Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

7. 1. Der Begriff der statischen Wahrscheinlichkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

7. Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

7.1. Der Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit

Wie wir in **4.1.** gesehen haben, scheint sich die relative Häufigkeit bestimmter Ereignisse bei einer großen Anzahl von Versuchen um einen festen Wert zu stabilisieren. Es liegt also nahe, diesen Wert als Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses zu nehmen. Damit kann Wahrscheinlichkeit nur für Ereignisse aus Zufallsexperimenten definiert werden, die beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden können. Subjektive Wahrscheinlichkeiten wie z. B. die in **5.1.** erwähnte können damit jedoch nicht erfaßt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erscheint bei diesem Vorgehen als eine physikalische Maßzahl, die über die relative Häufigkeit gemessen werden kann. Überlegungen dieser Art liegen der Definition der Wahrscheinlichkeit durch *Richard von Mises* (1883–1953)* zugrunde.
In *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* definierte *von Mises* 1919 für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A:

$$P(A) := \lim_{n \to +\infty} h_n(A),$$

wobei $h_n(A)$ die relative Häufigkeit des Eintretens von A nach n Versuchen ist. Die so festgelegte Zahl heißt auch **statistische Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A.

Die Definition der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* (nämlich *nach* dem Ausführen einer langen Reihe von Versuchen) als Grenzwert stieß auf theoretische Schwierigkeiten, da der Limesbegriff sich nicht auf eine vom Zufall beherrschte Folge anwenden ließ. Es ist zum Beispiel nicht möglich, zu einem vorgegebenen ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ anzugeben, so daß $|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ für *alle* $n > n_0$ ist. Es ist nämlich nicht auszuschließen, daß auch für sehr großes n die relative Häufigkeit $h_n(A)$ sich immer wieder einmal um mehr als ε von dem »Grenzwert« $P(A)$ unterscheidet. Wählt man z. B. für den 800fachen Münzenwurf nach Tabelle 11.1 für $\varepsilon = 1\%$, dann könnte man nach etwa $n_0 = 500$ Würfen zu der Meinung kommen, daß die relativen Häufigkeiten den ε-Streifen um den »Grenzwert« 50% nicht mehr verlassen werden. Für $n = 650$ erhält man jedoch h_{650}(»Adler«) $= 51{,}4\%$, weil zwischen 525 und 650 Würfen »Adler« sehr viel häufiger eintrat als »Zahl«. (Vergleiche dazu Figur 71.1.) Es gilt ja auch für jedes noch so große n, daß die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A jeden der $n+1$ Werte $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ annehmen kann, wenn auch Figur 34.1 zeigt, daß eine gewisse »Konzentration« der relativen Häufigkeiten mit wachsendem n zu beobachten ist.

Ein ganz anderer Weg zur Definition der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A entsprang aus Überlegungen zu Glücksspielen.

* Biographische Einzelheiten über die in diesem Abschnitt erwähnten Mathematiker findet man auf Seite 394ff.

