Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 2. Kombinatorische Hilfsmittel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

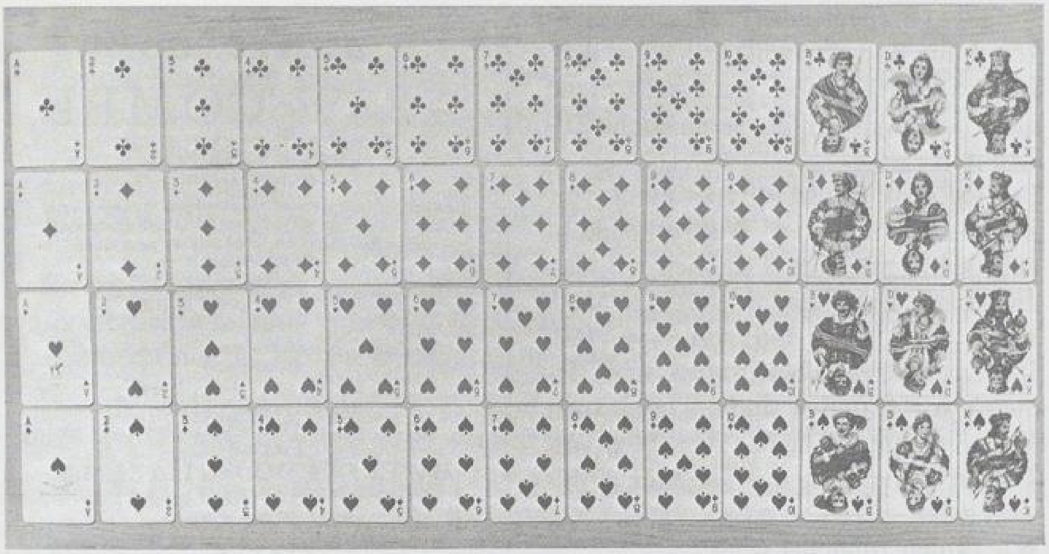


Bild 87.1 Die 52 französischen Karten des Bridgespiels

Das Problem bei der Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten besteht darin, die Anzahlen $|A|$ und $|\Omega|$ zu bestimmen. Dies ist bei großen Anzahlen nicht immer durch Abzählen in vernünftiger Zeit möglich. Wir wollen daher im nächsten Abschnitt Hilfsmittel entwickeln, durch die dieses mühsame Abzählen erleichtert wird.

8.2. Kombinatorische Hilfsmittel

Wie schwer das Abzählen der Mengen A und Ω ist, zeigte sich uns ja schon bei den wiederholt aufgeworfenen Problemen der Augensummen von 2 bzw. 3 Würfeln. Die Schwierigkeit liegt, allgemein gesprochen, darin, den Abzählvorgang so zu systematisieren, daß kein Element vergessen und andererseits keines mehrfach gezählt wird. Dem Zweig der Mathematik, der sich mit solchen Vorgängen befaßt, gab 1666 *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) durch seine *Dissertatio de Arte Combinatoria* den Namen »Kombinatorik«. Welchen Rahmen sich dabei der 20jährige *Leibniz* steckte, zeigt das Titelblatt seiner Arbeit (Bild 88.1). *Leibniz* war nämlich überzeugt, daß

»per Artem Combinatoriam alle Notiones Compositae der ganzen Welt in wenig Simplices als deren Alphabet reducirt, und aus solches alphabets Combination wiederumb alle Dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventiren müglich, ordinata methodo mit der Zeit zu finden, ein weg gebahnet wird.«*

Für ihn ist die kombinatorische Kunst die Grundlage einer universalen Wissenschaft aller Dinge. So weit wollen wir es aber nicht treiben! Unser bescheidenes Ziel ist es, in einigen einfachen Fällen Abzählvorgänge zu beherrschen.
Die wichtigste Art, Anzahlen abzuzählen, lernen wir kennen in folgender

* Brief *Leibnizens* an Herzog *Johann Friedrich* von Hannover, September 1671.

