Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

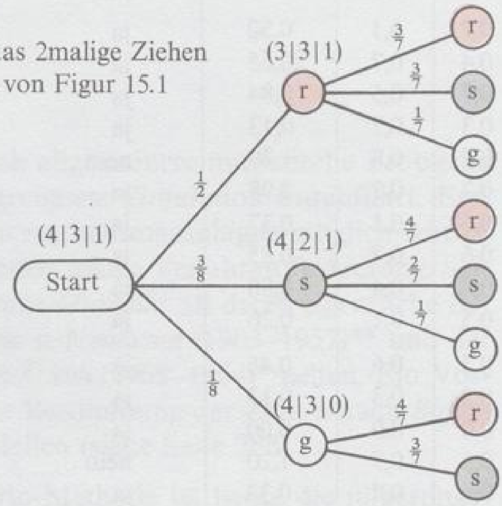
5. 5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

5.5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Oft kennt man bei mehrstufigen Zufallsexperimenten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in jeder Stufe, aber nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments. Man kann jedoch durch eine einfache Überlegung aus den gegebenen Verteilungen in den einzelnen Stufen die gesuchte Gesamtverteilung berechnen. Als Beispiel hierfür betrachten wir eine Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und 1 grünen Kugel (Figur 15.1) und das Experiment »Zweimaliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen«. Wir schreiben im Baumdiagramm von Figur 16.3 die Wahrscheinlichkeiten jeder Stufe auf die Äste und erhalten so Figur 54.2.

Fig. 54.2 Baumdiagramm für das 2malige Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne von Figur 15.1



Für die 1. Stufe lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1:

ω	r	s	g
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Für die 2. Stufe erhalten wir in Abhängigkeit vom Ergebnis des 1. Zuges, also der 1. Stufe des Experiments, 3 verschiedene Verteilungen:

ω	r	s	g
$P_r(\{\omega\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

ω	r	s	g
$P_s(\{\omega\})$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

ω	r	s
$P_g(\{\omega\})$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Man erkennt:

> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

Der Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments ist $\Omega = \{\text{rr, rs, rg, sr, ss, sg, gr, gs}\}$. Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung P für diesen Ergebnisraum Ω. Interpretieren wir die Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten bei einer großen Anzahl N von Versuchen, so erwarten wir, daß beim 1. Zug in $\frac{1}{2}N$ Fällen eine rote Kugel gezogen wird. Der darauf folgende 2. Zug wird in $\frac{3}{7}$ aller dieser Fälle, also in $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}N$ Fällen, wieder eine rote Kugel liefern. Es ist also vernünftig, das Produkt $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$ als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\text{rr}\}$ anzunehmen. Diese Überlegung* führt uns zur

* Einen Beweis ohne Rückgriff auf die Interpretationsregel bringen wir in **9.2.**

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.

Mit dieser 1. Pfadregel gewinnen wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung P folgende Werte:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P(\{\omega\})$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$

Da alle $P(\{\omega\}) \in [0; 1]$ sind und die Summe all dieser Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt, sind Forderung **1** und **2** von Definition 42.1 erfüllt. Legt man noch zusätzlich $P(\emptyset) := 0$ und $P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, die von $\emptyset$ verschieden sind, fest, dann erfüllt P auch die restlichen Forderungen **3** und **4** von Definition 42.1, also ist P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.
Hat ein Experiment mehrere Stufen, so wuchert der Baum in beängstigender Weise. Will man jedoch nur die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Elementarereignisses kennen, so genügt es, den dorthin führenden Pfad zu zeichnen. Ziehen wir z. B. aus der oben genannten Urne 4mal eine Kugel ohne Zurücklegen, so hat die Wahrscheinlichkeit für den Zug rgsr den Wert $P(\{\text{rgsr}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{140}$, wie Figur 55.1 zeigt.

