Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

7. 2. Entwicklung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

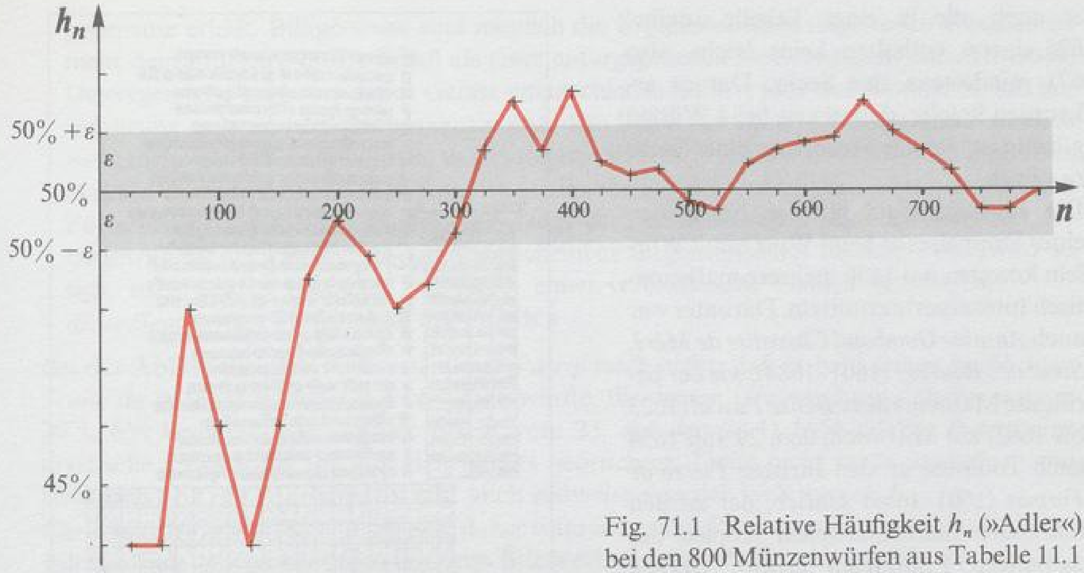


Fig. 71.1 Relative Häufigkeit h_n (»Adler«) bei den 800 Münzenwürfen aus Tabelle 11.1

7.2. Entwicklung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Der berühmte Arzt *Geronimo Cardano* (1501–1576) notierte als leidenschaftlicher Spieler seine Erfahrungen und faßte sie wohl um 1563 in seinem *Liber de ludo aleae** – »Über das Glücksspiel« – zusammen, dem ältesten Buch, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet ist. Gedruckt wurde es aber erst 1663, als es längst überholt war. In Kapitel IX behauptet er, daß man darauf setzen könne, daß nach spätestens 3 Würfen mit einem Würfel die Sechs erscheine. Seine Argumentation lautet, in unsere Termini übersetzt: Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs ist $\frac{1}{6}$, also könne man nach 3 Würfen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten, daß die Sechs auftrete. Ebenso schließt er in Kapitel XI, daß mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beim Werfen zweier Würfel die Doppelsechs nach 18 Würfen mindestens einmal auftrete. Da sich nun 3 zu 18 wie 6 zu 36 verhält, schloß man wohl später daraus auf einen allgemeinen *Lehrsatz*, daß sich die kritischen Wurfzahlen, ab denen es günstig ist, darauf zu wetten, daß ein Elementarereignis eintritt, sich wie die Mächtigkeiten der zugehörigen Ergebnisräume verhalten.
Den Ergebnisraum für 3 Würfel zu finden, war schon früh gelungen. *Richard de Fournival* (1201–1260), dem Kanzler der Kathedrale von Amiens, wird das Gedicht *De Vetula* zugeschrieben, in dem die 216 möglichen Ergebnisse richtig hergeleitet werden. (Vgl. Bild 72.1 mit seiner schönen, aber fehlerhaften Darstellung der 56 Augenzahlkombinationen.)
Cardano bemerkt in Kapitel XIV seinen Fehler: Da 125 der möglichen 216 Ergebnisse keine Sechs und nur die restlichen 91 mindestens eine Sechs enthalten, ist es noch nicht günstig, bei 3 Würfen auf das Erscheinen einer Sechs zu setzen.
1559 behandelt der Mönch *Jean Buteo* (1492–1572) in seiner *Logistica* (ed. 1560) Kombinationsschlösser und zeigt,