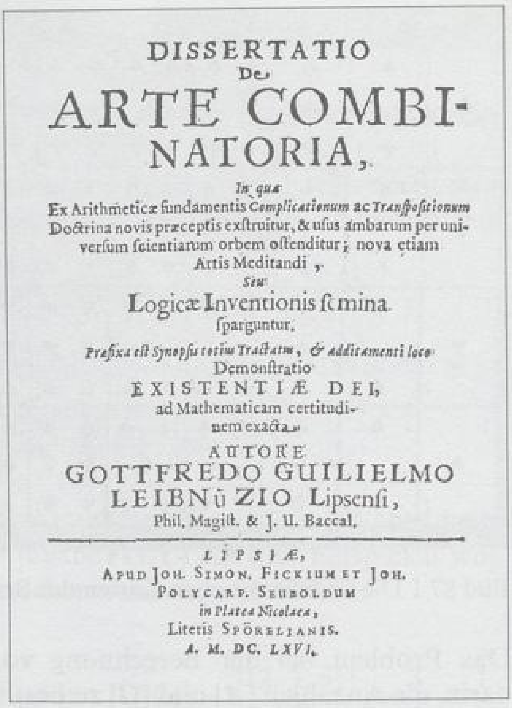

DISSERTATIO
De
ARTE COMBI-
NATORIA,
In quæ
Ex Arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum
Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per uni-
versum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam
Artis Meditandi,
Seu
Logicæ Inventionis semina
sparguntur.
Præfixa est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco
Demonstratio
EXISTENTIÆ DEI,
ad Mathematicam certitudi-
nem exacta.
AUTORE
GOTTFREDO GUILIELMO
LEIBNüZIO Lipsensi,
Phil. Magist. & J. U. Baccal.
LIPSIÆ,
Apud Joh. Simon. Fickium et Joh.
Polycarp. Seuboldum
in Platea Nicolaea,
Literis Spörelianis.
A. M. DC. LXVI.

Bild 88.1 Das Titelblatt der *Dissertatio de Arte Combinatoria* von *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716)

Aufgabe: Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine willkürlich aus dem Intervall $[100; 999]$ herausgegriffene natürliche Zahl lauter verschiedene Ziffern hat.

Es liegt ein Laplace-Experiment vor. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A müssen wir also die Anzahl der Elemente von $\Omega = \{100, 101, \ldots, 998, 999\}$ und von $A = \{102, 103, \ldots, 986, 987\}$ bestimmen. Die Elemente von Ω und A sind 3-Tupel, auch Tripel genannt. Für das Abzählen von Tupeln eignet sich das folgende Zählverfahren.

Wir zählen zunächst Ω ab:

Für die 1. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich 1, 2, ..., 9.

Für die 2. Stelle des Tupels gibt es 10 Möglichkeiten, nämlich 0, 1, 2, ..., 9.

Für die 3. Stelle des Tupels gibt es 10 Möglichkeiten, nämlich 0, 1, 2, ..., 9.

Zu jeder der 9 Möglichkeiten für die 1. Stelle gibt es 10 Möglichkeiten an der 2. Stelle. Das ergibt $9 \cdot 10$ Fälle. Zu jedem dieser $9 \cdot 10$ Fälle gibt es wieder 10 Möglichkeiten, die 3. Stelle zu besetzen. Das ergibt insgesamt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten. Wir erhalten somit $|\Omega| = 900$.

Die Mächtigkeit von Ω hätten wir in diesem Beispiel natürlich durch die Subtraktion $999 - 99 = 900$ erhalten können! Auf eine so einfache Methode können wir aber zur Berechnung von $|A|$ nicht zurückgreifen. Dagegen hilft unser oben verwendetes Abzählverfahren auch hier.

Wir zählen nun A ab:

Für die 1. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich 1, 2, ..., 9. Für die 2. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 außer der Ziffer an der 1. Stelle. Für die 3. Stelle des Tupels gibt es 8 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 außer den Ziffern an der 1. und 2. Stelle. Das ergibt insgesamt $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ Elemente von A. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{648}{900} = 72\%$.

Das vorgeführte Verfahren ist zum Abzählen von Tupeln oft hilfreich. Es ist unter den Namen **Produktregel** und **Zählprinzip** bekannt. Ein k-Tupel ist bekanntlich eine Anordnung $(a_1|a_2| \ldots |a_k)$ oder kurz $a_1 a_2 \ldots a_k$; dabei sind zwei k-Tupel genau dann gleich, wenn sie an jeder Stelle übereinstimmen. Die Anzahl der Elemente einer Menge von k-Tupeln bestimmt man mit Hilfe der

Produktregel:
Für die Besetzung der 1. Stelle a_1 des k-Tupels gebe es n_1 Möglichkeiten;
für die Besetzung der 2. Stelle a_2 des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Wahl von a_1, dann n_2 Möglichkeiten;
für die Besetzung der 3. Stelle a_3 des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Wahl von a_1 und a_2, dann n_3 Möglichkeiten;
....;
für die Besetzung der k-ten Stelle a_k des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der ersten $(k-1)$ Belegungen, dann n_k Möglichkeiten.
Dann enthält die Menge $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ k-Tupel.

Einige weitere Beispiele sollen die Tragfähigkeit der Produktregel aufzeigen.

