Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 4. 3. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

In der vorstehenden Überlegung haben wir so gerechnet, als ob die Kugeln nacheinander gezogen würden. In **2.2.3** (Seite 17) hatten wir behauptet, daß die gleichzeitige Entnahme von 4 Kugeln ersetzt werden kann durch das 4malige Ziehen von je einer Kugel ohne Zurücklegen. Dies können wir durch Anwendung unserer kombinatorischen Hilfsmittel zeigen, indem wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen.
Denken wir uns dazu die 9 Kugeln unterscheidbar, etwa numeriert von 1 bis 9, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis 5 tragen sollen. Als Ergebnisraum Ω wählen wir die Menge aller 4-Mengen von Kugeln, die man aus der Urne ziehen kann. Da keine Kugel bevorzugt ist, sind alle diese Mengen gleichwahrscheinlich. In einer 9-Menge gibt es $\binom{9}{4}$ 4-Teilmengen; also ist $|\Omega| = \binom{9}{4}$. Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Die 2 schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten aus den 5 schwarzen Kugeln der Urne ziehen. Für die restlichen 2 Kugeln gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, aus den 4 anderen Kugeln gezogen zu werden. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich dann nach *Laplace*

$$P(Z=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{10}{21}.$$

Der 2. Lösungsweg läßt sich direkt auf den allgemeinen Fall übertragen.

Satz 106.1: Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, wovon S schwarz sind, n Kugeln ohne Zurücklegen, so gilt für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z=s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

8.4.3. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir wieder ein Baumdiagramm. Es bezeichne $\bullet$ den Zug einer schwarzen Kugel, $\circ$ den Zug einer anderen Kugel (Figur 107.1).
Jeder Pfad, der genau 2mal nach links verläuft, führt zu genau 2 gezogenen schwarzen Kugeln. Jeder dieser Pfade hat auf Grund der 1. Pfadregel dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $(\frac{5}{9})^2 \cdot (\frac{4}{9})^2$. Da es genau 6 solcher Pfade gibt, erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel

$$P(Z=2) = 6 \cdot (\tfrac{5}{9})^2 \cdot (\tfrac{4}{9})^2 = \tfrac{2400}{6561} \approx 36{,}6\%.$$

Auch im allgemeinen Fall hilft uns das Baumdiagramm (Figur 107.2) beim Auffinden der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Da beim Ziehen mit Zurücklegen die

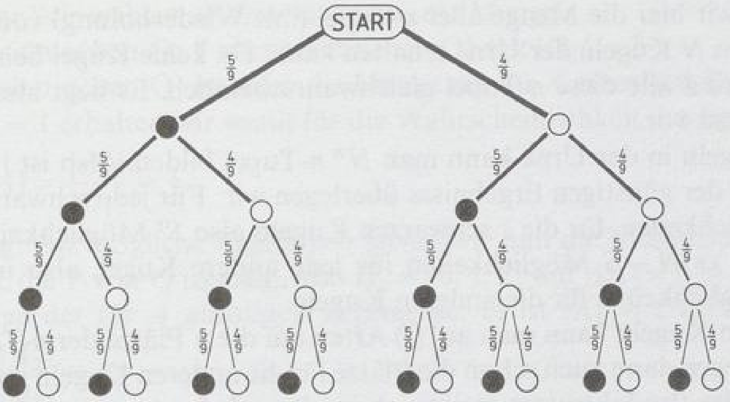

Fig. 107.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel bei jedem Zug den Wert $\frac{S}{N}$ hat, bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit p. Die Wahrscheinlichkeit, eine andere als eine schwarze Kugel zu ziehen, ist dann $q := 1 - p$. Für das Ereignis »$Z = s$« sind all die Pfade günstig, die unter ihren n Schritten genau s Schritte nach links haben. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Pfades ist nach der 1. Pfadregel ein Produkt aus s Faktoren p und $n - s$ Faktoren q, hat also den Wert $p^s q^{n-s}$. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{s}$ Möglichkeiten, s »schwarze Züge« aus den n Zügen auszuwählen. Mit Hilfe der 2. Pfadregel erhalten wir damit für $P(Z = s)$ den Wert $\binom{n}{s} p^s q^{n-s}$. Damit ist bewiesen

Satz 107.1: Der Anteil schwarzer Kugeln in einer Urne sei p. Zieht man aus dieser Urne n Kugeln mit Zurücklegen, so gilt mit $q := 1 - p$ für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z = s) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit können wir direkt als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen. Wieder denken wir uns die Kugeln in der Urne von 1 bis N numeriert, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis S tragen.