»was bisher noch niemand angepackt hat«,

daß sich die Zahlen von 1 bis 6 auf genau $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Arten kombinieren lassen, die

* *alea* bezeichnet zunächst den Würfel als Spielgerät, unabhängig von seiner Gestalt, ist also gewissermaßen ein Oberbegriff zu *astragalus* und *tessera* (siehe Seite 46). Es bedeutet aber auch das Glücksspiel und schließlich allgemein den blinden Zufall.

er auch alle in einer Tabelle angibt! 625 davon enthalten keine Sechs, also 671 mindestens eine Sechs. Daraus erkannten Spieler, daß es erst bei 4 Würfen günstig ist, auf das Erscheinen einer Sechs zu setzen.
Die kritische Zahl für das Erscheinen einer Doppelsechs beim Wurf mit 2 Würfeln konnten um 1650 mehrere mathematisch Interessierte ermitteln. Darunter war auch *Antoine Gombaud Chevalier de Méré, Sieur des Baussay* (1607–1684), wie der berühmte Mathematiker *Blaise Pascal* (1623 bis 1662) am Mittwoch, dem 29. Juli 1654 nach Toulouse an den Juristen *Pierre de Fermat* (1601–1665) schrieb, der zu den führenden mathematischen Köpfen des damaligen Frankreich gehört. Gerade wegen seiner Erkenntnis war *de Méré* aber mehr als unzufrieden mit der Mathematik! Lesen wir *Pascal*s Brief:

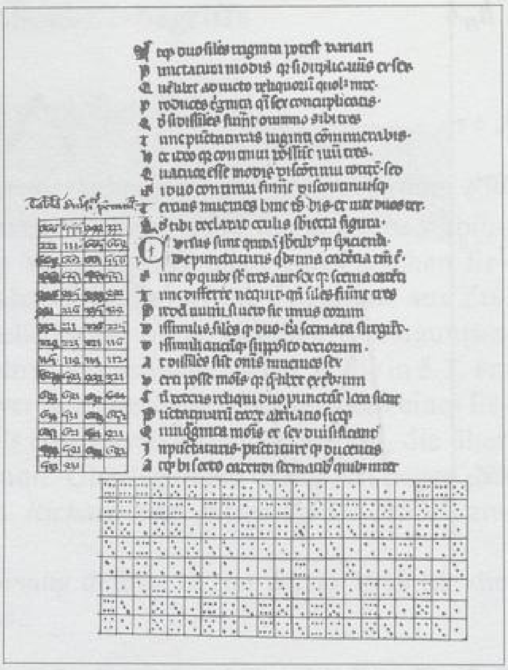


Bild 72.1 Ergebnisraum und Kombinationen beim Wurf dreier Würfel aus dem Gedicht *De Vetula* des *Richard de Fournival* (?) (1201 bis 1260). In den beiden letzten Zeilen steht *ducentis atque bis octo.* – Handschrift des 14. Jh.s. (Harleian Ms. 5263 – British Museum)

> »Er sagte mir nämlich, daß er aus folgendem Grund einen Fehler in den Zahlen gefunden habe:
> Will man eine Sechs mit einem Würfel erzielen, so ist es vorteilhaft, 4 Würfe zu tun, und zwar 671 zu 625.
> Will man eine Doppelsechs mit 2 Würfeln erzielen, so ist es nachteilig, 24 Würfe zu tun.
> Und nichtsdestotrotz verhält sich 24 zu 36 (was die Anzahl der Ergebnisse bei 2 Würfeln ist) wie 4 zu 6 (was die Anzahl der Ergebnisse eines Würfels ist).
> Hier haben Sie sein großes Ärgernis, das ihn ausrufen ließ, daß die Lehrsätze nicht sicher seien, und –
>
> *que l'Arithmetique se dementoit*
>
> – daß die Arithmetik sich widerspreche. Aber Sie werden mit Leichtigkeit mittels Ihrer Verfahren die Ursache dieses Widerspruchs erkennen.«