Beispiel 1: In einer Schule gibt es 17 Unterstufenklassen, 13 Mittelstufenklassen und 9 Oberstufenklassen. Zu einer Sitzung soll aus jeder Stufe ein Klassensprecher erscheinen.
Nach der Produktregel gibt es $17 \cdot 13 \cdot 9 = 1989$ Möglichkeiten für die Zusammenstellung eines solchen 3-Tupels oder Tripels.

Beispiel 2: Beim Würfeln mit 4 Würfeln gibt es $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ Quadrupel als Ergebnisse. (4-Tupel heißen auch Quadrupel.)

Beispiel 3: In der Elferwette beim Fußballtoto* gibt es $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{11} = 177\,147$ Möglichkeiten für eine Tippreihe (siehe Bild 90.1).

Beispiel 4: An einem Pferderennen nehmen 20 Pferde teil. Bei einem Wettabschluß sollen die ersten drei Plätze richtig angegeben werden (Dreierwette). Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten drei Plätze?
Nach der Produktregel erhalten wir $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ Möglichkeiten.
Wenn alle Pferde ans Ziel kommen, ist das Ergebnis des Rennens ein 20-Tupel. Dafür gibt es nach der Produktregel $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ Möglichkeiten.

Die 20-Tupel des letzten Beispiels entstanden dadurch, daß man alle Reihenfolgen konstruierte, die aus den 20 verschiedenen Startnummern gebildet werden können. Allgemein gesprochen handelt es sich also darum, die Anzahl der n-Tupel zu bestimmen, die man aus n verschiedenen Elementen so bilden kann, daß jedes Element genau einmal auftritt. Da alle diese n-Tupel aus einem ersten dadurch entstehen, daß man die n Elemente miteinander beliebig vertauscht, nannte *Jakob Bernoulli* (1655–1705) jedes solche n-Tupel eine **Permutation**** der gegebenen n Elemente. Mit der Produktregel ergeben sich $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, solche n-Tupel zu bilden.

* Toto ist eine Abkürzung für Totalisator, womit der amtliche Wettbetrieb im Pferdesport erstmals 1871 in Frankreich bezeichnet wurde. 1921 wurde ein Fußballtoto in England eingeführt; 1948 ließen Baden-Württemberg, Bayern, Bremen und Schleswig-Holstein ein Fußballtoto zu, 1953 die DDR.

** *Ars Conjectandi*, II. Cap. 1 – Überhaupt ist Teil II der *Ars Conjectandi* ein hervorragendes Lehrbuch der Kombinatorik, die in Teil III ihre Anwendung findet.

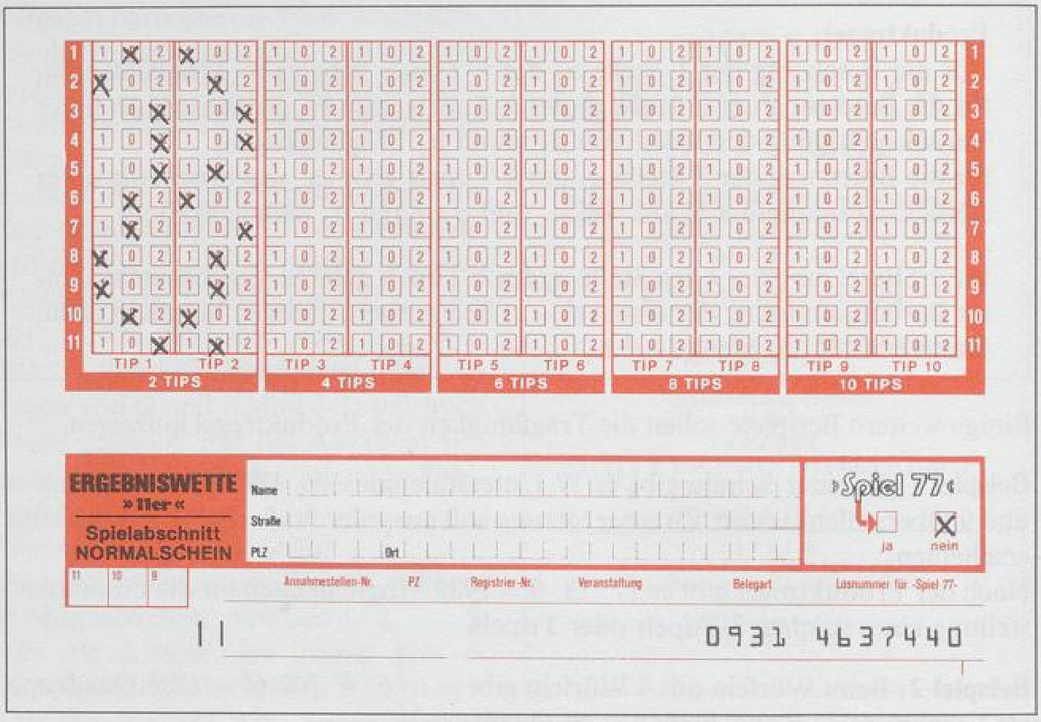


Bild 90.1 Totoschein mit 2 ausgefüllten Tippreihen.

