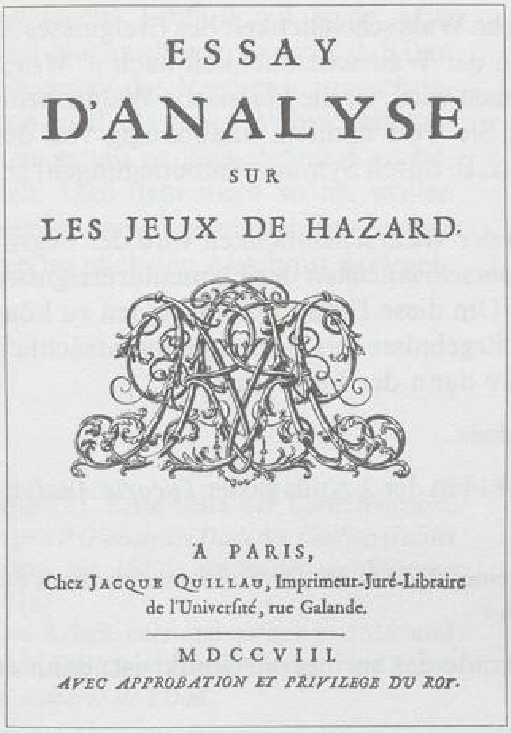
Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

7. 3. Die Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit durch Laplace

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580



ESSAY

D'ANALYSE

SUR

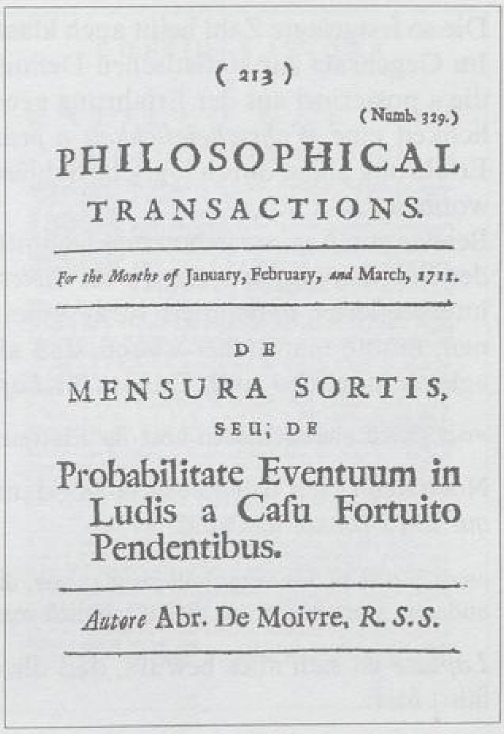
LES JEUX DE HAZARD.

A PARIS,

Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande.

MDCCVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



(213)

(Numb. 329.)

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, *and* March, 1711.

DE

MENSURA SORTIS,

SEU; DE

Probabilitate Eventuum in Ludis a Caſu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, *R. S. S.*

Bild 75.1 Titelblatt des 1708 anonym erschienen *Essay* des *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) und erste Seite der *Philosophical Transactions* für die Monate Januar, Februar und März des Jahres 1711 mit der *De mensura sortis* des *Abraham de Moivre* (1667–1754), R.S.S. (= Regiae Societatis Sodali), die erst 1712 erschienen.

7.3. Die Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit durch *Laplace*

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827) brachte im Jahre 1812 mit seiner *Théorie Analytique des Probabilités* die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem vorläufigen Abschluß.

»La théorie des probabilités consiste à reduire tous les événemens qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles.«

Übersetzen wir dies in unsere moderne Sprechweise, so besteht also die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeiten darin, einen Ergebnisraum Ω zu bestimmen, dessen Elemente alle gleich möglich sind. *Günstig* für ein Ereignis A heißen all die Ergebnisse ω, deren Auftreten A zur Folge hat, für die also $\omega \in A$ gilt. Damit definierte *Laplace* als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A den Quotienten

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse, sofern sie gleich möglich sind}}.$$

Die so festgelegte Zahl heißt auch **klassische Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses *A*. Im Gegensatz zur statistischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach *v. Mises*, die a posteriori aus der Erfahrung gewonnen wird, ist die klassische Wahrscheinlichkeit eine *Wahrscheinlichkeit a priori.* Sie wird nämlich unabhängig von der Erfahrung allein durch logische Schlüsse (z. B. durch Symmetrieüberlegungen) gewonnen.

Bei der von *Laplace* gebotenen Definition der Wahrscheinlichkeit wird der Begriff der *Gleichmöglichkeit*, die wir als *Gleichwahrscheinlichkeit* der Elementarereignisse interpretieren, undefiniert vorausgesetzt. Um diese Definition anwenden zu können, müßte man daher wissen, daß alle Ergebnisse des Experiments tatsächlich »gleich möglich« sind. Das ist für *Laplace* dann der Fall, wenn

»wir gleich unentschieden über ihr Eintreten sind«.

Noch deutlicher drückt es *Laplace* dann 1814 in der 2. Auflage der *Théorie Analytique des Probabilités* aus:

»sofern uns nichts veranlaßt zu glauben, daß einer der Fälle leichter eintreten muß als die anderen, was sie für uns gleich möglich macht.«

Laplace ist sich aber bewußt, daß dies gerade der springende Punkt ist; denn er fährt fort:

»Die richtige Einschätzung dieser verschiedenen Fälle ist einer der heikelsten Punkte in der Analyse des Zufallsgeschehens.«*

Für *Laplace* war Wahrscheinlichkeit nur ein Notbehelf des Menschen in unübersichtlichen Situationen und nicht – wie heute allgemein angenommen – eine objektive Eigenschaft des Naturgeschehens.