Im selben Brief beschäftigt sich aber *Pascal* noch mit einer weiteren, weitaus bedeutenderen Aufgabe, die ihm *de Méré* bereits früher vorgelegt hatte und die dieser nicht lösen konnte. Es handelt sich um die gerechte Verteilung des Einsatzes bei vorzeitig abgebrochenem Spiel, dem problème des partis, also um die alte Aufgabe von *Luca Pacioli* (siehe Aufgabe 18/**10**). Hierüber entwickelte sich ein reger Briefwechsel zwischen *Pascal* und *Fermat*, in dem beide das problème des partis lösen. *Fermat*s Lösungsweg, basierend auf kombinatorischen Überlegungen – ähnlich unseren Baumdiagrammen –, kann auf den Fall mehrerer Spieler verallgemeinert werden. Bereits im Frühjahr 1654 hatte *Pascal* in einer lateinisch geschriebenen Adresse der »Erlauchten Pariser Akademie der Mathematik« seine Pläne angekündigt, darunter

> »eine völlig neue Abhandlung über ein bis heute absolut unerforschtes Gebiet, nämlich die Aufteilung der Chancen in Spielen, die dem Zufall unterworfen sind. [...] Und gerade hier muß man um so mehr durch Rechnung untersuchen, je weniger man Aufschluß durch Ex-

perimente erhält. Billigerweise sind nämlich die Ergebnisse eines ungewissen Geschehens mehr dem Eintreten durch Zufall als einer naturgegebenen Notwendigkeit zuzuschreiben. Deswegen irrte bis heute dieses Gebiet unentschieden umher; jetzt aber konnte es, das der Erfahrung gegenüber so widerspenstig war, dem Reich des klaren Denkens und Rechnens nicht mehr entfliehen. Wir haben es mit solcher Sicherheit mittels der Mathematik zu einer exakten Wissenschaft gemacht, daß diese, teilhabend an der Genauigkeit jener, schon kühne Fortschritte macht; sie verbindet die Strenge der mathematischen Beweisführung mit der Ungewißheit des Zufalls, wodurch sie scheinbar Gegensätzliches vereinigt, und wird so sich, nach beiden nennend, mit Recht einen verblüffenden Namen verschaffen: *aleae Geometria* – Mathematik des Zufalls.«

Bei der Abfassung dieser Adresse ahnte *Pascal* noch nicht, daß er bald seinen berühmten *Traité du triangle arithmétique* verfassen würde, für dessen Übersendung sich *Fermat* am 29.8.1654 bedankt. Aber in der Nacht vom 23. auf den 24.11.1654 erlebte *Pascal* eine mystische Erweckung; er läßt den bereits gedruckten *Traité* nicht mehr ausliefern und zieht sich von der Mathematik und auch zeitweise von der Welt zurück.*
Christiaan Huygens (1629–1695) hört daher während seines Pariser Studienaufenthalts (Mitte Juli bis Ende November 1655) nur vom Briefwechsel zwischen *Pascal* und *Fermat*.

»Diese hielten jede ihrer Methoden so sehr geheim, daß ich die gesamte Materie von den Anfangsgründen an selbst entwickeln mußte.«

So steht es im Brief vom 27.4.1657 an seinen Lehrer *Frans van Schooten* (um 1615–1660), der als Einleitung zu seinem *Tractaet handelende van Reeckening in Speelen van Geluck* dient. *Huygens* geht dabei über *Pascal* und *Fermat* hinaus; denn mit dem von ihm geschaffenen Begriff der »mathematischen Erwartung« legt er den Grundstein für eine allgemeine Behandlung wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufgaben**. Er beweist einige einfache Sätze über die Erwartung und löst mit ihrer Hilfe das problème des partis für einige einfache Sonderfälle – bleibt also hinter *Pascals* allgemeiner Lösung aus dem *Traité du triangle arithmétique* zurück – und andere Aufgaben über teilweise recht komplizierte Spiele.
Van Schooten übersetzte diesen Traktat ins Lateinische und fügte ihn 1657 unter dem Titel *Tractatus de Ratiociniis in Aleae Ludo* seinem eigenen Werk *Exercitationum Mathematicarum Libri Quinque* an, das 1660 auch auf holländisch erschien. Welche Bedeutung *Huygens* diesem neuen mathematischen Gebiet zumißt, geht aus seinem Einleitungsbrief hervor:

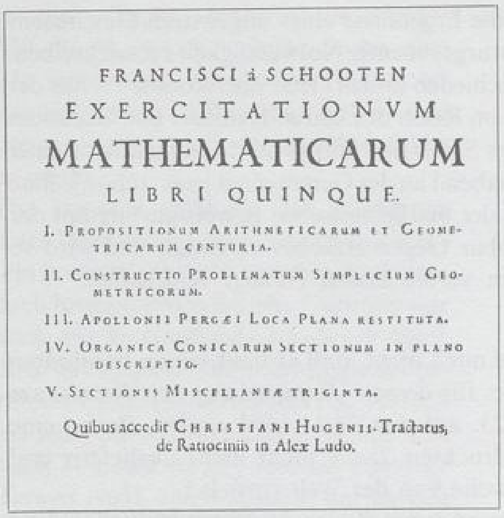
»Ich zweifle auf keinen Fall, daß derjenige, der tiefer das von uns Dargebotene zu untersuchen beginnt, sofort entdecken wird, daß es hier nicht, wie es scheint, um Spiel und Kurzweil geht, sondern daß die Grundlagen für eine schöne und überaus tiefe Theorie entwickelt werden«.***

Für ein halbes Jahrhundert blieb *Huygens*' Abhandlung *das* Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Huygens* beschloß seine Arbeit mit 5 Problemen – zwei davon stammten von *Fermat*, eines von *Pascal* –, ohne die Lösungen mitzuteilen,

»weil diese viel zuviel Arbeit erfordert hätten, wenn ich sie gründlich ausgeführt hätte, aber auch, damit diese unseren Lesern, so es welche geben wird, als Übung und [so fügt er im Holländischen hinzu] als Zeitvertreib dienen mögen.«

Die einzige Teillösung, die 1687 veröffentlicht wurde, stammt höchstwahrscheinlich von dem Philosophen *Baruch Spinoza* (1632–1677). Die Wahrscheinlichkeitsrechnung schien zu stag-

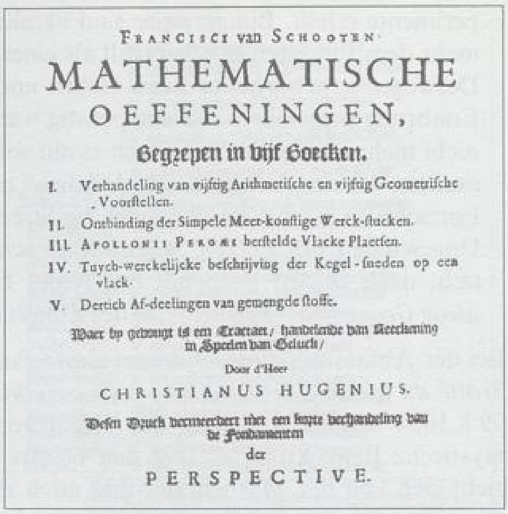
* Der *Traité du triangle arithmétique* erschien erst posthum 1665.
** »Erwartung« klingt bereits bei *Cardano* an und ist ein zentraler Begriff in *Pascals Infini-rien* (siehe Seite 343).
*** Quanquam, si quis penitius ea quae tradimus examinare caeperit, non dubito quin continuo reperturus sit, rem non, ut videtur, ludicram agi, sed pulchrae subtilissimaeque contemplationis fundamenta explicari.



FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. PROPOSITIONUM ARITHMETICARUM ET GEOMETRICARUM CENTURIA.
II. CONSTRUCTIO PROBLEMATUM SIMPLICIUM GEOMETRICORUM.
III. APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.
IV. ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIO.
V. SECTIONES MISCELLANEÆ TRIGINTA.