Das hier auftretende Produkt der ersten n natürlichen Zahlen spielt in der Mathematik öfters eine Rolle. 1808 hat der Mathematiker *Christian Kramp* (1761–1826) vorgeschlagen, dieses Produkt mit $n!$, gesprochen *n Fakultät*, abzukürzen*. $1!$ und $0!$ sind dadurch noch nicht definiert. Für $n \geqq 3$ gilt die Rekursionsformel $n! = (n-1)! \cdot n$. Setzt man hier $n = 2$ bzw. $n = 1$, so erhält man formal $2! = 1! \cdot 2$ bzw. $1! = 0! \cdot 1$, was die Festlegungen $1! = 1$ und $0! = 1$ nahelegt. Wir fassen die Überlegungen zusammen in

Definition 90.1: $0! := 1$
$1! := 1$
$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für alle natürlichen Zahlen > 1

Damit gilt

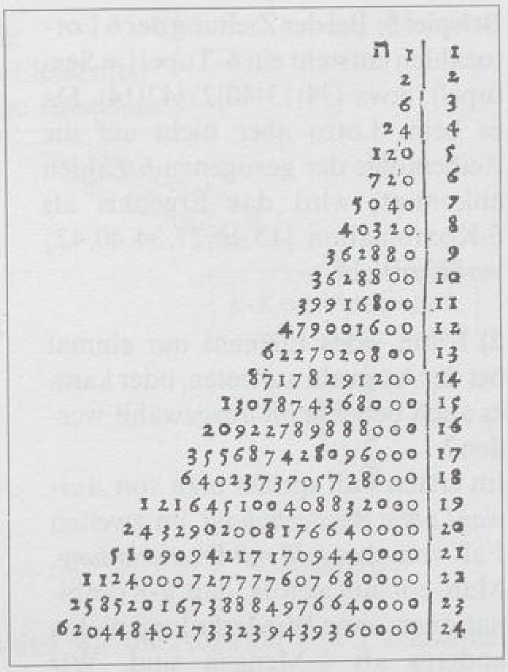
Satz 90.1: Zu jeder Menge von n Elementen gibt es $n!$ Permutationen.

Zur Menge $\{a, b, c\}$ gibt es also $3! = 6$ Permutationen, nämlich abc, acb, bac, bca, cab und cba.

Als Anwendung von Satz 90.1 betrachten wir folgendes Problem. Bei Schwimmwettkämpfen sind die Bahnen nicht ganz gleichwertig. Außerdem spielt es eine

* Das Wort *Fakultät* hat *Christian Kramp* zur Bezeichnung von Produkten der Form $y(y+1)(y+2) \cdot \ldots \cdot (y+(n-1))$ im Brief vom 30.5.1796 an *Carl Friedrich Hindenburg* (1741–1808) eingeführt, der ihn im *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Heft 5 (1796), abdruckte. Das Ausrufezeichen als Kennzeichen der speziellen Fakultät $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ führte *Kramp* 1808 in seinen *Élémens d'Arithmétique universelle* ein.
facultas (lat.) = Kraft, etwas zu vollbringen.

Rolle, wer in den benachbarten Bahnen schwimmt. Um diese Ungerechtigkeit zu beseitigen, müßte man eigentlich die 8 Teilnehmer so oft schwimmen lassen, bis alle möglichen Bahnbesetzungen aufgetreten sind. Das ergäbe allerdings an Stelle *eines* Wettkampfes $8! = 40320$ Wettkämpfe! Um einen 1500-m-Kraulwettkampf entscheiden zu können, müßte man dann über 1 Jahr Tag und Nacht schwimmen. Das dürfte der Grund sein, warum der Weltschwimmverband diese Art der Entscheidung noch nicht eingeführt hat.



ח 1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320.	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307874368000	15
20922789888000	16
355687428096000	17
6402373705728000	18
121645100408832000	19
2432902008176640000	20
51090942171709440000	21
1124000727777607680000	22
25852016738884976640000	23
620448401733239439360000	24

Bild 91.1 Tabelle der Fakultäten aus *Leibnizens* *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), die übrigens zu seinem Ärger 1690 ohne sein Wissen nachgedruckt wurde.