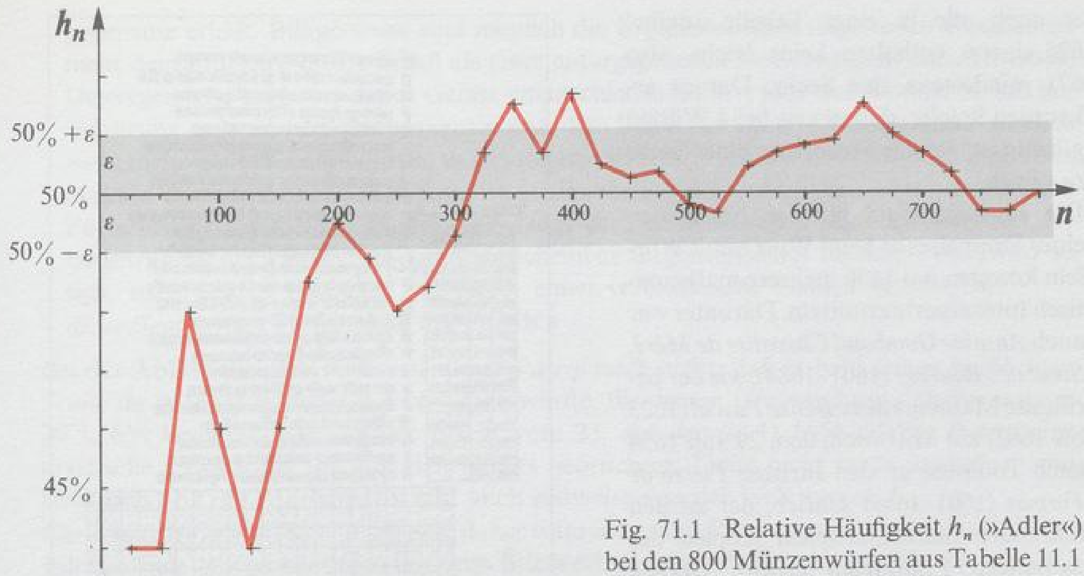

Fig. 71.1 Relative Häufigkeit h_n (»Adler«) bei den 800 Münzenwürfen aus Tabelle 11.1

7.2. Entwicklung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Der berühmte Arzt *Geronimo Cardano* (1501–1576) notierte als leidenschaftlicher Spieler seine Erfahrungen und faßte sie wohl um 1563 in seinem *Liber de ludo aleae** – »Über das Glücksspiel« – zusammen, dem ältesten Buch, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet ist. Gedruckt wurde es aber erst 1663, als es längst überholt war. In Kapitel IX behauptet er, daß man darauf setzen könne, daß nach spätestens 3 Würfen mit einem Würfel die Sechs erscheine. Seine Argumentation lautet, in unsere Termini übersetzt: Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs ist $\frac{1}{6}$, also könne man nach 3 Würfen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten, daß die Sechs auftrete. Ebenso schließt er in Kapitel XI, daß mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beim Werfen zweier Würfel die Doppelsechs nach 18 Würfen mindestens einmal auftrete. Da sich nun 3 zu 18 wie 6 zu 36 verhält, schloß man wohl später daraus auf einen allgemeinen *Lehrsatz*, daß sich die kritischen Wurfzahlen, ab denen es günstig ist, darauf zu wetten, daß ein Elementarereignis eintritt, sich wie die Mächtigkeiten der zugehörigen Ergebnisräume verhalten.
Den Ergebnisraum für 3 Würfel zu finden, war schon früh gelungen. *Richard de Fournival* (1201–1260), dem Kanzler der Kathedrale von Amiens, wird das Gedicht *De Vetula* zugeschrieben, in dem die 216 möglichen Ergebnisse richtig hergeleitet werden. (Vgl. Bild 72.1 mit seiner schönen, aber fehlerhaften Darstellung der 56 Augenzahlkombinationen.)
Cardano bemerkt in Kapitel XIV seinen Fehler: Da 125 der möglichen 216 Ergebnisse keine Sechs und nur die restlichen 91 mindestens eine Sechs enthalten, ist es noch nicht günstig, bei 3 Würfen auf das Erscheinen einer Sechs zu setzen.
1559 behandelt der Mönch *Jean Buteo* (1492–1572) in seiner *Logistica* (ed. 1560) Kombinationsschlösser und zeigt,

»was bisher noch niemand angepackt hat«,

daß sich die Zahlen von 1 bis 6 auf genau $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Arten kombinieren lassen, die

* *alea* bezeichnet zunächst den Würfel als Spielgerät, unabhängig von seiner Gestalt, ist also gewissermaßen ein Oberbegriff zu *astragalus* und *tessera* (siehe Seite 46). Es bedeutet aber auch das Glücksspiel und schließlich allgemein den blinden Zufall.