# Stochastik

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

8. 4. Das Urnenmodell

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

daß mindestens ein Brief richtig ankommt, ab $n = 7$ praktisch unabhängig von der Anzahl der Briefe durch $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$ gut approximiert wird, wie 1708 *Montmort* und 1751 *Leonhard Euler* (1707–1783) zeigten. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 68.)

## 8.4. Das Urnenmodell*

### 8.4.1. Problemstellung

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. Dabei ist das Urnenexperiment oft übersichtlicher, weil man sich hier auf das Wesentliche des Zufallsgeschehens beschränken kann. So läßt sich das Laplace-Zufallsexperiment »Werfen eines Laplace-Würfels« durch das Ziehen aus einer Urne mit 6 unterscheidbaren Kugeln simulieren. Aber auch Nicht-Laplace-Experimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. So weiß man z. B., daß die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt weltweit ziemlich genau den Wert 0,514 hat. Das Zufallsexperiment »Geburt eines Kindes« kann also durch das Ziehen aus einer Urne simuliert werden, die 514 Kugeln einer Farbe und 486 andere Kugeln enthält.

Bei einem Urnenexperiment verwendet man eine Urne, die gleichartige, je nach Problemstellung mit verschiedenen Merkmalen (z. B. Farbe, Nummer) versehene Kugeln enthält. Das Experiment besteht nun darin, daß man der Reihe nach je eine Kugel bis zu einer festgelegten Anzahl zieht und deren Merkmale notiert. Dabei gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Verfahrensweisen:

**a) »Ziehen ohne Zurücklegen«**
Die jeweils gezogene Kugel wird beiseite gelegt, d. h., die Zusammensetzung der Urne ändert sich bei jedem Zug.

**b) »Ziehen mit Zurücklegen«**
Die gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt; d. h., die Zusammensetzung des Urneninhalts ist vor jedem Zug die gleiche.**

Für das Folgende geben wir uns eine Urne mit $N$ Kugeln vor; $S$ dieser $N$ Kugeln sind schwarz. Wir ziehen $n$ Kugeln aus dieser Urne. Nun könnte man nach den Wahrscheinlichkeiten vieler Ereignisse fragen, wie z. B. »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz«, »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz, aber die 4. gezogene Kugel ist nicht schwarz«, »Unter den ersten 5 gezogenen Kugeln befinden sich mindestens 2 schwarze«. Ein besonders wichtiger Typ von Ereignissen wird uns in der Folgezeit immer wieder beschäftigen, nämlich »Unter den $n$ gezogenen Kugeln befinden sich genau $s$ schwarze Kugeln«. Da wir dieses Ereignis sehr häufig ansprechen werden, lohnt es sich, eine kurze Schreibweise dafür einzuführen. Wir

* Zur Einführung der Urne in die Wahrscheinlichkeitsrechnung lese man die Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.

** Bei komplizierteren Urnenexperimenten zieht man jeweils statt *einer* Kugel einen Satz von $m$ Kugeln mit oder ohne Zurücklegen.

bezeichnen mit $Z$ die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Das Ereignis »Es werden genau $s$ schwarze Kugeln gezogen« schreibt sich damit kurz »$Z = s$«. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(Z = s)$ müssen wir nun unterscheiden, ob das Ziehen ohne oder mit Zurücklegen erfolgen soll.

### 8.4.2. Die Wahrscheinlichkeit für genau $s$ schwarze Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen

**Beispiel:** Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir zunächst ein Baumdiagramm. Den jeweiligen Urneninhalt geben wir durch ein Zahlenpaar wieder; die erste Zahl bedeute die Anzahl der jeweils noch vorhandenen schwarzen Kugeln, die zweite die Anzahl der anderen Kugeln (Figur 105.1).