Das schnelle Anwachsen der Fakultäten zeigen überdies die Fakultätentabelle von Bild 91.1 und zwei schöne Aufgaben aus dem *Treatise of Algebra* von 1685 des *John Wallis* (1616–1703).* (Siehe Aufgabe 113/**26.**)

Kombinatorische Fragestellungen sind sehr vielfältig und oft nur trickreich zu bewältigen. Wir wollen uns hier nur mit den einfachsten Fällen beschäftigen. Dazu betrachten wir eine Menge von n unterscheidbaren Elementen, kurz n-Menge genannt. Aus ihr wollen wir k Elemente auswählen. Auf wie viele Arten kann eine solche Auswahl getroffen werden?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir zwei Vorfragen klären.

1) Spielt die Reihenfolge eine Rolle, in welcher die k Elemente ausgewählt werden?

Kommt es auf die Reihenfolge an, dann ist das Ergebnis der Auswahl ein **k-Tupel****; spielt hingegen die Reihenfolge keine Rolle, so ist das Ergebnis der Auswahl eine **k-Kombination*****.

* Der vollständige Titel des 1685 englisch erschienenen Werks lautet *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical, Showing the Original, Progress, and Advancement Thereof, From Time to Time: and by What Steps It Hath Attained to the Height at Which Now It is.* 1693 erschien es lateinisch, um einiges vermehrt.

** Früher nannte man die k-Tupel auch *Variationen zur k-ten Klasse* bzw. *Variationen der Länge k*.

*** Früher sagte man dafür auch *Kombination zur k-ten Klasse* oder *Kombination der Länge k*. *Combinatio* bedeutete bei den Römern eine Zusammenfassung von je 2 Elementen (bini = je 2). Bei *Gaius Iulius Hyginus* (ca. 60 v. Chr. – 10 n. Chr.), Grammatiker, Polyhistor und Bibliothekar von Kaiser *Augustus*, findet man für eine Zusammenfassung von je 3 Elementen das Wort *conternatio* (terni = je 3). Diese Bezeichnungen erweitert 1635 *Marin Mersenne* (1588–1648) über 3 hinaus. *Leibniz* schreibt 1666 dafür sogar *Com2natio*, *Con3natio* etc., obwohl *combinatio* schon damals im heutigen Sinne verwendet wurde. *Leibniz* bezeichnete statt dessen eine Zusammenfassung von Dingen als *Komplexion*, was in Deutschland erst *Carl Friedrich Hindenburg* (1741–1808) durch das heute übliche *Kombination* verdrängte. Leider konnte sich das von *Frans van Schooten* (um 1615–1660) eingeführte *electio* nicht durchsetzen.
Im Briefwechsel *Fermat-Pascal* versteht *Fermat* unter *combinaison* die heutigen k-Tupel, wohingegen *Pascal* darunter die k-Mengen versteht. Daher definiert *Pascal* 1654 in seinem *Traité du triangle arithmétique* expressis verbis *combinaison* als k-Menge.

Bild 92.1 Ziehung beim Lotto »6 aus 49«
oben: 6-Menge, natürlich geordnet
unten: ursprünglich gezogenes 6-Tupel

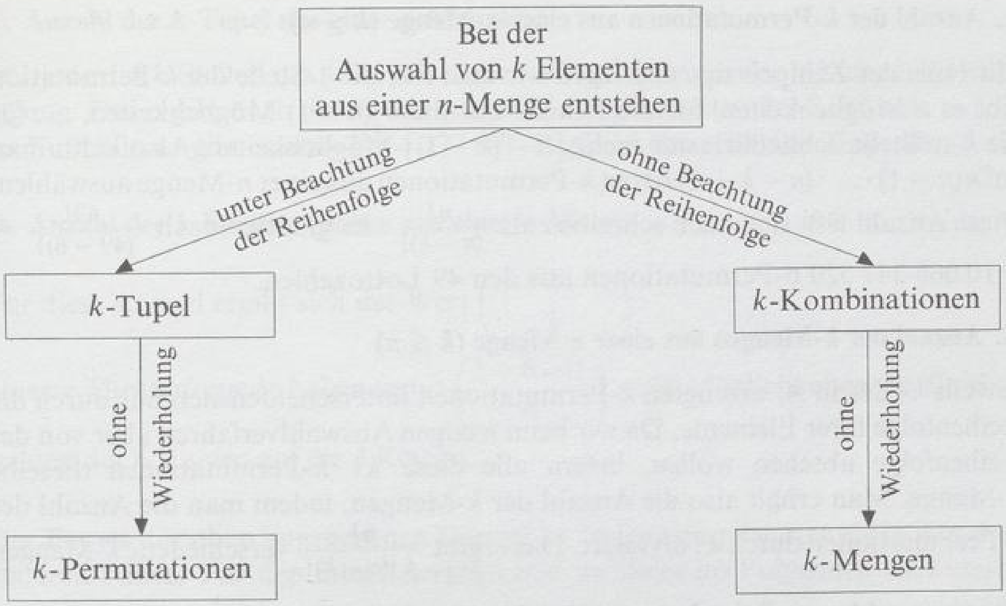
Beispiel 5: Bei der Ziehung der 6 Lottozahlen entsteht ein 6-Tupel (= Sextupel), etwa $(34|13|40|27|42|14)$. Da es beim Lotto aber nicht auf die Reihenfolge der gezogenen 6 Zahlen ankommt, wird das Ergebnis als 6-Kombination $\{13, 14, 27, 34, 40, 42\}$ veröffentlicht.

