Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 4. 2. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

bezeichnen mit Z die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Das Ereignis »Es werden genau s schwarze Kugeln gezogen« schreibt sich damit kurz »$Z = s$«. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(Z = s)$ müssen wir nun unterscheiden, ob das Ziehen ohne oder mit Zurücklegen erfolgen soll.

8.4.2. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir zunächst ein Baumdiagramm. Den jeweiligen Urneninhalt geben wir durch ein Zahlenpaar wieder; die erste Zahl bedeute die Anzahl der jeweils noch vorhandenen schwarzen Kugeln, die zweite die Anzahl der anderen Kugeln (Figur 105.1).

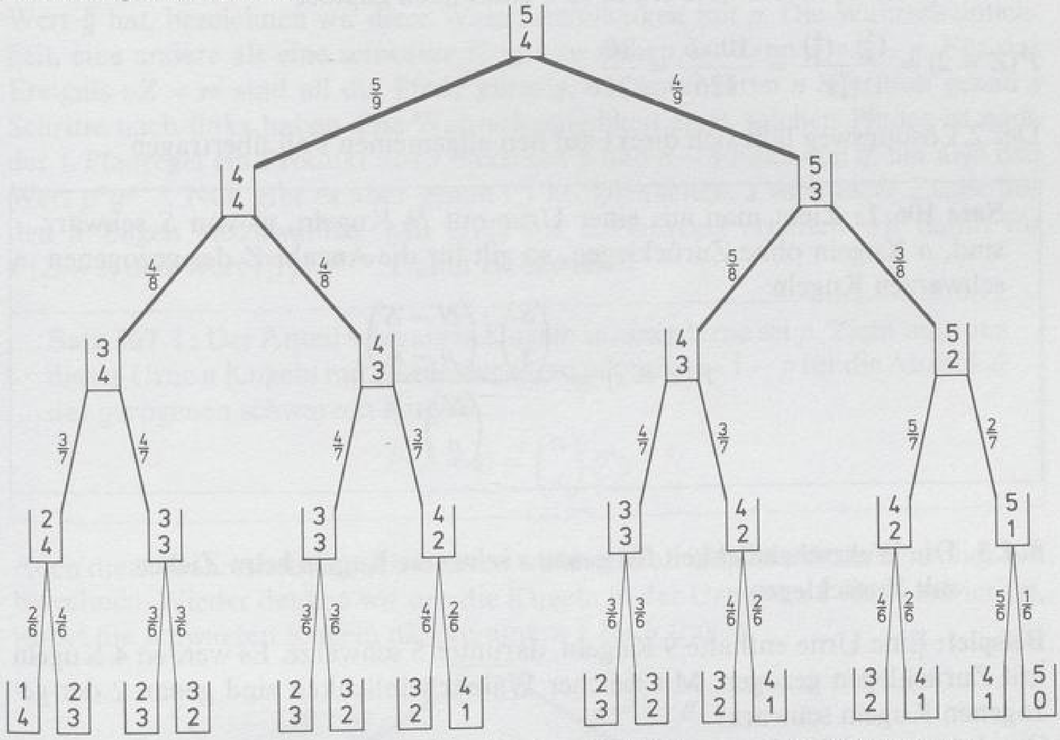

Fig. 105.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Das Ereignis »$Z = 2$« ist genau dann eingetreten, wenn eine Urne der Form (3|2) entstanden ist. Eine solche Urne kann auf 6 verschiedenen Wegen erhalten werden. Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg ergeben sich mit Hilfe der 1. Pfadregel (Seite 55), die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Urne (3|2) erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel (Seite 57). Somit gewinnen wir

$$P((3|2)) = P(Z = 2) = \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \\ + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6} = \tfrac{10}{21} = \approx 47{,}6\,\%.$$

In der vorstehenden Überlegung haben wir so gerechnet, als ob die Kugeln nacheinander gezogen würden. In **2.2.3** (Seite 17) hatten wir behauptet, daß die gleichzeitige Entnahme von 4 Kugeln ersetzt werden kann durch das 4malige Ziehen von je einer Kugel ohne Zurücklegen. Dies können wir durch Anwendung unserer kombinatorischen Hilfsmittel zeigen, indem wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen.
Denken wir uns dazu die 9 Kugeln unterscheidbar, etwa numeriert von 1 bis 9, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis 5 tragen sollen. Als Ergebnisraum Ω wählen wir die Menge aller 4-Mengen von Kugeln, die man aus der Urne ziehen kann. Da keine Kugel bevorzugt ist, sind alle diese Mengen gleichwahrscheinlich. In einer 9-Menge gibt es $\binom{9}{4}$ 4-Teilmengen; also ist $|\Omega| = \binom{9}{4}$. Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Die 2 schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten aus den 5 schwarzen Kugeln der Urne ziehen. Für die restlichen 2 Kugeln gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, aus den 4 anderen Kugeln gezogen zu werden. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich dann nach *Laplace*

$$P(Z=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{10}{21}.$$

Der 2. Lösungsweg läßt sich direkt auf den allgemeinen Fall übertragen.

Satz 106.1: Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, wovon S schwarz sind, n Kugeln ohne Zurücklegen, so gilt für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z=s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

8.4.3. Die Wahrscheinlichkeit für genau *s* schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir wieder ein Baumdiagramm. Es bezeichne $\bullet$ den Zug einer schwarzen Kugel, $\circ$ den Zug einer anderen Kugel (Figur 107.1).
Jeder Pfad, der genau 2mal nach links verläuft, führt zu genau 2 gezogenen schwarzen Kugeln. Jeder dieser Pfade hat auf Grund der 1. Pfadregel dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $(\frac{5}{9})^2 \cdot (\frac{4}{9})^2$. Da es genau 6 solcher Pfade gibt, erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel

$$P(Z=2) = 6 \cdot (\tfrac{5}{9})^2 \cdot (\tfrac{4}{9})^2 = \tfrac{2400}{6561} \approx 36{,}6\%.$$

Auch im allgemeinen Fall hilft uns das Baumdiagramm (Figur 107.2) beim Auffinden der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Da beim Ziehen mit Zurücklegen die