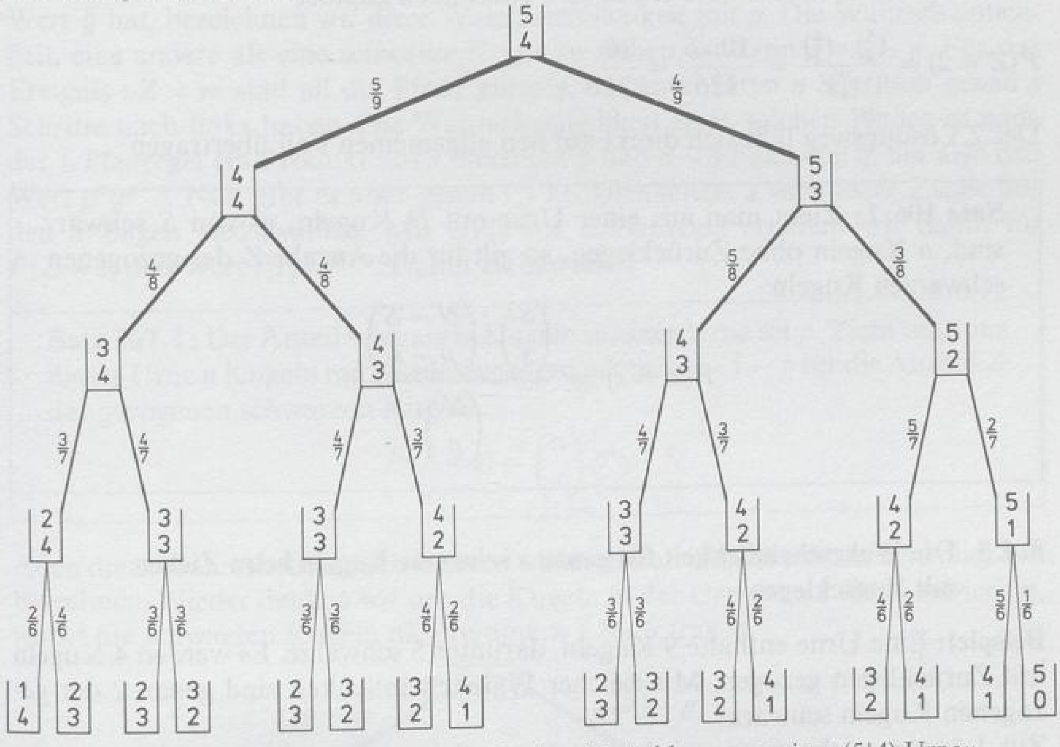

Fig. 105.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Das Ereignis »$Z = 2$« ist genau dann eingetreten, wenn eine Urne der Form (3|2) entstanden ist. Eine solche Urne kann auf 6 verschiedenen Wegen erhalten werden. Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg ergeben sich mit Hilfe der 1. Pfadregel (Seite 55), die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Urne (3|2) erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel (Seite 57). Somit gewinnen wir

$$P((3|2)) = P(Z=2) = \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \\ + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6} = \tfrac{10}{21} = \approx 47{,}6\,\%.$$

In der vorstehenden Überlegung haben wir so gerechnet, als ob die Kugeln nacheinander gezogen würden. In **2.2.3** (Seite 17) hatten wir behauptet, daß die gleichzeitige Entnahme von 4 Kugeln ersetzt werden kann durch das 4malige Ziehen von je einer Kugel ohne Zurücklegen. Dies können wir durch Anwendung unserer kombinatorischen Hilfsmittel zeigen, indem wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen.
Denken wir uns dazu die 9 Kugeln unterscheidbar, etwa numeriert von 1 bis 9, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis 5 tragen sollen. Als Ergebnisraum $\Omega$ wählen wir die Menge aller 4-Mengen von Kugeln, die man aus der Urne ziehen kann. Da keine Kugel bevorzugt ist, sind alle diese Mengen gleichwahrscheinlich. In einer 9-Menge gibt es $\binom{9}{4}$ 4-Teilmengen; also ist $|\Omega| = \binom{9}{4}$. Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Die 2 schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten aus den 5 schwarzen Kugeln der Urne ziehen. Für die restlichen 2 Kugeln gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, aus den 4 anderen Kugeln gezogen zu werden. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich dann nach *Laplace*

$$P(Z=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{10}{21}.$$

Der 2. Lösungsweg läßt sich direkt auf den allgemeinen Fall übertragen.