2) Kann jedes Element nur einmal bei der Auswahl auftreten, oder kann es auch beliebig oft ausgewählt werden?
Im ersten Fall spricht man von *Auswahl ohne Wiederholung*, im zweiten Fall von *Auswahl mit Wiederholung*. Man erkennt sofort, daß k-Kombinationen ohne Wiederholung nichts anderes als k-Mengen sind. Wir werden im folgenden für diesen Fall die Bezeichnung **k-Menge** der Bezeichnung *k-Kombination ohne Wiederholung* vorziehen, weil sie suggestiver ist. Bei k-Tupel ist Auswahl mit Wiederholung zugelassen. Ist jedoch bei der Auswahl der Elemente keine Wiederholung von Elementen zugelassen, so wollen wir die entstehenden *k-Tupel ohne Wiederholung* kürzer als **k-Permutationen** bezeichnen. Ist dabei überdies $k = n$, so spricht man üblicherweise nicht von einer n-Permutation, sondern nur von einer Permutation (der n gegebenen Elemente), wie wir es bereits auf Seite 89 eingeführt hatten.

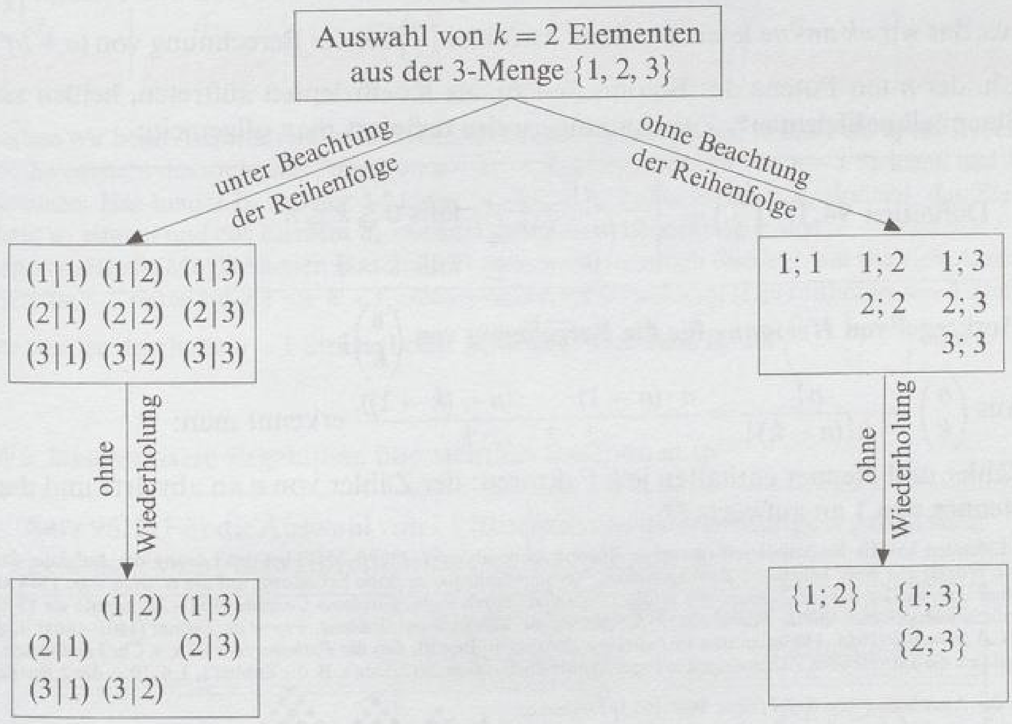
Beispiel 6: Das Ziehen der 6 Lottozahlen liefert zunächst ein Sextupel ohne Wiederholung, also eine 6-Permutation, die als natürlich geordnete 6-Menge veröffentlicht wird. Beim Fußballtoto hingegen ist eine Tippreihe ein 11-Tupel (mit Wiederholung), das aus der 3-Menge $\{0, 1, 2\}$ ausgewählt wird.