Quibus accedit CHRISTIANI HUGENII Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.



FRANCISCI van SCHOOTEN
MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,
Begrepen in vijf Boecken.

I. Verhandeling van vijftig Arithmetische en vijftig Geometrische Voorstellen.
II. Ontbinding der Simpele Meer-konstige Werck-stucken.
III. APOLLONII PERGÆI herstelde Vlacke Plaetsen.
IV. Tuych-werckelijcke beschrijving der Kegel-sneden op een vlack.
V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe.

Waer by gevoegt is een Tractaet / handelende van Reeckening in Speelen van Geluck /

Door d'Heer
CHRISTIANUS HUGENIUS.

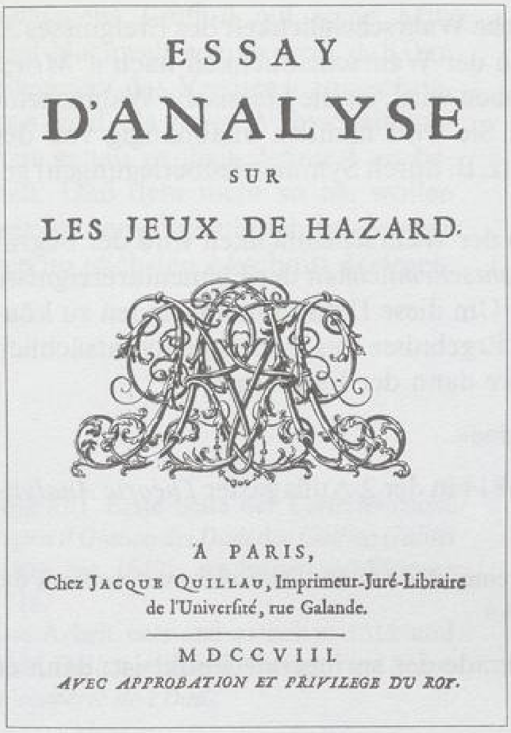
Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten
der
PERSPECTIVE.

Bild 74.1 Titelblatt der lateinischen bzw. der holländischen Ausgabe der *Mathematischen Übungen* des *Frans van Schooten*, denen *Huygens'* berühmter *Traktat über Berechnungen bei Glücksspielen* angefügt wurde.

nieren. Auch *Jakob Bernoulli* (1655–1705), der sich ab 1684 mit *Huygens'* Arbeit beschäftigte, erhielt auf seine im *Journal des Sçavans* am 26.8.1685 gestellte Aufgabe keine Lösung zugesandt.* *Bernoulli* übernimmt *Huygens'* Abhandlung als 1. Teil seiner *Ars conjectandi*, versieht sie mit Kommentaren, entwickelt neue Methoden und löst damit u.a. die 5 Probleme. Aber der Titel *Ars conjectandi*, zu deutsch *Mutmaßungskunst*, zeigt den neuen Standpunkt. Es geht nicht mehr nur um Spiele. Spiele kann man lassen, aber Mutmaßen ist eine unentbehrliche Tätigkeit; denn alle Entscheidungen und alle Strategien gründen sich auf Mutmaßungen. *Jakob Bernoulli* hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Odium befreit, nur eine Lehre von den Chancen im Glücksspiel zu sein. Ehe er jedoch den entscheidenden 4. Teil, die »*Anwendung* [der Wahrscheinlichkeitslehre] *auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse*« ausbauen konnte, ereilte ihn 1705 der Tod. Die erfolgreichen neuen Lösungen *Bernoullis* wurden in den Nachrufen gerühmt. Dies gab *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) den Mut, Probleme über Glücksspiele anzugehen. 1708 veröffentlichte er anonym den *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Gründliche Literaturkenntnis und eigene Forschungen stecken in diesem Werk. Gegenüber *Huygens*, der sämtliche seiner Aufgaben nur mit *einer* Methode löste, stellt der *Essay* eine bedeutende Erweiterung des lösbaren Aufgabenbereichs dar. Die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verlief dann fast wettbewerbsartig zwischen *Abraham de Moivre* (1667–1754) mit seiner *De Mensura Sortis, seu, De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus* von 1711**, *de Montmort* mit der wesentlich verbesserten 2. Auflage des *Essay* (1713) und *Nikolaus I. Bernoulli* (1687–1759), der endlich 1713 die *Ars Conjectandi* seines Onkels herausgab. 1718 publizierte *de Moivre* dann *The Doctrine of Chances: Or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, eine erweiterte englische Fassung von *De Mensura Sortis*.
Wir überspringen den Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 18. Jahrhundert.

