Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 5. Laplace-Paradoxa oder "Was ist gleichwahrscheinlich?"

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Als Ω wählen wir hier die Menge aller n-Tupel (mit Wiederholung) von Kugeln, die man aus den N Kugeln der Urne erhalten kann. Da keine Kugel beim Ziehen bevorzugt ist, sind alle diese n-Tupel gleichwahrscheinlich. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor.
Mit den N Kugeln in der Urne kann man N^n n-Tupel bilden. Also ist $|\Omega| = N^n$.
Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Für jede schwarze Kugel gibt es S Möglichkeiten, für die s schwarzen Kugeln also S^s Möglichkeiten. Entsprechend gibt es $N - S$ Möglichkeiten für jede andere Kugel, also insgesamt $(N-S)^{n-s}$ Möglichkeiten für die anderen Kugeln.
Die s schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{n}{s}$ Arten auf die n Plätze der n-Tupel verteilen. Damit liegen dann auch schon die Plätze für die anderen Kugeln im n-Tupel fest. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich somit nach *Laplace*:

$$P(Z=s) = \frac{\binom{n}{s} S^s (N-S)^{n-s}}{N^n} = \binom{n}{s} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} =$$
$$= \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.^*$$

8.5. Laplace-Paradoxa oder »Was ist gleichwahrscheinlich?«

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A nach der Formel $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ setzt bekanntlich voraus, daß die Ergebnisse des Experiments mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wie wir u.a. in Beispiel 4 von **8.3.** gesehen haben, kann man zu einem realen Experiment verschiedene Ergebnisräume konstruieren, für die man zu leicht unkritisch die Laplace-Annahme macht, weil es oft sehr schwierig ist, die wirkliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erkennen. *Laplace* selbst schrieb, daß dies gerade einer der heikelsten Punkte in der Untersuchung des Zufallsgeschehens sei.** Es darf einen also nicht wundernehmen, daß bei einem solchen Vorgehen unterschiedliche Werte für die Wahrscheinlichkeit ein und desselben Ereignisses errechnet werden können. Manche solche Fehlschlüsse sind als *Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung* bekannt geworden. Die Probleme von *Galilei* und *Leibniz* haben wir bereits besprochen***. Zu einem tieferen Verständnis dieser Problematik diene folgende

Aufgabe: 6 Personen P, Q, W, X, Y und Z setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A :=$ »P kommt neben Q zu sitzen«?
Lösung: Wir wählen im Folgenden verschiedene Ergebnisräume Ω_i; das Ereignis A wird dann jeweils durch die Menge A_i dargestellt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ werden wir jedesmal unter der Laplace-Annahme berechnen.

* Die Formel wird manchmal nach *Isaac Newton* (1643–1727) benannt, stammt aber mit Sicherheit nicht von ihm.
** Siehe Seite 76.
*** Siehe dazu Seite 76 und die Aufgaben 12/**1**, **2** und 111/**10**, **11**.

1. Lösung: Wir wählen als Ergebnisraum die Menge
$\Omega_1 := \{$P sitzt neben Q; P sitzt nicht neben Q$\}$ mit $|\Omega_1| = 2$.
$A_1 = \{$P sitzt neben Q$\}$ ist dann die Menge der für A günstigen Ergebnisse.
Mit $|A_1| = 1$ erhalten wir somit für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A den Wert $P(A) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{2}$.

2. Lösung: Als mögliche Ergebnisse lassen wir nun die Minimalanzahl von Personen zu, die P von Q trennen, also $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$ mit $|\Omega_2| = 3$. $A_2 = \{0\}$ ist dann die Menge der für A günstigen Ergebnisse; es ist $|A_2| = 1$ und damit
$P(A) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{1}{3}$.

3. Lösung: Als mögliche Ergebnisse betrachten wir die Anzahl von Personen, die im Uhrzeigersinn zwischen P und Q sitzen, also $\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit $|\Omega_3| = 5$. Die günstigen Ergebnisse bilden die Menge $A_3 = \{0, 4\}$ mit $|A_3| = 2$. Damit ergibt sich $P(A) = \frac{|A_3|}{|\Omega_3|} = \frac{2}{5}$.