**Satz 106.1:** Zieht man aus einer Urne mit $N$ Kugeln, wovon $S$ schwarz sind, $n$ Kugeln ohne Zurücklegen, so gilt für die Anzahl $Z$ der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z=s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

### 8.4.3. Die Wahrscheinlichkeit für genau $s$ schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen

**Beispiel:** Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir wieder ein Baumdiagramm. Es bezeichne $\bullet$ den Zug einer schwarzen Kugel, $\circ$ den Zug einer anderen Kugel (Figur 107.1).
Jeder Pfad, der genau 2mal nach links verläuft, führt zu genau 2 gezogenen schwarzen Kugeln. Jeder dieser Pfade hat auf Grund der 1. Pfadregel dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$. Da es genau 6 solcher Pfade gibt, erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel

$$P(Z=2) = 6 \cdot \left(\tfrac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 = \tfrac{2400}{6561} \approx 36{,}6\%.$$

Auch im allgemeinen Fall hilft uns das Baumdiagramm (Figur 107.2) beim Auffinden der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Da beim Ziehen mit Zurücklegen die

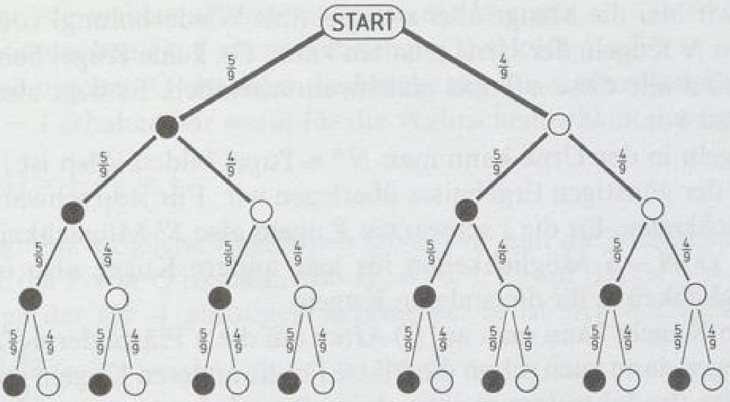

Fig. 107.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel bei jedem Zug den Wert $\frac{S}{N}$ hat, bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit $p$. Die Wahrscheinlichkeit, eine andere als eine schwarze Kugel zu ziehen, ist dann $q := 1 - p$. Für das Ereignis »$Z = s$« sind all die Pfade günstig, die unter ihren $n$ Schritten genau $s$ Schritte nach links haben. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Pfades ist nach der 1. Pfadregel ein Produkt aus $s$ Faktoren $p$ und $n - s$ Faktoren $q$, hat also den Wert $p^s q^{n-s}$. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{s}$ Möglichkeiten, $s$ »schwarze Züge« aus den $n$ Zügen auszuwählen. Mit Hilfe der 2. Pfadregel erhalten wir damit für $P(Z = s)$ den Wert $\binom{n}{s} p^s q^{n-s}$. Damit ist bewiesen

**Satz 107.1:** Der Anteil schwarzer Kugeln in einer Urne sei $p$. Zieht man aus dieser Urne $n$ Kugeln mit Zurücklegen, so gilt mit $q := 1 - p$ für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z = s) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit können wir direkt als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen. Wieder denken wir uns die Kugeln in der Urne von 1 bis $N$ numeriert, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis $S$ tragen.

