Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 4. 1. Problemstellung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

daß mindestens ein Brief richtig ankommt, ab $n = 7$ praktisch unabhängig von der Anzahl der Briefe durch $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$ gut approximiert wird, wie 1708 *Montmort* und 1751 *Leonhard Euler* (1707–1783) zeigten. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 68.)

8.4. Das Urnenmodell*

8.4.1. Problemstellung

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. Dabei ist das Urnenexperiment oft übersichtlicher, weil man sich hier auf das Wesentliche des Zufallsgeschehens beschränken kann. So läßt sich das Laplace-Zufallsexperiment »Werfen eines Laplace-Würfels« durch das Ziehen aus einer Urne mit 6 unterscheidbaren Kugeln simulieren. Aber auch Nicht-Laplace-Experimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. So weiß man z.B., daß die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt weltweit ziemlich genau den Wert 0,514 hat. Das Zufallsexperiment »Geburt eines Kindes« kann also durch das Ziehen aus einer Urne simuliert werden, die 514 Kugeln einer Farbe und 486 andere Kugeln enthält.

Bei einem Urnenexperiment verwendet man eine Urne, die gleichartige, je nach Problemstellung mit verschiedenen Merkmalen (z.B. Farbe, Nummer) versehene Kugeln enthält. Das Experiment besteht nun darin, daß man der Reihe nach je eine Kugel bis zu einer festgelegten Anzahl zieht und deren Merkmale notiert. Dabei gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Verfahrensweisen:

a) »Ziehen ohne Zurücklegen«
Die jeweils gezogene Kugel wird beiseite gelegt, d.h., die Zusammensetzung der Urne ändert sich bei jedem Zug.

b) »Ziehen mit Zurücklegen«
Die gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt; d.h., die Zusammensetzung des Urneninhalts ist vor jedem Zug die gleiche.**

Für das Folgende geben wir uns eine Urne mit N Kugeln vor; S dieser N Kugeln sind schwarz. Wir ziehen n Kugeln aus dieser Urne. Nun könnte man nach den Wahrscheinlichkeiten vieler Ereignisse fragen, wie z.B. »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz«, »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz, aber die 4. gezogene Kugel ist nicht schwarz«, »Unter den ersten 5 gezogenen Kugeln befinden sich mindestens 2 schwarze«. Ein besonders wichtiger Typ von Ereignissen wird uns in der Folgezeit immer wieder beschäftigen, nämlich »Unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau s schwarze Kugeln«. Da wir dieses Ereignis sehr häufig ansprechen werden, lohnt es sich, eine kurze Schreibweise dafür einzuführen. Wir

* Zur Einführung der Urne in die Wahrscheinlichkeitsrechnung lese man die Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.

** Bei komplizierteren Urnenexperimenten zieht man jeweils statt *einer* Kugel einen Satz von m Kugeln mit oder ohne Zurücklegen.

bezeichnen mit Z die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Das Ereignis »Es werden genau s schwarze Kugeln gezogen« schreibt sich damit kurz »$Z = s$«. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(Z = s)$ müssen wir nun unterscheiden, ob das Ziehen ohne oder mit Zurücklegen erfolgen soll.

8.4.2. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir zunächst ein Baumdiagramm. Den jeweiligen Urneninhalt geben wir durch ein Zahlenpaar wieder; die erste Zahl bedeute die Anzahl der jeweils noch vorhandenen schwarzen Kugeln, die zweite die Anzahl der anderen Kugeln (Figur 105.1).

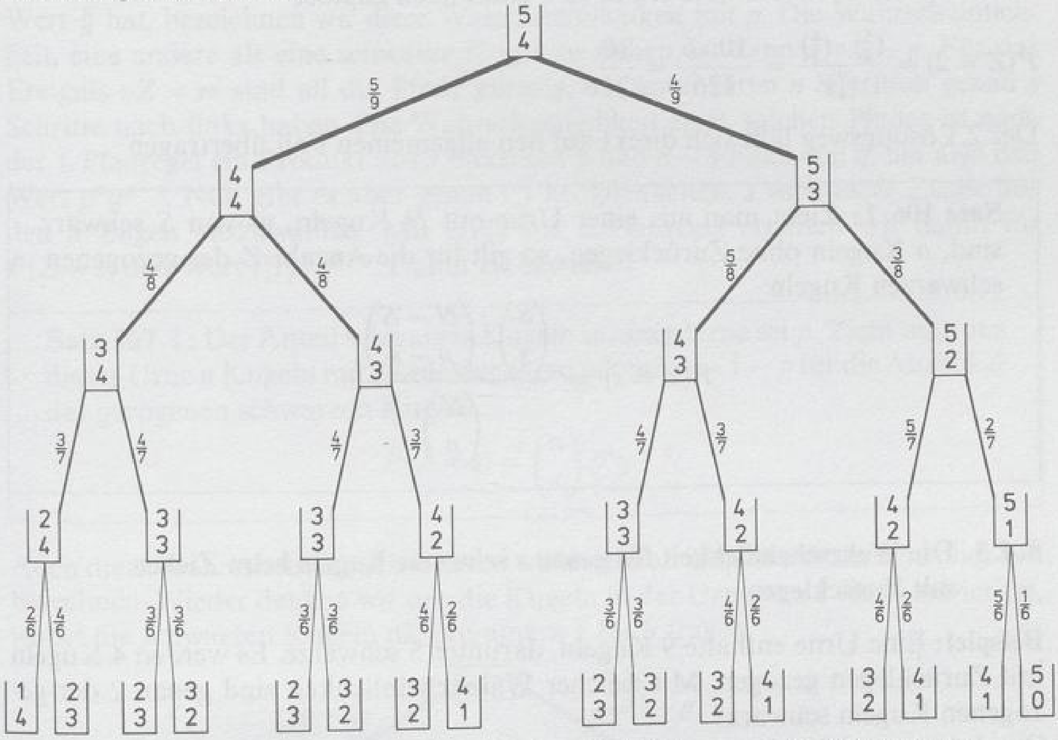

Fig. 105.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Das Ereignis »$Z = 2$« ist genau dann eingetreten, wenn eine Urne der Form (3|2) entstanden ist. Eine solche Urne kann auf 6 verschiedenen Wegen erhalten werden. Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg ergeben sich mit Hilfe der 1. Pfadregel (Seite 55), die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Urne (3|2) erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel (Seite 57). Somit gewinnen wir

$$P((3|2)) = P(Z=2) = \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \\ + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6} = \tfrac{10}{21} = \approx 47{,}6\,\%.$$