4. Lösung: Wir numerieren die Plätze (siehe Figur 109.1) und nehmen als Ergebnisse des Zufallsexperiments die 2-Mengen der Nummern derjenigen Plätze, auf denen P und Q sitzen können, also

$$\Omega_4 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{5, 6\}\} \quad \text{mit} \quad |\Omega_4| = \binom{6}{2} = 15.$$

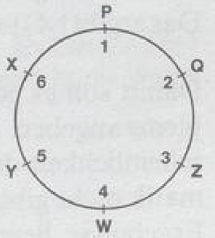

Fig. 109.1
Sechs Personen an einem runden Tisch

A_4 besteht dann aus denjenigen 2-Mengen, die benachbarte Plätze angeben, also

$$A_4 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}\} \text{ mit } |A_4| = 6.$$

Somit erhalten wir $P(A) = \frac{|A_4|}{|\Omega_4|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

5. Lösung: Da es gleichgültig ist, ob P neben Q oder Q neben P sitzt, können wir beide mit dem gleichen Symbol 1 bezeichnen. Die restlichen 4 Personen können wir auch identifizieren; wir wählen für sie das Symbol 0. Ω_5 besteht dann aus allen 6-Tupeln, die man aus 2 Einsen und 4 Nullen bilden kann. $|\Omega_5|$ kann man auf 2 Arten erhalten.
1. Art: Unterscheidet man in Gedanken die beiden Einsen und auch die 4 Nullen voneinander, dann gibt es 6! Möglichkeiten, sie anzuordnen. Da man aber eine Permutation der beiden Einsen bzw. der 4 Nullen nicht unterscheiden kann, sind jeweils $2! \cdot 4!$ dieser 6! Möglichkeiten gleich. Also gilt $|\Omega_5| = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.
2. Art: Man überlegt sich, daß die beiden Einsen auf $\binom{6}{2}$ Arten auf die 6 Plätze verteilt werden können; also $|\Omega_5| = \binom{6}{2} = 15$.
A_5 besteht bei diesem Lösungsvorschlag aus den 6-Tupeln, in denen die beiden Einsen nebeneinanderstehen oder Tupelanfang und -ende bilden. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten, wie man durch Aufzählen der Menge A_5 feststellt;

$A_5 = \{110000, 011000, \ldots, 000011, 10001\}$, also $|A_5| = 6$. Somit erhalten wir wiederum $P(A) = \frac{|A_5|}{|\Omega_5|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

6. Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir aber auch annehmen, daß P auf Platz Nr. 1 sitzt. Als Ergebnisse des Experiments nehmen wir die Nummern der Plätze, auf denen Q sitzen kann, also $\Omega_6 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $|\Omega_6| = 5$. Die günstigen Ergebnisse bilden die Menge $A_6 = \{2, 6\}$ mit $|A_6| = 2$. Damit wird $P(A) = \frac{|A_6|}{|\Omega_6|} = \frac{2}{5}$.

7. Lösung: Als mögliche Ergebnisse betrachten wir alle Permutationen der 6 Personen, also $|\Omega_7| = 6!$. A_7 besteht aus allen Permutationen, in denen P neben Q steht, und aus denjenigen, bei denen P und Q am Anfang bzw. am Ende stehen, also $A_7 = \{\text{PQXYZW}, \ldots, \text{XQPYZW}, \ldots, \text{QXYZWP}, \ldots\}$. Die Mächtigkeit von A_7 bestimmen wir mit Hilfe des Zählprinzips: Für P gibt es 6 Möglichkeiten, Platz zu nehmen. Q hat dann jeweils 2 Möglichkeiten, nämlich links oder rechts von P Platz zu nehmen. Die restlichen 4 Personen können auf 4! Arten die restlichen 4 Plätze belegen.
Das ergibt $|A_7| = 6 \cdot 2 \cdot 4!$ und damit $P(A) = \frac{|A_7|}{|\Omega_7|} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5}$.