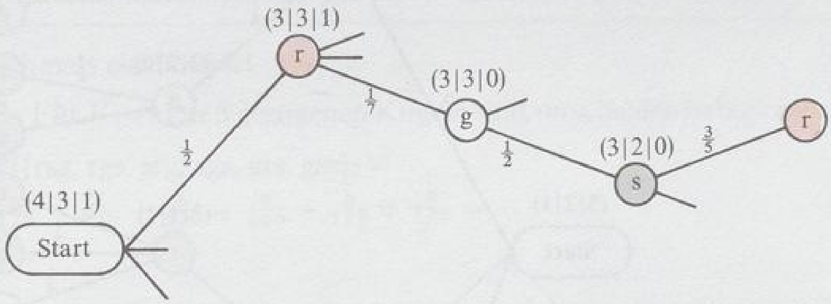


Fig. 55.1 Ausschnitt aus dem Baumdiagramm zum Experiment »4maliges Ziehen einer Kugel aus der Urne von Figur 15.1 ohne Zurücklegen«

Eine besonders wichtige Anwendung der 1. Pfadregel ist die
Drei-Mindestens-Aufgabe: Wie oft muß man einen L-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* einmal die Sechs fällt?

Lösung: $P(\text{»Bei } n \text{ Würfen mindestens 1mal die Sechs«}) \geqq 0{,}98$

$\Leftrightarrow$ $1 - P(\text{»Bei } n \text{ Würfen keinmal die Sechs«}) \geqq 0{,}98$

$\Leftrightarrow$ $1 - (\frac{5}{6})^n \geqq 0{,}98$ Siehe Figur 56.1.

$\Leftrightarrow$ $(\frac{5}{6})^n \leqq 0{,}02$ Da lg echt monoton steigend:

$\Leftrightarrow$ $n \cdot \lg \frac{5}{6} \leqq \lg 0{,}02$ $\quad \| : \lg \frac{5}{6} < 0$

$\Leftrightarrow$ $n \geqq \dfrac{\lg 0{,}02}{\lg \frac{5}{6}} = 21{,}4\ldots \quad \Rightarrow \quad n_{\min} = 22.$

Man muß also einen L-Würfel mindestens 22mal werfen, um mit einer Sicherheit von mindestens 98% mindestens einmal die Sechs zu erhalten.

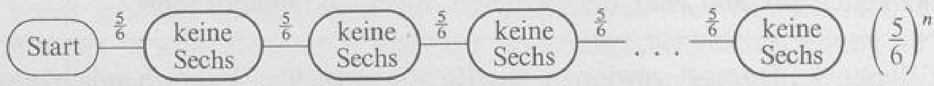


Fig. 56.1 Zur Drei-Mindestens-Aufgabe

Auf Grund der Eigenschaft **4** von Definition 42.1 können wir nun die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnen. Dazu betrachten wir das folgende

Beispiel 1: Eine Urne enthalte 3 rote, 2 schwarze und 1 grüne Kugel. Wir ziehen 3 Kugeln ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel rot? Anhand eines Baumdiagramms stellen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung fest (Figur 56.2).