Für den noch fehlenden Fall einer k-Kombination mit Wiederholung betrachten wir
Beispiel 7: Eine Gruppe von 6 Personen möchte ins Theater gehen und läßt sich 6 Karten der teuersten Preisklasse schicken. Die Plätze dieser Preisklasse liegen in den ersten 3 Reihen. Eine Möglichkeit der Auswahl besteht dann aus 6 Karten, von denen jede entweder für die erste, die zweite oder die dritte Reihe gilt.

In einer Übersicht stellen wir die vier genannten Fälle noch einmal zusammen.



Zur Illustration dieser Übersicht betrachten wir die Auswahl von 2 Elementen aus einer Menge von 3 Elementen.



Gibt es für die Elemente der Menge, aus der ausgewählt wird, eine »natürliche« Anordnung, so schreibt man die Kombinationen bzw. Mengen in dieser natürlichen Anordnung, um die Darstellung übersichtlicher zu machen.
Im Folgenden wollen wir Formeln für die Anzahl der jeweils möglichen Auswahlen entwickeln.

A. Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ($k \leqq n$)

Mit Hilfe des Zählprinzips überlegen wir uns: Für die 1. Stelle der k-Permutation gibt es n Möglichkeiten, für die 2. Stelle nur mehr $(n-1)$ Möglichkeiten, …, für die k-te Stelle schließlich nur mehr $[n-(k-1)]$ Möglichkeiten. Also kann man auf $n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Arten k-Permutationen aus einer n-Menge auswählen. Diese Anzahl läßt sich auch schreiben als $\frac{n!}{(n-k)!}$. Es gibt demnach $\frac{49!}{(49-6)!} =$ $= 10\,068\,347\,520$ 6-Permutationen aus den 49 Lottozahlen.

B. Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge ($k \leqq n$)

Jeweils $k!$ der in **A.** erzeugten k-Permutationen unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge ihrer Elemente. Da wir beim jetzigen Auswahlverfahren aber von der Reihenfolge absehen wollen, liefern alle diese $k!$ k-Permutationen dieselbe k-Menge. Man erhält also die Anzahl der k-Mengen, indem man die Anzahl der k-Permutationen durch $k!$ dividiert. Das ergibt $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ verschiedene k-Mengen aus einer n-Menge. Beim Lotto »6 aus 49« gibt es somit $\frac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816$ verschiedene Ergebnisse.

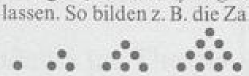
Die Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge drückt man durch das Symbol $\binom{n}{k}$ aus, das wir »k aus n« lesen. Da diese Anzahlen $\binom{n}{k}$ bei der Berechnung von $(a+b)^n$, d.h. der n-ten Potenz des Binoms $(a+b)$, als Koeffizienten auftreten, heißen sie **Binomialkoeffizienten***. Zweckmäßigerweise definiert man allgemein:

Definition 94.1: $$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leqq k \leqq n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases}$$

Merkregel von *Hérigone* für die Berechnung von $\binom{n}{k}$:

Aus $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$ erkennt man:

Zähler und Nenner enthalten je k Faktoren; der Zähler von n an abwärts und der Nenner von 1 an aufwärts.**

* Erfunden hat die Binomialkoeffizienten in Europa *Michael Stifel* (1487?–1567) bei der Lösung der Aufgabe, die n-te Wurzel aus einer beliebigen Zahl zu ziehen. Veröffentlicht hat er seine Erfindung, auf die er stolz war, 1544 in seiner *Arithmetica integra*. Namen gab er diesen Zahlen jedoch nicht. *Girolamo Cardano* (1501–76) nannte sie 1570 einfach *multiplicandi*. *Blaise Pascal* (1623–62) nannte sie *Zahlen n-ter Ordnung*, *Pierre de Fermat* (1601–1665) und *Jakob Bernoulli* (1655–1705) nannten sie *figurierte Zahlen*, ein Begriff, den die *Pythagoreer* (5. Jh. v. Chr.) einführten, weil sich die auftretenden Zahlenfolgen in Figuren anordnen lassen. So bilden z. B. die Zahlen 1, 3, 6, 10 … der 2. Spalte in der Anordnung von *Stifel* (siehe Bild 105.1) Dreiecke: 
William Oughtred (1574–1660) nannte sie 1631 *unciae*, eine Bezeichnung, die auch *Leonhard Euler* (1707–1783) noch verwendet. Die früheste Belegstelle für den Namen »Binomialkoeffizient«, die wir entdecken konnten, sind die *Anfangsgründe der Mathematik*, III, 1, Seite 385, von *Abraham Gotthelf Kästner* (1719–1800) aus dem Jahre 1760. *Leonhard Euler* verwendete für die Binomialkoeffizienten 1778 das Symbol $(\frac{n}{k})$, 1781 dann $[\frac{n}{k}]$. Das heute übliche $\binom{n}{k}$ führte 1826 *Andreas von Ettingshausen* (1796–1878) in *Die combinatorische Analysis* ein.