Damit soll es genug sein! Sicherlich lassen sich noch andere Lösungen des Problems angeben. Aber es erhebt sich doch die Frage, was ist nun die *richtige* Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A? Da es Mehrheitsentscheidungen in der Mathematik nicht gibt, müssen wir nachdenken. Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse liegt offenbar darin, daß wir für die unterschiedlichsten Ergebnisräume immer die Laplace-Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse gemacht haben, wozu wir durch die Formulierung »auf gut Glück« verleitet wurden. Präzisiert man nun den Vorgang, wie die 6 Personen am Tisch Platz nehmen, so erkennt man, daß *jeder* der gefundenen Wahrscheinlichkeitswerte $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{3}$ richtig sein kann! Es kann z.B. sein, daß P und Q durch den Wurf einer Laplace-Münze entscheiden, ob sie nebeneinander oder getrennt sitzen wollen. Jetzt ist für Ω_1 die Laplace-Annahme richtig, für alle anderen vorgestellten Ergebnisräume aber falsch. In diesem Fall ist also $P(A) = \frac{1}{2}$ die richtige Antwort auf das Problem. Es kann aber auch sein, daß P und Q durch Werfen eines Laplace-Würfels die Minimalanzahl der Personen bestimmen, die zwischen ihnen sitzen sollen. Dabei verabreden sie, daß Augenzahl 1 und Augenzahl 4 eine Person bedeuten, Augenzahl 2 und Augenzahl 5 zwei Personen und Augenzahl 3 und Augenzahl 6 keine Person. Jetzt ist für Ω_2 die Laplace-Annahme richtig, für alle anderen vorgestellten Ergebnisräume jedoch falsch. $P(A) = \frac{1}{3}$ ist nun die richtige Antwort auf das Problem. Schließlich können die 6 Personen ihre Platznummern als Lose ziehen. Dann ist die Laplace-Annahme für die Ergebnisräume Ω_3 bis Ω_7 richtig. Für Ω_7 ist dies unmittelbar einsichtig. Die Ergebnisräume Ω_3 bis Ω_6 entstehen aus Ω_7 durch eine Vergröberung dergestalt, daß jeweils gleich viele Elemente aus Ω_7 identifiziert werden (vgl. Aufgabe 125/**105**); dadurch bleibt aber die Laplace-Eigenschaft erhalten. Die richtige Lösung lautet in all diesen Fällen $P(A) = \frac{2}{5}$.

Besonders problematisch ist der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit, wenn der Ergebnisraum unendlich viele Ergebnisse enthält. Zwei historische Paradoxa, in denen geometrische Probleme mit unendlichen Ergebnisräumen behandelt werden, sind im Anhang II (Seite 388) dargestellt.

Aufgaben

Zu 8.1.

• **1.** Zeige mit den *Kolmogorow*-Axiomen, daß $P: A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$, $A \subset \Omega$, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

2. Aus dem Wort »STOCHASTIK« werde auf gut Glück ein Buchstabe ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) das K gewählt wird, **b)** ein T gewählt wird,
c) ein Konsonant gewählt wird, **d)** S oder T gewählt wird?

3. Aus dem Wort »KLASSE« werden auf gut Glück zwei Buchstaben ausgewählt.
a) Auf wie viele Arten ist eine solche Auswahl möglich?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
1) ein A darunter ist, **2)** ein S darunter ist, **3)** zwei Konsonanten gewählt werden?

4. Eine natürliche Zahl n $(10 < n \leqq 20)$ werde willkürlich gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) eine gerade Zahl gezogen wird,
b) eine Primzahl gezogen wird,
c) eine durch 4 teilbare Zahl gezogen wird,
d) eine durch 4 und 7 teilbare Zahl gezogen wird?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Quadrat einer beliebig aus $\{1, 2, \ldots, 100\}$ herausgegriffenen Zahl als Einerziffer **a)** 4, **b)** 5, **c)** 2 hat?

6. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau einmal Wappen«
$B :=$ »Es fällt mindestens einmal Wappen«
$C :=$ »Es fällt höchstens einmal Wappen«

7. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau zweimal Zahl«
$B :=$ »Es fällt mindestens zweimal Zahl«
$C :=$ »Es fällt höchstens zweimal Zahl«

8. In einem Spiel wird eine L-Münze dreimal geworfen. Erscheint zweimal nacheinander Zahl, so erhält der Spieler einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

9. Zwei Laplace-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme durch 3 (5 bzw. 6) teilbar ist.

10. *Leibniz* (1646–1716) dachte, es sei mit zwei Würfeln ebenso leicht, eine 11 wie eine 12 zu werfen. Entscheide, ob er recht hatte. (Vgl. Aufgabe 12/**1** und siehe Seite 76.)

•**11.** Spieler hatten entdeckt, daß beim Wurf mit 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen ist als die Augensumme 9. *Galilei* (1564–1642) fand dafür die richtige Erklärung (siehe Seite 76). Zeige durch Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der beiden Augensummen, welch kleiner Unterschied durch die Spieler damals bemerkt worden war. (Vgl. auch Aufgabe 12/**2**.)