	06637	71477	53278	77616	78451	36230	08744
41536	20293	43993	65405	59697	33598	24243	54559	12612	45753
82392	99099	10365	69655	89773	55477	72304	68448	06254	93337
08339	19494	25980	28251	38233	43304	27868	85128	39112	79556
96616	04710	08373	88895	22074	32739	62542	77638	74854	29157
94358	68251	17913	16911	76603	11509	11501	27659	03121	13064
32013	17227	12066	05395	50865	53147	27300	02028	74064	70668
73332	97384	33745	11844	30993	13119	45290	04112	85476	96622
76446	62235	67418	38514	98829	15874	18410	90854	14657	35810
36438	38361	52379	13231	69369	23736	38928	54449	14827	35610

Tab. 51.1 Zufallsziffern

des Zufallsexperiments »Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen« aus der in Abschnitt **f)** betrachteten Urne. Die Ziffern 0, 1, 2, 3 sollen den Zug einer roten Kugel bedeuten; die Ziffern 4, 5, 6 den einer schwarzen Kugel und schließlich die Ziffer 7 den Zug der grünen Kugel. Die Ziffern 8 und 9 werden ignoriert.
Unsere Tafel beginnt mit 2930350239 ...
Dadurch werden folgende Züge simuliert: r,–,r,r,r,s,r,r,r,–, ... Die Auswertung der ersten 100 brauchbaren Ziffern ergibt die Häufigkeitsverteilung

ω	r	s	g
$h_{100}(\{\omega\})$	0,49	0,39	0,12

Dies ist eine sehr gute Annäherung an die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 von Abschnitt **f)**:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	0,50	0,375	0,125

Mit Hilfe von Zufallsziffern lassen sich auch allgemeinere numerische Probleme der Mathematik lösen, indem man eine geeignete Simulation durchführt. Erst nachdem es mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen möglich wurde, große Zahlenmengen zu verarbeiten, gewannen solche Verfahren Bedeutung. Seit 1949 bezeichnet man sie auch als *Monte-Carlo-Methode*, als deren eigentliche Begründer der ungarische Mathematiker *John v. Neumann* (1903–1957)** und der polnische Mathematiker *Stanisław Marcin Ulam* (1909–1984)* gelten. Ein Vorläufer dieser Methode ist das Verfahren zur Bestimmung der Zahl π nach *Buffon* (1707–1788)*** das wir im Anhang I darstellen (siehe Seite 386).

Eine wichtige Anwendung der Monte-Carlo-Methode ist heute die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale, die als Flächen- oder Rauminhalt gedeutet werden können.
Als einfaches Beispiel betrachten wir den Viertelkreis um 0 mit dem Radius $r = 1$. Die Anzahl N der Gitterpunkte im Viertelkreis wird geschätzt durch die Anzahl $\hat{N}$ der Punkte $(x|y)$ mit $x^2 + y^2 < 1$, wobei x und y aus der Zufallsziffertabelle genommen werden.
Geht man ganz grob vor, so kann man etwa $x = 0,i$ und $y = 0,j$ setzen; i und j sind dabei jeweils aufeinanderfolgende Ziffern aus der Zufallsziffertabelle von Tabelle 51.1. Die ersten 50 Zufallsziffern ergeben die folgenden 25 Zufallspunkte, die in der nachstehenden Tabelle und in Figur 53.1 dargestellt sind.
Das ergibt als Schätzung $\hat{N} = \frac{22}{25} \cdot 100 = 88$. Der wirkliche Wert läßt sich hier noch leicht mit Hilfe von Figur 53.2 abzählen zu 86.
Eine grobe Schätzung des Inhalts des Viertelkreises erhält man durch das Verhältnis der Anzahl N der Gitterpunkte im Viertelkreis zur Anzahl aller solcher Gitterpunkte im Einheitsquadrat (hier 100).

$A_{\text{Viertelkreis}} \approx \frac{N}{100} \approx \frac{\hat{N}}{100} = 0{,}88.$

* Siehe Seite 395 ** Siehe Seite 416 *** Siehe Seite 401

x	y	$x^2 + y^2$	im Viertelkreis?
0,2	0,9	0,85	ja
0,3	0,0	0,09	ja
0,3	0,5	0,34	ja
0,0	0,2	0,04	ja
0,3	0,9	0,90	ja
0,6	0,8	1,00	nein
0,1	0,1	0,02	ja
0,3	0,0	0,09	ja
0,6	0,6	0,72	ja
0,3	0,7	0,58	ja
0,7	0,1	0,50	ja
0,4	0,7	0,65	ja
0,7	0,5	0,84	ja
0,3	0,2	0,13	ja
0,7	0,8	1,20	nein
0,7	0,7	0,98	ja
0,6	0,1	0,37	ja
0,6	0,7	0,85	ja
0,8	0,4	0,80	ja
0,5	0,1	0,26	ja
0,3	0,6	0,45	ja
0,2	0,3	0,13	ja
0,0	0,0	0,00	ja
0,8	0,7	1,20	nein
0,4	0,4	0,32	ja

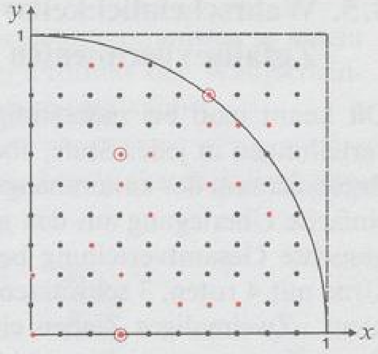

Fig. 53.1 Lage der 25 Zufallspunkte

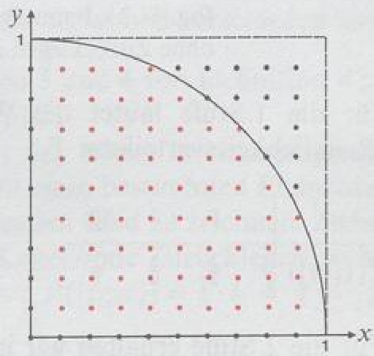

Fig. 53.2 Zehntelgitterpunkte im Viertelkreis

Die Schätzung von N läßt sich verbessern, wenn man die Anzahl der Zufallspunkte vermehrt, d.h. in der Zufallszifferntabelle weitergeht. Die Schätzung der Fläche des Viertelkreises kann man dadurch verbessern, daß man ein feineres Gitternetz zugrunde legt, indem man etwa 2 oder mehr Dezimalstellen für die Koordinaten der Gitterpunkte verwendet. Das Verfahren kann dann auch als ein Schätzverfahren für π verwendet werden.
Unsere sehr grobe Schätzung liefert
$\frac{r^2\pi}{4} = \frac{1^2 \cdot \pi}{4} \approx 0{,}88$ und damit $\pi \approx 3{,}52$.

Mit dem Zufallszifferngenerator eines Computers erzeugten wir einen »Zufallsregen« von 1000 Punkten auf das Einheitsquadrat. Davon fielen 776 in den Viertelkreis (Bild 53.3). Das ergibt $\frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi \approx \frac{776}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \approx 3{,}104$.

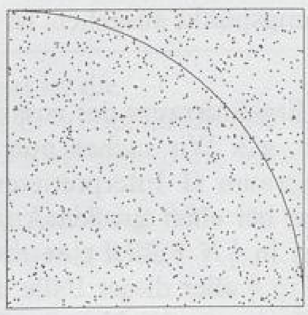
Bild 53.3 Computer-Graphik »Zufallsregen auf das Einheitsquadrat« zur angenäherten π-Bestimmung