** In dieser Form gab *Pierre Hérigone* († ca. 1643) als erster in seinem *Cursus mathematicus nova, brevi, et clara methodo demonstratus* (1634) die allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge an.

C. Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Für jede der k Stellen des k-Tupels stehen alle n Elemente der n-Menge zur Verfügung. Das ergibt nach der Produktregel n^k Möglichkeiten der Auswahl.
Im Fußballtoto gibt es also $3^{11} = 177\,147$ Möglichkeiten für eine Tippreihe.

D. Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Für diese Anzahl ergibt sich der Wert $\binom{n+k-1}{k}$.

Unsere Theaterfreunde haben somit $\binom{3+6-1}{6} = 28$ Möglichkeiten für die Verteilung der 6 Karten auf die 3 Reihen.

Der **Beweis** der oben angegebenen Formel ist leider komplizierter als in den drei anderen Fällen. Für den interessierten Leser werde er im Folgenden entwickelt.

Durch $n-1$ Trennstriche erzeugen wir zunächst für jedes der n Elemente der n-Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ein Feld.

$$a_1 \;\Big|\; a_2 \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; a_i \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; a_{n-1} \;\Big|\; a_n$$

Ziehen wir beim Auswahlverfahren das Element a_i, so schreiben wir in das Feld a_i ein Kreuz $+$. Es entsteht dadurch eine Folge von $n+k-1$ Zeichen, nämlich von $n-1$ Strichen und k Kreuzen. Hat man z. B. aus der 4-Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ das Element a_1 dreimal, das Element a_3 einmal und das Element a_4 zweimal gezogen, so entsteht die Folge $+++||+|++$. Man erhält alle Möglichkeiten für solche Folgen, wenn man sich überlegt, auf wie viele Arten man die k Kreuze auf die $n+k-1$ Zeichenstellen verteilen kann. (Die restlichen $n-1$ Stellen werden durch die $n-1$ Striche belegt.) Das geht aber nach **B.** auf $\binom{n+k-1}{k}$ Arten.

Wir fassen unsere Ergebnisse übersichtlich zusammen in

Satz 95.1: Für die Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge ergeben sich, abhängig vom Auswahlverfahren, folgende Anzahlen:

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholung ($k \in \mathbb{N}_0$)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholung ($k \leqq n$)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Bemerkung:
Für diese Anzahlen gibt es verschiedene Bezeichnungsweisen. Einige geläufige geben wir hier an:

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\mathrm{mW}}(n; k) = {}^{\mathrm{W}}V_n^k$.

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) ohne Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\mathrm{oW}}(n; k) = V_n^k$.

Anzahl der k-Kombinationen mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= K_{\mathrm{mW}}(n; k) = {}^{\mathrm{W}}C_n^k$.

Anzahl der k-Mengen (= k-Kombinationen ohne Wiederholung) aus einer n-Menge $= K_{\mathrm{oW}}(n; k) = C_n^k$.

Zusammenfassend illustrieren wir die vier unterschiedlichen Abzählprobleme.

Beispiel 8: Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sie
a) 3 numerierte Sitzplätze sind,
b) 3 unnumerierte Stehplätze sind?

Dabei müssen wir noch jeweils unterscheiden, ob ein Schüler
α) genau eine Karte oder
β) mehrere Karten nehmen kann.

Lösung:
aα) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt eine 3-Permutation aus den 15 Schülern dar. Es gibt also $\frac{15!}{(15-3)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 =$ $= 2730$ Möglichkeiten.
aβ) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt ein Schülertripel dar. Es gibt also $15^3 = 3375$ Möglichkeiten.
bα) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Menge von 3 Schülern (= 3-Kombination ohne Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ Möglichkeiten.
bβ) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Kombination von 3 Schülern (mit Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = 680$ Möglichkeiten.

8.3. Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Mit den in **8.2.** erarbeiteten kombinatorischen Hilfsmitteln können wir jetzt Laplace-Wahrscheinlichkeiten auch in komplizierteren Fällen berechnen.