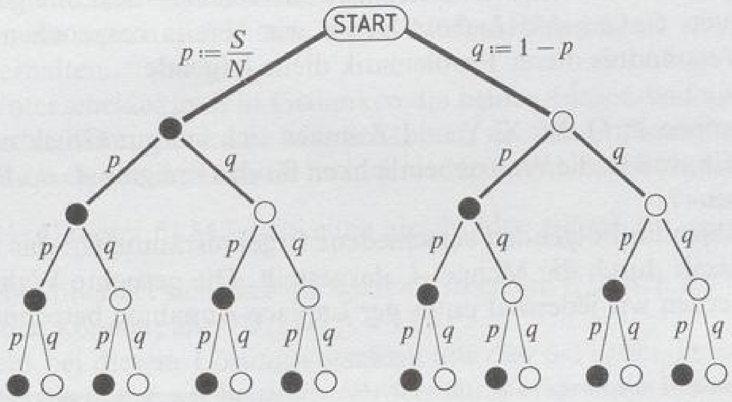

Fig. 107.2 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer $(S|N - S)$-Urne«

Als Ω wählen wir hier die Menge aller n-Tupel (mit Wiederholung) von Kugeln, die man aus den N Kugeln der Urne erhalten kann. Da keine Kugel beim Ziehen bevorzugt ist, sind alle diese n-Tupel gleichwahrscheinlich. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor.
Mit den N Kugeln in der Urne kann man N^n n-Tupel bilden. Also ist $|\Omega| = N^n$.
Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Für jede schwarze Kugel gibt es S Möglichkeiten, für die s schwarzen Kugeln also S^s Möglichkeiten. Entsprechend gibt es $N-S$ Möglichkeiten für jede andere Kugel, also insgesamt $(N-S)^{n-s}$ Möglichkeiten für die anderen Kugeln.
Die s schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{n}{s}$ Arten auf die n Plätze der n-Tupel verteilen. Damit liegen dann auch schon die Plätze für die anderen Kugeln im n-Tupel fest. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich somit nach *Laplace*:

$$P(Z=s) = \frac{\binom{n}{s} S^s (N-S)^{n-s}}{N^n} = \binom{n}{s} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} =$$
$$= \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.^*$$

8.5. Laplace-Paradoxa oder »Was ist gleichwahrscheinlich?«

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A nach der Formel $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ setzt bekanntlich voraus, daß die Ergebnisse des Experiments mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wie wir u.a. in Beispiel 4 von **8.3.** gesehen haben, kann man zu einem realen Experiment verschiedene Ergebnisräume konstruieren, für die man zu leicht unkritisch die Laplace-Annahme macht, weil es oft sehr schwierig ist, die wirkliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erkennen. *Laplace* selbst schrieb, daß dies gerade einer der heikelsten Punkte in der Untersuchung des Zufallsgeschehens sei.** Es darf einen also nicht wundernehmen, daß bei einem solchen Vorgehen unterschiedliche Werte für die Wahrscheinlichkeit ein und desselben Ereignisses errechnet werden können. Manche solche Fehlschlüsse sind als *Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung* bekannt geworden. Die Probleme von *Galilei* und *Leibniz* haben wir bereits besprochen***. Zu einem tieferen Verständnis dieser Problematik diene folgende

Aufgabe: 6 Personen P, Q, W, X, Y und Z setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A :=$ »P kommt neben Q zu sitzen«?
Lösung: Wir wählen im Folgenden verschiedene Ergebnisräume Ω_i; das Ereignis A wird dann jeweils durch die Menge A_i dargestellt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ werden wir jedesmal unter der Laplace-Annahme berechnen.

* Die Formel wird manchmal nach *Isaac Newton* (1643–1727) benannt, stammt aber mit Sicherheit nicht von ihm.
** Siehe Seite 76.
*** Siehe dazu Seite 76 und die Aufgaben 12/**1**, **2** und 111/**10**, **11**.