Wie schwierig das Erkennen der Gleichwahrscheinlichkeit ist, zeigt folgendes Problem. Glücksspieler beobachteten, daß die Augensumme 10 beim gleichzeitigen Wurf dreier Würfel häufiger auftrat als die Augensumme 9, obwohl ihrer Ansicht nach diese Augensummen gleichwertig sein sollten, da es für 10 die 6 Zerlegungen 1|3|6, 1|4|5, 2|2|6, 2|3|5, 2|4|4 und 3|3|4 und für 9 ebenfalls 6 Zerlegungen, nämlich 1|2|6, 1|3|5, 1|4|4, 2|2|5, 2|3|4 und 3|3|3 gibt. *Galileo Galilei* (1564–1642) klärte in seiner *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi* (erschienen 1718) den Fehlschluß auf, indem er zeigte, daß Zerlegungen nicht als gleich mögliche Ergebnisse genommen werden können, da z. B. 2|3|4 sechsmal so häufig wie 3|3|3 ist.

Aber nicht nur Glücksspieler irrten sich. Schrieb doch selbst *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) am 22. 3. 1714 an *Louis Bourguet* (1678–1742),

»daß es ebenso leicht sei, mit 2 Würfeln die Augensumme 12 wie die Augensumme 11 zu erreichen, weil beide nur auf eine Art zustande kämen, daß die 7 hingegen 3mal leichter zu erhalten sei.«**

* ... »la probabilité d'un événement, est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables, au nombre de tous les cas possibles; lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.«

** Häufigkeiten von Augensummen stellten wohl schon immer ein Problem dar. Überraschenderweise berechnet

*Laplace*ns Einfluß auf seine Mit- und Nachwelt war so groß, daß ihm allgemein das Verdienst zugeschrieben wird, als erster Wahrscheinlichkeit genau explizit definiert zu haben. Daß dem nicht so ist, wollen wir für den geschichtlich Interessierten im nächsten Abschnitt darlegen.

CONSIDERAZIONE
DI
GALILEO GALILEI
SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

CHe nel giuoco de i dadi, alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorche il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'egual uso dovriano esser reputati; si vede nondimeno, che la lunga osservazione ha fatto da i giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10. e l'11. che il 9. e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocchè il 9. si compone con 1. 2. 6., 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1. 3. 6., 1. 4. 5., 2. 2. 6., 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur son 6. combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con speranza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza, che io possa al mio fine, comincio a considerare, come essendo un dado terminato da 6. faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi: sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse: onde è manifesto tali combinazioni esser 6. volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte delli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi essere 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di tre dadi non sono se non 16. cioè 3. 4. 5. fino a 18. tra i quali si hanno a compartire le dette 216. scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne toc-

H 4 chi-

Bild 77.1 Erste Seite der *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi* des *Galileo Galilei* (1564 bis 1642), erschienen in Florenz 1718.
Die Arbeit entstand zwischen 1613 und 1623. *Galilei* selbst gab ihr den Titel *Sopra le scoperte de i Dadi.*

7.4. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff vor *Laplace*

Unausgesprochen taucht der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff schon bei *Geronimo Cardano* (1501–1576) in Cap. XIV seines *Liber de ludo aleae* (um 1563) auf, wenn er die Regel aufstellt, daß die Einsätze im Verhältnis der Zahl der Fälle, bei denen ein Ereignis eintreten kann, zur Zahl der restlichen Fälle geleistet werden sollen, damit man unter gleicher Bedingung kämpfen könne. Die Gleichmöglichkeit dieser Fälle spricht er an, wenn er in Cap. IX bereits sagt, daß eine solche Regel nur gelte,

»si alea sit iusta« – »wenn der Würfel in Ordnung ist«.

Die Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Fälle spricht *Galilei* bei der Lösung des oben zitierten Problems deutlich an; legt er doch seinen Überlegungen zugrunde (siehe Bild 77.1, Zeile 14 v. u.)

»un dado terminato da 6 faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi«
– »einen 6seitigen Würfel, der, einmal geworfen, auf jeder seiner Flächen unterschiedslos zu liegen kommen kann«.

Auch *Pascal* und *Fermat* arbeiten mit dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, ohne ihn explizite zu definieren. *Pascal* hält am 24. 8. 1654 in einem Brief an *Fermat* fest, daß die Aufteilung des Einsatzes

Richard de Fournival (?) (1201–1260) die Häufigkeiten der Augensummen für 3 Würfel richtig in seinem Epos *De Vetula*. Dagegen behauptet *Jacopo di Giovanni della Lana* in seinem zwischen 1324 und 1328 entstandenen und 1477 in Venedig gedruckten Kommentar zu *Dantes Divina Commedia*, daß die Augensummen 3, 4, 17 und 18 mit 3 Würfeln nur auf eine Art zu erzeugen seien. Solche Würfe hießen *azari*, was vom arabischen *asir* = schwierig abstammt. Daraus könnte *hasard*, das französische Wort für Glücksspiel, abgeleitet sein, das andere von *az-zahr*, dem arabischen Wort für Würfelspiel, herleiten.