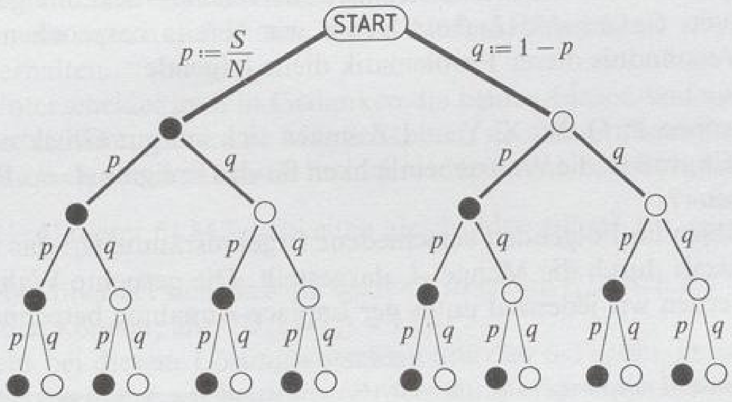

Fig. 107.2 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer $(S|N-S)$-Urne«

Als $\Omega$ wählen wir hier die Menge aller $n$-Tupel (mit Wiederholung) von Kugeln, die man aus den $N$ Kugeln der Urne erhalten kann. Da keine Kugel beim Ziehen bevorzugt ist, sind alle diese $n$-Tupel gleichwahrscheinlich. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor.
Mit den $N$ Kugeln in der Urne kann man $N^n$ $n$-Tupel bilden. Also ist $|\Omega| = N^n$.
Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Für jede schwarze Kugel gibt es $S$ Möglichkeiten, für die $s$ schwarzen Kugeln also $S^s$ Möglichkeiten. Entsprechend gibt es $N-S$ Möglichkeiten für jede andere Kugel, also insgesamt $(N-S)^{n-s}$ Möglichkeiten für die anderen Kugeln.
Die $s$ schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{n}{s}$ Arten auf die $n$ Plätze der $n$-Tupel verteilen. Damit liegen dann auch schon die Plätze für die anderen Kugeln im $n$-Tupel fest. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich somit nach *Laplace*:

$$P(Z=s) = \frac{\binom{n}{s} S^s (N-S)^{n-s}}{N^n} = \binom{n}{s} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} =$$
$$= \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.^*$$

## 8.5. Laplace-Paradoxa oder »Was ist gleichwahrscheinlich?«

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A$ nach der Formel $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ setzt bekanntlich voraus, daß die Ergebnisse des Experiments mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wie wir u.a. in Beispiel 4 von **8.3.** gesehen haben, kann man zu einem realen Experiment verschiedene Ergebnisräume konstruieren, für die man zu leicht unkritisch die Laplace-Annahme macht, weil es oft sehr schwierig ist, die wirkliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erkennen. *Laplace* selbst schrieb, daß dies gerade einer der heikelsten Punkte in der Untersuchung des Zufallsgeschehens sei.** Es darf einen also nicht wundernehmen, daß bei einem solchen Vorgehen unterschiedliche Werte für die Wahrscheinlichkeit ein und desselben Ereignisses errechnet werden können. Manche solche Fehlschlüsse sind als *Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung* bekannt geworden. Die Probleme von *Galilei* und *Leibniz* haben wir bereits besprochen***. Zu einem tieferen Verständnis dieser Problematik diene folgende

**Aufgabe:** 6 Personen P, Q, W, X, Y und Z setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A :=$ »P kommt neben Q zu sitzen«?
**Lösung:** Wir wählen im Folgenden verschiedene Ergebnisräume $\Omega_i$; das Ereignis $A$ wird dann jeweils durch die Menge $A_i$ dargestellt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ werden wir jedesmal unter der Laplace-Annahme berechnen.

* Die Formel wird manchmal nach *Isaac Newton* (1643–1727) benannt, stammt aber mit Sicherheit nicht von ihm.
** Siehe Seite 76.
*** Siehe dazu Seite 76 und die Aufgaben 12/**1**, **2** und 111/**10**, **11**.