Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

3) Ist $A = \emptyset$, so ist $A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$. Somit ist für $A \cap B$ die Voraussetzung des 3. Axioms von *Kolmogorow* erfüllt, und wir erhalten einerseits $P(A \cup B) = P(\emptyset \cup B) = P(B)$, andererseits $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(\emptyset) + P(B)$. Der Vergleich der beiden rechten Seiten ergibt $P(\emptyset) = 0$.

2) Nach dem soeben bewiesenen Teil **4** dieses Satzes ist $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})$. Axiom II besagt aber, daß $P(\Omega) = 1$ ist, woraus die Behauptung folgt.

1) Wegen Axiom I ist $P(\{\omega\}) \geqq 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Unter Verwendung des soeben bewiesenen Teils **2** erhalten wir noch $P(\{\omega\}) \leqq \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Für endliche Ergebnisräume sind die beiden Definitionen demnach äquivalent. Wir haben Definition 42.1 gewählt, weil das Belegen der Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeiten ein sehr anschaulicher Vorgang ist, ebenso wie das Zusammensetzen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus den Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse. Die Definition von *Kolmogorow* hat den Vorteil, daß sie sich so verallgemeinern läßt, daß sie auch für unendliche Ergebnisräume brauchbar wird. Das haben wir in diesem Buch aber nicht vor.
Die Festlegung der Funktionswerte $P(A)$, d.h. der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, ist im Rahmen dieser Axiome völlig willkürlich. Man wird jedoch die Werte so festlegen, daß sie den jeweiligen Verhältnissen angepaßt sind. So wird man bei einem idealen Würfel auf Grund der Symmetrie für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ a priori festlegen. Bei einem realen Würfel hingegen empfiehlt es sich, wie im Beispiel auf Seite 42 durchgeführt, die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen in einer möglichst langen Versuchsserie zu bestimmen und diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen a posteriori zu verwenden. Dann ist nämlich die Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten (Seite 44) anwendbar, wie *Jakob Bernoulli* im Hauptsatz seiner *Ars conjectandi*, dem »Gesetz der großen Zahlen«, gezeigt hat.

Aufgaben

Die Behauptungen der Aufgaben **1.–6.** sollen rein formal aus den Axiomen von *Kolmogorow* hergeleitet werden.

1. Für alle Ereignisse A gilt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Für alle Ereignisse A gilt: $P(A) \leqq 1$.
4. Für alle Ereignisse A, B gilt:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5. Für paarweise unvereinbare Ereignisse A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt die folgende Verallgemeinerung des Axioms III:
$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).}$$

6. Es gilt das Monotoniegesetz für Wahrscheinlichkeiten: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$.

•**7. a)** Ein Axiomensystem heißt **widerspruchsfrei**, wenn es ein Modell gibt, das sämtliche Axiome erfüllt. Zeige, daß das Axiomensystem von *Kolmogorow* widerspruchsfrei ist anhand nebenstehenden Modells: $\Omega := \{\omega\}$ und

A	$\emptyset$	Ω
$P(A)$	0	1

b) Ein Axiomensystem heißt **unvollständig**, wenn es mehrere, nicht isomorphe Modelle gibt. Begründe, daß das Axiomensystem von *Kolmogorow* unvollständig ist.