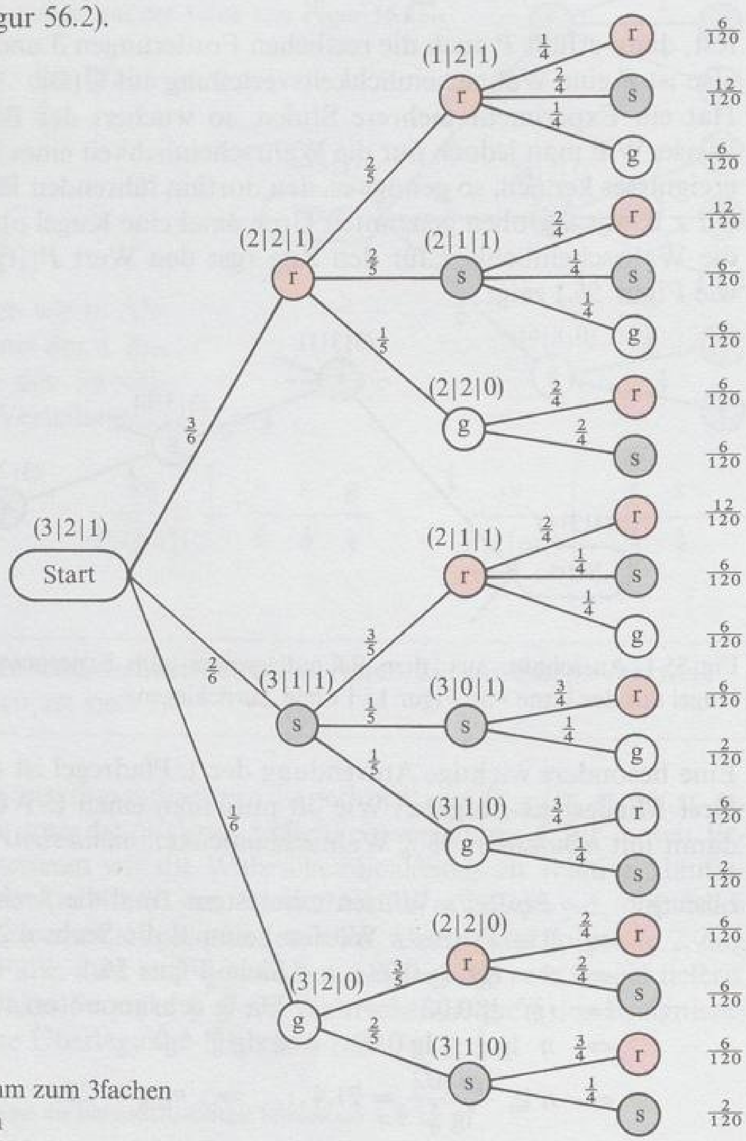


Fig. 56.2 Baumdiagramm zum 3fachen Ziehen ohne Zurücklegen

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit errechnet sich nun unter Verwendung von **4** aus Definition 42.1 zu

P(»3. gezogene Kugel ist rot«) =

$$= P(\{\text{rrr, rsr, rgr, srr, ssr, sgr, grr, gsr}\}) =$$
$$= P(\{\text{rrr}\}) + P(\{\text{rsr}\}) + P(\{\text{rgr}\}) + P(\{\text{srr}\}) + P(\{\text{ssr}\}) + P(\{\text{sgr}\}) +$$
$$+ P(\{\text{grr}\}) + P(\{\text{gsr}\}) =$$
$$= \tfrac{6}{120} + \tfrac{12}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{12}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} =$$
$$= \tfrac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die dritte gezogene Kugel rot ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die erste gezogene Kugel rot ist. Das ist zunächst verwunderlich. Man bedenke aber, daß man alle Möglichkeiten für die ersten beiden Züge berücksichtigen muß, die ja ganz beliebig ausfallen können!

Zusammenfassend halten wir fest, wie man Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit Hilfe eines Baumdiagramms berechnen kann. Jeder Pfad in einem Baum ist bekanntlich ein Elementarereignis des mehrstufigen Zufallsexperiments. Jedes Ereignis ist eine Vereinigungsmenge von Elementarereignissen, also eine Menge von Pfaden. Somit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe der

> **2. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die dieses Ereignis bilden.

Dafür nochmals ein Beispiel.

Beispiel 2: Für $V :=$ »Die 3 gezogenen Kugeln sind verschiedenfarbig« erhalten wir

$$P(V) = P(\{\text{rsg, rgs, srg, sgr, grs, gsr}\}) =$$
$$= \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} + \tfrac{6}{120} =$$
$$= \tfrac{3}{10}.$$

Aufgaben

Zu 5.1.

1. Was bedeutet

   a) $P(E_1 \cup E_2)$ • b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$ • c) $P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)$?

2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; $P(\{\omega_1\}) = 0{,}2$; $P(\{\omega_2\}) = 0{,}7$.
   Lege $P(\{\omega_3\})$ so fest, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ wird. Gib dann die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ an.

3. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$; $E_1 := \{\omega_1, \omega_2\}$; $E_2 := \{\omega_3\}$; $E_3 := \{\omega_4\}$;
   $P(E_1) = 0{,}2$; $P(E_2) = 0{,}5$; $P(E_3) = 0{,}5$.