* »A und B spielen mit einem Würfel unter der Bedingung, daß derjenige gewonnen habe, der als erster ein As wirft. Zuerst wirft A, dann B; darauf wirft A zweimal, dann B zweimal […] usw. Oder: A wirft einmal, dann B zweimal, dann A dreimal, dann B viermal, bis schließlich einer gewinnt. Gefragt wird nach dem Verhältnis ihrer Chancen.« *Bernoulli* veröffentlicht 1690 eine Lösung ohne Beweis; dabei wird zum ersten Mal in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine unendliche Reihe benützt. Wenig später veröffentlicht *Leibniz* dasselbe Resultat, ebenso ohne Beweis.

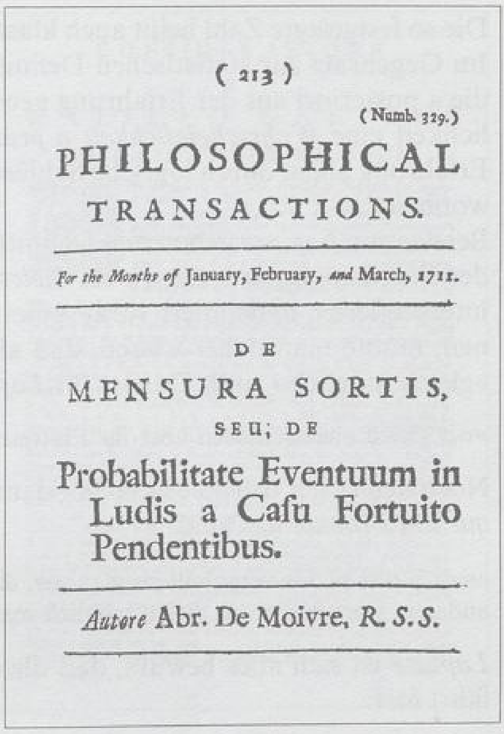
** *De Moivre* bewies darin u.a., daß der »Proportionalitätssatz« für die kritischen Wurfzahlen asymptotisch gilt. Ist nämlich $|\Omega|$ groß, so gilt für die kritische Wurfzahl: $n \geqq (|\Omega| - 1) \ln 2$, was zu $|\Omega| \cdot \ln 2$ vergröbert werden kann.



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.

MDCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



(213)
(Numb. 329.)
PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, *and* March, 1711.

DE
MENSURA SORTIS,
SEU; DE
Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, R. S. S.

Bild 75.1 Titelblatt des 1708 anonym erschienen *Essay* des *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) und erste Seite der *Philosophical Transactions* für die Monate Januar, Februar und März des Jahres 1711 mit der *De mensura sortis* des *Abraham de Moivre* (1667–1754), R.S.S. (= Regiae Societatis Sodali), die erst 1712 erschienen.

7.3. Die Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit durch *Laplace*

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827) brachte im Jahre 1812 mit seiner *Théorie Analytique des Probabilités* die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem vorläufigen Abschluß.

»La théorie des probabilités consiste à reduire tous les événemens qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles.«

Übersetzen wir dies in unsere moderne Sprechweise, so besteht also die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeiten darin, einen Ergebnisraum Ω zu bestimmen, dessen Elemente alle gleich möglich sind. *Günstig* für ein Ereignis A heißen all die Ergebnisse ω, deren Auftreten A zur Folge hat, für die also $\omega \in A$ gilt. Damit definierte *Laplace* als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A den Quotienten

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse, sofern sie gleich möglich sind}}.$$